

51
1759

Г. Н. ПОЛОЖИЙ

ТЕОРИЯ
И ПРИМЕНЕНИЕ
 p -АНАЛИТИЧЕСКИХ
И (p, q) -АНАЛИТИЧЕСКИХ
ФУНКЦИЙ

АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Г. Н. ПОЛОЖИЙ

ТЕОРИЯ И ПРИМЕНЕНИЕ
 p -АНАЛИТИЧЕСКИХ
И (p, q) -АНАЛИТИЧЕСКИХ
ФУНКЦИЙ

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ
КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, ПЕРЕРЕБОТАННОЕ
И ДОПОЛНЕННОЕ

1

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКОВА ДУМКА» КИЕВ—1973

Монография представляет собой исследование автора по построению общей теории, решению краевых задач и некоторым применениям p -аналитических и (p, q) -аналитических функций комплексного переменного в механике сплошных сред. Это второе издание, переработанное и значительно дополненное новыми результатами, полученными автором и его учениками.

Книга рассчитана на научных работников и инженеров, занимающихся решением задач математической физики с помощью методов теории функций комплексного переменного, аспирантов и студентов старших курсов механико-математических и физических факультетов университетов.

Ответственный редактор
член-корреспондент АН УССР И. И. ЛЯШКО

Редакция физико-математической литературы
Зав. редакцией И. В. Евсеенко-Мисюренко

В книге рассматриваются вопросы, связанные с обобщением теории аналитических функций комплексного переменного, изучаются p -аналитические и (p, q) -аналитические функции комплексного переменного, введенные ранее автором в работах [1—8]. Из всех функций комплексного переменного, действительные и мнимые части которых являются решениями эллиптических систем дифференциальных уравнений в частных производных, p -аналитические и (p, q) -аналитические функции по своим качественным свойствам и по возможности построения для них стройного математического аппарата являются наиболее близкими аналогами аналитических функций.

Основное содержание монографии — дальнейшее развитие общей теории p -аналитических и (p, q) -аналитических функций, а также исследований по построению интегральных представлений p -аналитических функций от $z = x + iy$ с характеристикой $p = x^k$ ($k = \text{const} > 0$) и логарифмически гармонической характеристикой, начало которым было положено в работах [9—17]. Особое внимание автор уделяет вопросам приложения развиваемой им общей теории в механике сплошных сред. В частности, им разрабатываются новые методы решения задач осесимметричной теории упругости [9, 10, 18], теории установившейся фильтрации [5, 19], безмоментной теории оболочек и теории кручения тел вращения [20].

Книга является вторым изданием монографии автора «Обобщение теории аналитических функций комплексного переменного. p -аналитические и (p, q) -аналитические функции и некоторые их применения» (1965 г.). Это издание дополнено новыми результатами автора и его учеников, полученными ими в последние годы и опубликованными в журналах за 1965—1968 гг. Часть результатов исследований автора публикуется впервые. Первая глава дополнена, например, результатами по аффинным преобразованиям эквивалентных классов p -аналитических и (p, q) -аналитических функций (§ 11). Новыми во второй главе являются § 6—10, содержащие результаты по интегральным представлениям p -аналитических функций. Дополнения в третьей главе (§ 5, 6) относятся к вопросам применения p -аналитических функций при решении кон-

кретных осесимметричных задач теории упругости. Естественно, что при таком небольшом объеме книги изложить в равной мере полно весь материал невозможно, поэтому по отдельным вопросам, которые могут быть связаны с рассматриваемой проблемой, автору пришлось ограничиться только замечаниями принципиального характера и ссылками на соответствующие работы советских и зарубежных математиков.

Глубокие математические идеи Г. Н. Положего развиваются в работах его многочисленных учеников и последователей. Поэтому настоящая монография будет воспринята с большим интересом широкими кругами математической общественности.

Член-корреспондент АН УССР
И. И. ЛЯШКО

Теория p -аналитических и (p, q) -аналитических функций комплексного переменного излагается в монографии как вполне естественное и рациональное обобщение теории аналитических функций комплексного переменного. Такое обобщение в том виде, в каком оно изложено в этой работе, появилось не сразу. В связи с этим необходимо сделать некоторые замечания, относящиеся к истории рассматриваемого вопроса.

Возможность связать теорию аналитических функций с эллиптической системой уравнений в частных производных

$$\left. \begin{aligned} a_1 u_x + b_1 u_y + a_2 v_x + b_2 v_y &= A_1 u + A_2 v, \\ c_1 u_x + d_1 u_y + c_2 v_x + d_2 v_y &= B_1 u + B_2 v, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где $a_i, b_i, c_i, d_i, A_i, B_i$ ($i = 1, 2$) — заданные функции от x и y , была замечена Пикаром в 1891 г. [21]. Он обратил внимание на вопрос о построении теории функций, удовлетворяющих системе уравнений (1), по аналогии с теорией аналитических функций комплексного переменного. Однако идея Пикара долгое время не привлекала внимания исследователей, и теория эллиптических уравнений развивалась по аналогии с теорией потенциала. Исключение в этом отношении представляет работа Бельтрами, посвященная исследованию функции тока Стокса [22].

Интерес к идее Пикара возник только в последние десятилетия XX в. Л. Берс и А. Гельбарт [23—25] исследовали функции $f(z) = u + iv$ комплексного переменного $z = x + iy$, удовлетворяющие эллиптической системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1(x) u_x &= \tau_1(y) v_y, \\ \sigma_2(x) u_y &= -\tau_2(y) v_x, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2$ — заданные положительные функции своих аргументов. Полагая

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \tau_1 \\ \sigma_2 & \tau_2 \end{bmatrix}, \quad \Sigma' = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & \tau_1 \\ \frac{1}{\sigma_2} & \tau_2 \end{bmatrix},$$

они называют функцию $f(z) = u + iv$ Σ -моногоенной, если u и v удовлетворяют системе уравнений (2), и вводят понятие Σ -интеграла

$$\Omega = \int \sigma_2 u dx - \tau_2 v dy + i \int \frac{v}{\sigma_1} dx + \frac{u}{\tau_1} dy \quad (3)$$

и Σ -производной

$$\dot{f}(z) = \sigma_1 u_x + i \frac{v_x}{\sigma_2} = \tau_1 v_y - i \frac{u_y}{\tau_2}. \quad (4)$$

Простые вычисления показывают, что Ω и $\dot{f}(z)$ являются Σ' -моногоенными функциями. В силу того что $\Sigma'' = \Sigma$, получается простой метод нахождения новых решений системы уравнений (2) при помощи Σ -интегрирования и Σ -дифференцирования, исходя из ее тех или иных известных решений. Для случая $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, $\tau_1 = \tau_2 = \frac{1}{y}$ этот метод был указан и широко использован Бельтрами [22]. Случай $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, $\tau_1 = \tau_2 = y^{-n}$ ($n = \text{const}$) изучен А. Вайнштейном [26, 27].

В результате (Σ , Σ')-интегрирования n раз (от фиксированной точки $z_0 = x_0 + iy_0$ до переменной точки $z = x + iy$) комплексной постоянной $a \frac{1}{n!}$ получается Σ -моногоенная функция $Z^{(n)}(a, z_0, z)$, называемая формальной n -й степенью комплексного переменного $z = x + iy$. Вещественная и мнимая части формальной степени $Z^{(n)}(a, z_0, z)$ являются решениями системы уравнений (2). Л. Берс [28] доказал (при вполне определенных довольно общих предположениях о σ_1 , σ_2 , τ_1 , τ_2) полноту системы формальных степеней в классе Σ -моногоенных функций. Это значит, что всякую функцию, Σ -моногоенную в области, содержащей данную точку z_0 , можно представить в виде ряда по формальным степеням, равномерно сходящегося в некоторой окрестности точки z_0 .

Понятие Σ -интегрирования было расширено А. И. Маркушевичем (статья И. Г. Петровского [29]), М. А. Лукомской [30, 31], Л. Берсом и А. Гельбартом [32], С. Агмоном и Л. Берсом [33].

Обозначим через E_0 эллиптическую систему уравнений вида

$$au_x + bu_y - v_y = 0, \quad du_x + cu_y + v_x = 0, \quad (5)$$

где a, b, c, d — заданные функции от x и y . А. И. Маркушевич [29] показал, что при самых общих условиях E_0 можно записать в виде

$$(\lambda_{11})_y = (\lambda_{12})_x, \quad (\lambda_{21})_y = (\lambda_{22})_x,$$

где λ_{ij} ($i, j = 1, 2$) — линейные комбинации производных от u и v с коэффициентами, зависящими от x и y . Кроме того, если u_0, v_0 является решением E_0 , то u_1 и v_1 ,

$$u_1 = \int \lambda_{11} dx + \lambda_{12} dy, \quad v_1 = \int \lambda_{21} dx + \lambda_{22} dy,$$

как функции верхнего предела интегрирования x, y удовлетворяют системе уравнений вида (5) с некоторыми коэффициентами a_1, b_1, c_1, d_1 . Обозначим эту систему через E_1 , а зависимость между E_0 и E_1 —

через $E_0 \rightarrow E_1$. А. И. Маркушевичем показано, что если для заданной системы E_0 найдутся E_v ($v = 1, 2, \dots, n-1$) такие, что $E_0 \rightarrow E_1 \rightarrow \dots \rightarrow E_{n-1} \rightarrow E_0$, то результаты теории Σ -моногенных функций распространяются на систему E_0 .

В целом Σ -интегрирование и построение Σ -моногенных функций дало возможность продвинуться довольно далеко в направлении построения аналогий с аналитическими функциями, или, точнее, с разложением их в степенные ряды.

Отличное от теории Σ -моногенных функций направление в развитии обобщений теории аналитических функций комплексного переменного было выдвинуто в работах автора [1—3]. В этих работах изучены функции $f(z) = u + iv$ комплексного переменного $z = x + iy$, определенные системой уравнений

$$u_x = \frac{1}{p} v_y, \quad u_y = -\frac{1}{p} v_x, \quad (6)$$

где p — заданная положительная функция от x и y , подчиненная только довольно слабым условиям дифференцируемости. Такие функции названы p -аналитическими функциями комплексного переменного, p — характеристикой. Для p -аналитических функций введено понятие интеграла по сопряженным переменным (или, что то же самое, по сопряженной переменной)

$$\int u d\bar{Z} + i v dZ, \quad (7)$$

где $Z = X + iY$, $\bar{Z} = \bar{X} + i\bar{Y}$ — сопряженные переменные, которые определяются условием, заключающимся в том, что

$$Z^* = X + i\bar{Y}, \quad -i\bar{Z}^* = Y - i\bar{X} \quad (8)$$

являются дважды непрерывно дифференцируемыми p -аналитическими функциями. Установлены аналоги теоремы Коши и формулы Коши¹, построена классификация особых точек и нулей, доказана теорема Лиувилля, построена теория вычетов, установлены изолированность корней уравнений $f(z) = A = \text{const}$, теорема о сохранении области, а также получены другие результаты. Построение классификации особых точек и доказательство топологической эквивалентности p -аналитических и аналитических функций оказались возможными только благодаря тому, что нами [2, 3] в целях обобщения теории аналитических функций впервые были использованы (с некоторыми дополнениями и обобщениями) результаты Т. Карлемана [38, 39] о единственности решения задачи Коши для системы

¹ Впервые формула Коши для функций, определенных системой уравнений (6), была установлена нами в 1946 г. [1]. В 1947 г. независимо от нашей работы [2] С. Бергман [34] указал на возможность обобщения формулы Коши. Более ранние исследования, в которых бы рассматривался вопрос об обобщении формулы Коши, нам неизвестны, хотя одна из работ С. Бергмана [35] упоминается в связи с этим вопросом Л. Берсом [36].

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + i \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) = a\Phi + b\bar{\Phi}, \quad (9)$$

где $\Phi = U + iV$ — искомая функция, $a = \alpha + i\beta$, $b = \gamma + i\delta$ — заданные непрерывные функции от x и y . В частности, в работах [2, 3] была построена классификация нулей и особых точек функций $\Phi = U + iV$ комплексного переменного $z = x + iy$, определенных системой уравнений (9) в предположении, что коэффициенты a и b в отдельных точках могут быть разрывными, но остаются ограниченными при подходе к этим точкам². Показано, что такие замечательные свойства аналитических функций, как изолированность A -точек и теорема о сохранении области, присущие p -аналитическим функциям, не распространяются на функции, определенные системой уравнений (9). Этот интересный сам по себе факт послужил одним из доводов в пользу той точки зрения в обобщении теории аналитических функций комплексного переменного, которая принята в наших работах [1—8] и в настоящей монографии.

Система уравнений p -аналитических функций (6), зависящая от одного параметра p , является более общей, чем система (2), и менее общей, чем система уравнений (5). Несложные рассуждения показывают, что многие из приведенных выше свойств p -аналитических функций распространяются на решения более общих эллиптических систем уравнений по сравнению с системой уравнений (6). Так, теорема о сохранении области распространена [5] на решения системы уравнений (5). При помощи простых технических изменений выкладок, приведенных в работе [2], формула Коши обобщена на решения системы уравнений (5) Б. В. Шабатом [42]. Распространение формулы Коши на эллиптические системы уравнений более общего вида по сравнению с системой уравнений (5) рассмотрено Я. Б. Лопатинским [43].

Существенный шаг в развитии обобщения теории аналитических функций был сделан в монографии Л. Берса «Псевдоаналитические функции» [37]. Наряду с обзором результатов исследований других ученых Берс проводит вполне определенную оригинальную точку зрения в построении обобщения теории аналитических функций, в связи с которой в работе [36] им отмечается: «Работы Положия [69, 70, 71, 72] оказали влияние на первоначальную точку зрения автора относительно общей теории псевдоаналитических функций [11, 12] и привели к необходимости существенно использовать теорему Карлемана о единственности продолжения [28]»³.

² Отметим, что эти же результаты остаются справедливыми при нескольких меньших ограничениях, накладываемых на коэффициенты a и b , как это было показано позднее И. Н. Векуа [40, 41], назвавшим функции, определенные системой уравнений (9), обобщенными аналитическими функциями, и Л. Б. Берсом [36, 37], назвавшим эти функции псевдоаналитическими.

³ Здесь под [11, 12], [69, 70, 71, 72], [28] подразумеваются соответственно работы [44, 37], [2, 45, 3, 5], [38].

За первоначало при построении псевдоаналитических функций в монографии Берса принимаются так называемые обобщенные, или порождающие, пары $F(z)$, $G(z)$, которые представляют собой в рассматриваемой области D в плоскости $z = x + iy$ комплекснозначные функции, имеющие непрерывные по Гельдеру частные производные по x и y и удовлетворяющие условию

$$\operatorname{Im} [\bar{F}(z) G(z)] > 0. \quad (10)$$

Функция $\Phi = U + iV$ называется (F, G) -псевдоаналитической функцией в области D , если в каждой точке $z_0 = x_0 + iy_0$ этой области существует предел, называемый (F, G) -производной,

$$\Phi(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\Phi(z) - \varphi(x_0, y_0) F(z) - \psi(x_0, y_0) G(z)}{z - z_0}, \quad (11)$$

где $\varphi(x_0, y_0)$ и $\psi(x_0, y_0)$ — вещественные функции от $z_0 = x_0 + iy_0$, однозначно определяющиеся условием

$$\Phi(z_0) = \varphi(x_0, y_0) F(z_0) + \psi(x_0, y_0) G(z_0). \quad (12)$$

При этом $\omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ называется (F, G) -псевдоаналитической функцией второго рода. Функция же $\Phi(z) = U + iV$ там, где это необходимо, во избежание недоразумений называется (F, G) -псевдоаналитической функцией первого рода. Из равенства (12) и из комплексно-сопряженного ему равенства получается

$$\omega(z_0) = P(z_0) \Phi(z_0) + Q(z_0) \bar{\Phi}(z_0), \quad (13)$$

где

$$P(z_0) = \left(\frac{\bar{G} - i\bar{F}}{F\bar{G} - \bar{F}G} \right)_{z_0}, \quad G(z_0) = - \left(\frac{G - iF}{F\bar{G} - \bar{F}G} \right)_{z_0}. \quad (13')$$

Равенства (12) и (13) устанавливают взаимно однозначное соответствие между (F, G) -псевдоаналитическими функциями первого и второго рода, что обозначается следующим образом:

$$\Phi(z) = {}^*\omega(z), \quad \omega(z) = {}^*\Phi(z) \pmod{F, G}. \quad (14)$$

Показывается, что, для того чтобы функция $\Phi(z) = U + iV$ была (F, G) -псевдоаналитической функцией первого рода, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла системе уравнений (9) при следующих условиях:

$$a = - \frac{\bar{F}G_z - F_zG}{F\bar{G} - \bar{F}G}, \quad b = \frac{FG_z - F_zG}{F\bar{G} - \bar{F}G}, \quad (9')$$

где

$$F_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - i \frac{\partial F}{\partial y} \right), \quad F_{\bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + i \frac{\partial F}{\partial y} \right).$$

Устанавливается, что, для того чтобы функция $\omega = \varphi + i\psi$ была (F, G) -псевдоаналитической функцией второго рода, необходимо и достаточно, чтобы φ и ψ были непрерывно дифференцируемыми решениями системы уравнений

$$F\varphi_z + G\psi_z = 0. \quad (15)$$

Утверждается, что (F, G) -псевдоаналитические функции первого и второго рода нужно рассматривать как две интерпретации одной и той же математической сущности. Далее проводится аналогия, насколько это возможно, между аналитическими функциями и (F, G) -псевдоаналитическими функциями первого рода. Развивается аппарат (F, G) -дифференцирования и (F, G) -интегрирования, устанавливаются классификация нулей и особых точек, аналог теоремы Коши и аналог формулы Коши. Несколько обобщая метод, предложенный в работах [2, 3], Берс строит классификацию особых точек и, так же как и в работах [2, 5], доказывает теорему о том, что (F, G) -псевдоаналитические функции второго рода топологически эквивалентны аналитическим функциям⁴.

Важные результаты в обобщении теории аналитических функций получены И. Н. Векуа [40, 41]. Функции, определенные системой уравнений (9), он называет обобщенными аналитическими функциями и рассматривает их в зависимости от параметров a и b (a не в зависимости от порождающих пар, могущих в силу (9') приводить к одним и тем же параметрам a и b не единственным образом) с точки зрения изучения их общих свойств, и особенно с точки зрения постановки краевых задач для этих функций и исследования вопроса о существовании их решений. Для функций, определенных системой уравнений (9), установлены аналог теоремы Коши и аналог формулы Коши, отличные от соответствующих аналогов, построенных в работах [2, 3], а также, как и в работах [2, 3], при помощи указанных выше результатов Т. Карлемана [38] и некоторого их обобщения построена классификация особых точек, но, в отличие от работ [2, 3], это сделано, как и в монографии [37], при значительно меньших ограничениях, накладываемых на коэффициенты системы уравнений (9) a и b . Однако изолированность A -точек и теорему о сохранении области, как отмечалось выше, на функции, определенные системой уравнений (9), распространить нельзя.

В наших работах [7, 8, 46] в качестве обобщения понятия p -аналитических функций (но не настолько сильного, чтобы при этом утрачивались замечательные свойства, одновременно присущие аналитическим и p -аналитическим функциям) введены (p, q) -аналитические функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ комплексного переменного $z = x + iy$, определяющиеся системой уравнений в частных производных

$$\left. \begin{aligned} pu_x - qu_y - v_y &= 0, \\ qu_x + pu_y + v_x &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

где p и q — заданные вещественные функции от x и y , подчиненные только довольно слабым ограничениям дифференцируемости⁵, $p > 0$.

⁴ В связи с этой теоремой (теорема 8.1) в монографии [37] автор, ссылаясь на работы [2, 3], отмечает: «Теорема 8.1, или, точнее, ее некоторая модификация, была впервые доказана Положим в специальном случае».

⁵ Здесь, в отличие от цитируемых наших работ, мы q заменили на $-q$.

В соответствии с работами [2, 3] нами была высказана точка зрения, согласно которой за основу при построении обобщений аналитических функций принимаются p -аналитические и (p, q) -аналитические функции, называемые нами иногда основными обобщенными аналитическими функциями. В пользу такой точки зрения в обобщении теории аналитических функций комплексного переменного свидетельствуют следующие факты:

а) p -аналитические и (p, q) -аналитические функции являются наиболее близкими аналогами аналитических функций, так как имеют свойства, присущие одновременно (p, q) -аналитическим и аналитическим функциям и не присущие функциям, определенным системой уравнений (9);

б) с помощью замены только независимых переменных x и y система уравнений (1) при нулевых правых частях преобразуется в систему уравнений (p, q) -аналитических функций (16);

в) с помощью замены независимых переменных x и y и соответствующих аффинных преобразований функций u и v система уравнений (1) в самом общем случае преобразуется не только в систему уравнений (9), но, согласно нашей работе [47], и в систему уравнений (p, q) -аналитических функций (16) при соответствующих p и q ;

г) p -аналитические и (p, q) -аналитические функции определяются только своими характеристиками p , а также соответственно p и q без каких-либо наслоений, и, следовательно, все качественные свойства этих функций и различные построения математического аппарата для них могут быть связаны только с их характеристиками p и q соответственно ⁶.

В настоящей монографии последовательно развивается указанная точка зрения в обобщении аналитических функций. В соответствии с работами [1—8] применительно к классу p -аналитических и (p, q) -аналитических функций в виде аналога производной аналитической функции вводится понятие (p, q) -производной (в частности, p -производной), в виде аналога интеграла от аналитической функции — понятие интеграла по сопряженной переменной. В качестве обратных указанным операциям вводятся соответственно понятие (p, q) -интеграла (в частности, p -интеграла) и понятие производной по сопряженной переменной. Устанавливаются необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять характеристика p ,

⁶ Следует обратить внимание на то, что вводимые в работе [37] операция (F, G) -дифференцирования и операция (F, G) -интегрирования (стр. 3, 49) зависят от четырех вещественных параметров, или, что то же самое, от двух комплексных параметров F и G . Классы обобщенных аналитических функций, как и в работах [40, 41], строятся также в зависимости от четырех вещественных параметров. Вопросу выбора этих параметров мы придаем важное значение, что объясняется, например, следующими простыми рассуждениями. Допустим, что вместо класса аналитических функций $f(z) = u + iv$ мы стали изучать функции $\Phi(z) = au + ibv$, где a и b — заданные вещественные функции от x и y . Ясно, что функции $f(z)$ и функции $\Phi(z)$ можно рассматривать как две различные интерпретации одной и той же математической сущности, но математический аппарат для функции $\Phi(z)$ очень невыгодно отличался бы от математического аппарата аналитических функций.

чтобы операция интегрирования по сопряженной переменной не выводила из данного класса p -аналитических функций. При помощи интеграла по сопряженной переменной строится обобщение формулы Коши и интеграла типа Коши на случай p -аналитических и (p, q) -аналитических функций. Подробно исследуются общие свойства p -аналитических и (p, q) -аналитических функций. Строится классификация их нулей и особых точек. Доказывается изолированность A -точек, т. е. точек, в которых функция принимает заданное значение A . Устанавливается теорема о сохранении области, означающая, что топологические свойства p -аналитических и (p, q) -аналитических функций аналогичны топологическим свойствам аналитических функций. Исследуются дифференциальные свойства p -аналитических и (p, q) -аналитических функций в зависимости от дифференциальных свойств характеристик p и q . Строится теория вычетов p -аналитических и (p, q) -аналитических функций и устанавливаются другие свойства p -аналитических и (p, q) -аналитических функций, аналогичные соответствующим свойствам аналитических функций комплексного переменного.

Значительное место отводится построению различных интегральных представлений и формул их обращения для случаев частных классов p -аналитических функций, имеющих большое значение для приложений в математической физике. В частности, большого внимания, на наш взгляд, заслуживают основное интегральное представление p -аналитических функций от $z = x + iy$ с характеристикой $p = x^k$ ($k = \text{const} > 0$) и формулы его обращения, позволяющие сводить решение ряда краевых задач для x^k -аналитических функций к решению краевых задач для аналитических функций. Благодаря этому оказывается возможным находить в явном виде решения краевых задач x^k -аналитических функций для весьма широкого класса областей. В частности, показывается, что при $k = 1$ для этого же класса областей можно получить в явном виде решения соответствующих краевых задач теории осесимметричного потенциала. Решения некоторых из них в явном виде, согласно известным нам литературным источникам, до настоящего времени не были найдены (например, задачи об осесимметричном потенциале сферического кругового диска).

В последней главе рассматриваются некоторые применения p -аналитических и (p, q) -аналитических функций. По аналогии с известными формулами Колосова — Мусхелишвили устанавливаются формулы осесимметричной теории упругости, в которых все элементы напряженного состояния круговой симметрии выражаются через две p -аналитические функции комплексного переменного $z = x + iy$ с характеристикой $p = x$. При помощи этих формул находится интегральный оператор, устанавливающий взаимно однозначное соответствие между осесимметричными и плоскими напряженными состояниями. Указываются возможности применения полученных результатов к конкретным задачам осесимметричной теории упругости. Приводятся некоторые результаты по применению

p -аналитических функций при нахождении в явном виде решений краевых задач для безмоментных оболочек вращения с положительной гауссовой кривизной, отличных от поверхностей вращения второго порядка.

Применительно к решению задач теории фильтрации и теории кручения тел вращения излагается так называемый метод мажорантных областей. Сущность метода заключается в том, что при помощи топологических свойств p -аналитических и (p, q) -аналитических функций устанавливаются так называемые вариационно-топологические теоремы сравнения. Эти теоремы при изменении области указывают знак вариации таких интегральных, связанных с данными краевыми задачами характеристик, которые представляют непосредственный интерес для приложений. При помощи теорем сравнения определение соответствующих интегральных характеристик с точки зрения оценки их сверху и снизу сводится к нахождению решений тех же краевых задач, но для других вспомогательных (мажорантных) областей, для которых эти решения или известны или находятся просто. На основе целого ряда работ показывается эффективность метода мажорантных областей даже при довольно широком произволе в выборе вспомогательных областей. Последнее объясняется самой природой изучаемых процессов, интегральные характеристики которых обладают в некотором смысле большой устойчивостью по отношению к изменению области.

Возможности применения p -аналитических и (p, q) -аналитических функций очень широки. Эти функции и установленные их качественные и аппаратные свойства могут быть полезными при решении всех задач, где встречаются эллиптические системы уравнений (1) в общем или частном виде при $A_1 = A_2 = B_1 = B_2 = 0$.

При рассмотрении вопроса о применениях p -аналитических и (p, q) -аналитических функций мы ограничились только отдельными разделами математической физики, где возможности и польза таких применений не совсем очевидны или получаются благодаря новому качеству, возникающему при объединении двух вещественных функций, зависящих от двух вещественных переменных, в одну комплекснозначную функцию одного комплексного переменного. Показательными в этом отношении являются метод мажорантных областей, в основе которого лежат топологические свойства p -аналитических и (p, q) -аналитических функций, обнаруживающиеся только после того, как вещественные решения u и v соответствующих систем дифференциальных уравнений объединяются в одну комплекснозначную функцию $f(z) = u + iv$ комплексного переменного $z = x + iy$, основное интегральное представление p -аналитических функций комплексного переменного $z = x + iy$ с характеристикой $p = x^k$ ($k = \text{const} > 0$) и формулы его обращения, а также другие результаты, приведенные в монографии.

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ p -АНАЛИТИЧЕСКИХ И (p, q) -АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

§ 1. ОБЩЕЕ ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Пусть D — область в конечной части плоскости $z = x + iy$, C — ее граница. Будем говорить, что однозначная функция $f(z) = u + iv$ комплексного переменного $z = x + iy$ определена в точке $z = x + iy$, если в данной точке однозначно определено ее числовое значение; определена в односвязной области D , если она определена в каждой точке D ; определена в замкнутой односвязной области $D + C$, если она определена в D и в точках C .

Будем считать, что функция комплексного переменного $f(z) = u + iv$ определена в неодносвязной области D , если она определена как однозначная функция комплексного переменного во всякой односвязной области, содержащейся в D . Под функцией комплексного переменного в односвязной области D будем понимать функцию, определенную в неодносвязной области, получающейся из D исключением отдельных точек («точек ветвления»), при условии, что числовые значения функции в последних точках заданы. В области D функции комплексного переменного $f(z) = u + iv$ будем приписывать такие свойства, которыми обладают u и v как функции от x и y . Например, $f(z) = u + iv$ непрерывна, если u и v непрерывны; непрерывно дифференцируема, если u и v непрерывно дифференцируемы.

При $z = \infty$ и в области, содержащей точку $z = \infty$, о функции $f(z) = u + iv$ будем говорить все то же, что и о функции $F(\xi) = f\left(\frac{1}{\xi}\right)$ ($\xi = \frac{1}{z}$) при $\xi = 0$ или в соответствующей области в плоскости $\xi = \xi + i\eta$.

В дальнейшем под функцией комплексного переменного будем понимать однозначную функцию комплексного переменного, определенную в области, лежащей в конечной части комплексной плоскости (если не оговорено противное). Под операторной производной по z функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ комплексного переменного $z = x + iy$ будем понимать предел

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left[\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \frac{\Delta_y v}{\Delta y} + i \left(\frac{\Delta_x v}{\Delta x} - \frac{\Delta_y u}{\Delta y} \right) \right], \quad (1)$$

если таковой существует и не зависит от способа стремления $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ к нулю (Δx и Δy — частные приращения соответствующих функций в точке x, y , когда x и y получают приращения соответственно $\Delta x, \Delta y$). Нетрудно видеть, что, для того чтобы операторная производная (1) существовала, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(z) = u + iv$ имела частные производные по x и y . Обозначая операторную производную через $\frac{\hat{d}f(z)}{dz}$, можем написать

$$\frac{\hat{d}f(z)}{dz} = \frac{u_x + v_y}{2} + i \frac{v_x - u_y}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f(z)}{\partial x} - i \frac{\partial f(z)}{\partial y} \right). \quad (1')$$

Операторная производная по z в виде правой части равенства (1') под различными названиями (формальной производной, частной производной по z) встречалась во многих работах. Обобщения оператора правой части равенства (1') с точки зрения функционального анализа рассматривались Д. Помпеем (ареоларная производная) [48] и И. Н. Векуа (обобщенная производная) [41]. Операторную производную в том виде, в каком она введена у нас, для краткости иногда будем называть о-производной.

Легко видеть, как это было замечено Г. В. Колосовым [49], что правила вычисления операторной производной суммы, разности, произведения и частного двух функций комплексного переменного, имеющих операторные производные, такие же, как и правила вычисления обыкновенных производных. Кроме того, операторная производная в классе аналитических функций от $z = x + iy$ вырождается в производную в смысле теории аналитических функций; в классе функций, аналитических от x и y , — в частную производную по $z = x + iy$; в классе вещественных функций $\varphi(x)$ вещественного переменного x — в обыкновенную производную по x , если данные функции считать продолженными в область, содержащую рассматриваемый интервал оси x , полагая $f(z) = \varphi(x) + iv(x, y)$, где $v(x, y)$ — вещественная функция, удовлетворяющая условиям $v(x, 0) = 0$, $\left. \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x}$ [50].

В дополнение к сказанному приведем еще некоторые правила вычисления операторной производной и некоторые специальные тождества, связанные с ней.

1. Всякая непрерывная функция $f(z) = u + iv$, имеющая операторную производную по z , будет антианалитической функцией от $\bar{z}$ (т. е. комплексно-сопряженной с аналитической) в том и только

в том случае, когда $\frac{\hat{d}f(z)}{dz} = 0$.

2. Пусть черта сверху, как обычно, означает комплексную сопряженность; тогда

$$\overline{\frac{\hat{d}f(z)}{dz}} = \frac{\hat{d}\overline{f(z)}}{d\bar{z}}. \quad (2)$$

3. Пусть $\frac{df(z)}{ds}$ — производная дифференцируемой функции $f(z) = u + iv$ по направлению s , составляющему с осью x угол θ ; тогда выполняется равенство

$$\frac{df(z)}{ds} = \frac{\hat{d}f(z)}{dz} e^{i\theta} + \frac{\hat{d}f(z)}{d\bar{z}} e^{-i\theta}. \quad (3)$$

4. Пусть вещественная и мнимая части функции $w = f(\zeta(z)) = u + iv$, рассматриваемые как функции от ξ и η ($\zeta = \xi + i\eta$), имеют полные дифференциалы, а ξ и η , как функции от x и y , имеют частные производные; тогда справедливо равенство

$$\frac{\hat{d}w}{dz} = \frac{\hat{d}f(\zeta)}{d\zeta} \frac{\hat{d}\zeta}{dz} + \frac{\hat{d}f(\zeta)}{d\bar{\zeta}} \frac{\hat{d}\bar{\zeta}}{dz}. \quad (4)$$

В частности, если функция $w = f(\zeta(z))$ является аналитической функцией от ζ или $\zeta = \zeta(z)$ является аналитической функцией от z , то

$$\frac{\hat{d}w}{dz} = \frac{\hat{d}f(\zeta)}{d\zeta} \frac{\hat{d}\zeta}{dz}. \quad (4')$$

5. Пусть функция $w = f(z, \zeta(z)) = u + iv$ такая, что u и v , как функции от x, y, ξ, η , имеют полные дифференциалы, а ξ и η , как функции от x и y , имеют частные производные; тогда для полной операторной производной от w по z выполняется равенство

$$\frac{\hat{d}w}{dz} = \frac{\hat{\partial}f}{\partial z} + \frac{\hat{\partial}f}{\partial \zeta} \frac{\hat{d}\zeta}{dz} + \frac{\hat{\partial}f}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\hat{d}\bar{\zeta}}{dz}, \quad (5)$$

где $\frac{\hat{\partial}f}{\partial z}$, $\frac{\hat{\partial}f}{\partial \zeta}$ и $\frac{\hat{\partial}f}{\partial \bar{\zeta}}$ — частные операторные производные функции $w = f(z, \zeta(z))$ по z, ζ и соответственно $\bar{\zeta}$.

6. Если вещественная и мнимая части функции $f(z, \zeta) = u + iv$ двух комплексных переменных $z = x + iy$ и $\zeta = \xi + i\eta$, как функции от x, y, ξ, η , в окрестности точки x_0, y_0, ξ_0, η_0 , в которой они обращаются в нуль, имеют непрерывные частные производные по x, y, ξ, η и $u_{\xi}v_{\eta} - u_{\eta}v_{\xi} \neq 0$, то для операторной производной по z функции $\zeta = \zeta(z) = \xi + i\eta$, определенной из уравнения $f(z, \zeta) = 0$, справедливо равенство

$$\frac{\hat{d}\zeta}{dz} = - \left(\frac{\hat{\partial}f}{\partial z} \frac{\hat{\partial}\bar{\zeta}}{\partial \bar{\zeta}} - \frac{\hat{\partial}f}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\hat{\partial}\zeta}{\partial \zeta} \right) \left(\left| \frac{\hat{\partial}f}{\partial \zeta} \right|^2 - \left| \frac{\hat{\partial}f}{\partial \bar{\zeta}} \right|^2 \right)^{-1}. \quad (6)$$

В частности, если $f(z, \zeta)$ является аналитической функцией от ζ (при постоянных значениях z), то

$$\frac{\hat{d}\zeta}{dz} = - \frac{\hat{\partial}f}{\partial z} \left(\frac{\hat{\partial}f}{\partial \zeta} \right)^{-1}. \quad (6'')$$

Если $f(z, \zeta)$ при фиксированных значениях z является антианалитической функцией от ζ , то формула (6) принимает вид

$$\frac{\hat{d}\zeta}{dz} = -\frac{\hat{\partial}f}{\partial z} \left(\frac{\hat{\partial}f}{\partial \zeta} \right)^{-1}. \quad (6'')$$

Если равенство $f(z, \zeta) = 0$ имеет вид $z - z(\zeta) = 0$, то формула (6) запишется в виде

$$\frac{\hat{d}\zeta}{dz} = \frac{\hat{d}z}{d\zeta} \left(\left| \frac{\hat{d}z}{d\zeta} \right|^2 - \left| \frac{\hat{d}\bar{z}}{d\bar{\zeta}} \right|^2 \right)^{-1}. \quad (6''')$$

7. Если вещественные и мнимые части функций комплексного переменного $P = P(z) = p_1 + ip_2$ и $Q = Q(z) = q_1 + iq_2$ в односвязной замкнутой области $D + C$ в плоскости $z = x + iy$, ограниченной спрямляемым контуром C , имеют непрерывные частные производные по x и y , то выполняется равенство

$$\int_C Pdz + Qd\bar{z} = \frac{2}{i} \iint_D \left(\frac{\hat{\partial}Q}{\partial z} - \frac{\hat{\partial}P}{\partial \bar{z}} \right) dx dy, \quad (7)$$

где интегрирование по контуру C ведется в положительном направлении, т. е. в таком направлении, при котором точки области D остаются слева. В частности, для того чтобы выражение $Pdz + Qd\bar{z}$ было полным дифференциалом некоторой функции $f(z) = u + iv$,

достаточно, чтобы $\frac{\hat{\partial}Q}{\partial z} = \frac{\hat{\partial}P}{\partial \bar{z}}$. При выполнении этого условия

$$P = \frac{\hat{d}f(z)}{dz}, \quad Q = \frac{\hat{d}f(z)}{d\bar{z}}.$$

8. Для всякой непрерывно дифференцируемой функции $f(z) = u + iv$ справедливо равенство

$$f(z) - f(z_0) = \int_{z_0}^z \frac{\hat{d}f(z)}{dz} dz + \frac{\hat{d}f(z)}{d\bar{z}} d\bar{z}, \quad (8)$$

где z_0 — любая фиксированная точка, z — переменная точка; интегрирование ведется по любому спрямляемому контуру, соединяющему точки z_0 и z , лежащему в области, в которой функция $f(z)$ непрерывно дифференцируема.

9. Пусть $f(z) = u + iv$ — функция, непрерывно дифференцируемая в замкнутой области $D + C$, ограниченной спрямляемым контуром C ; тогда при $z \in D$ выполняется равенство

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{\hat{d}f(\zeta)}{d\bar{\zeta}} \frac{d\bar{\zeta} d\eta}{\zeta - z}, \quad \zeta = \xi + i\eta. \quad (9)$$

Равенства (2), (3) устанавливаются непосредственной проверкой. Формулы операторного дифференцирования (4) — (6''') выводятся

как тождества, являющиеся следствием обычных правил дифференцирования сложных функций [49]. Например, чтобы получить формулу (4), достаточно заметить ¹, что

$$\begin{aligned} \frac{\hat{d}f}{d\zeta} \frac{\hat{d}\zeta}{dz} + \frac{\hat{d}f}{d\bar{\zeta}} \frac{d\bar{\zeta}}{dz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} - i \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\xi_x + \eta_y}{2} + i \frac{\eta_x - \xi_y}{2} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} + i \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\xi_x - \eta_y}{2} + i \frac{-\eta_x - \xi_y}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial f}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} - i \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) + \frac{\partial f}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - i \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \right] = \frac{\hat{d}f}{dz}. \end{aligned}$$

Формулы (7), (8) доказываются сведением их к соответствующим формулам для вещественных переменных. Формула (9) получается из формулы (7), если, заменив в ней $z = x + iy$ на $\zeta = \xi + i\eta$, положить $P = \frac{\hat{f}(\zeta)}{\zeta - z}$, $Q = 0$ [1, 4, 50] ².

Операторная производная по z не только удобна при всевозможных вычислениях в классе непрерывно дифференцируемых функций $f(z) = u + iv$ комплексного переменного $z = x + iy$, но и весьма хорошо характеризует геометрические свойства этих функций при якобиане

$$J = u_x v_y - u_y v_x = \left| \frac{\hat{d}f}{dz} \right|^2 - \left| \frac{\hat{d}f}{d\bar{z}} \right|^2, \quad (10)$$

как отличном от нуля, так и равном нулю.

Справедлива следующая теорема [50].

Теорема 1. Если вещественная и мнимая части функции $f(z) = u + iv$ комплексного переменного $z = x + iy$, как функции переменных x и y , в некоторой точке $z = x + iy$ имеют полные дифференциалы, то для модуля ее операторной производной в этой точке выполняется равенство

$$\left| \frac{\hat{d}f}{dz} \right| = \begin{cases} \frac{1}{2} (\Lambda + \lambda), & \text{если } J \geq 0, \\ \frac{1}{2} (\Lambda - \lambda), & \text{если } J \leq 0, \end{cases} \quad (11)$$

где Λ и λ — соответственно максимальное и минимальное растяжения функции $f(z)$ в данной точке:

$$\Lambda = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\max_{|\Delta z| = \rho} |f(z + \Delta z) - f(z)|}{\rho}, \quad \lambda = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\min_{|\Delta z| = \rho} |f(z + \Delta z) - f(z)|}{\rho}. \quad (11')$$

¹ В монографии [41] (стр. 90) показывается, что формула (4) остается справедливой, если операторную производную понимать в обобщенном смысле; но при этом предполагается, что якобиан преобразования $\zeta = \xi(x, y) + i\eta(x, y)$ нигде не обращается в нуль внутри рассматриваемой области в плоскости $z = x + iy$.

² Формула (9) встречается во многих работах. Впервые она была получена, по-видимому, Д. Помпеем [48] в связи с рассмотрением понятия ареоларной производной.

При этом независимо от значений якобиана $J = u_x v_y - u_y v_x$, если

$$\frac{\hat{d}f}{dz} \frac{\hat{d}\bar{f}}{dz} = 0, \quad (12)$$

то $\Lambda = \lambda$, если

$$\frac{\hat{d}f}{dz} \frac{\hat{d}\bar{f}}{dz} \neq 0, \quad (13)$$

направлениями максимального и минимального растяжений являются направления векторов, составляющих с осью x углы соответственно

$$\vartheta = -\frac{1}{2} \arg \frac{\hat{d}f}{dz} \frac{\hat{d}\bar{f}}{dz}, \quad \vartheta_1 = -\frac{1}{2} \arg \frac{\hat{d}f}{dz} \frac{\hat{d}\bar{f}}{dz} + \frac{\pi}{2}. \quad (14)$$

При $\frac{\hat{d}f}{dz} \neq 0$ независимо от значений якобиана J и $\frac{\hat{d}\bar{f}}{dz}$ справедливы равенства

$$\arg \frac{\hat{d}f(z)}{dz} = \vartheta' - \vartheta = \vartheta'_1 - \vartheta_1, \quad (15)$$

где

$$\vartheta' = \lim_{0 < \rho \rightarrow 0} \arg [f(z + \rho e^{i\vartheta}) - f(z)], \quad \vartheta'_1 = \lim_{0 < \rho \rightarrow 0} \arg [f(z + \rho e^{i\vartheta_1}) - f(z)], \quad (15')$$

т. е. аргумент операторной производной по z равен углу поворота направлений максимального и минимального растяжений при их отображении на плоскость функции.

Доказательство. Из равенства (3) получаем

$$\begin{aligned} & \left| \frac{df}{ds} \right|^2 = \\ & = \left| \frac{\hat{d}f}{dz} \right|^2 + \left| \frac{\hat{d}\bar{f}}{dz} \right|^2 + 2\operatorname{Re} \left[\frac{\hat{d}f}{dz} \frac{\hat{d}\bar{f}}{dz} \right] \cos 2\vartheta - 2\operatorname{Im} \left[\frac{\hat{d}f}{dz} \frac{\hat{d}\bar{f}}{dz} \right] \sin 2\vartheta. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что при выполнении условия (12) $\Lambda = \lambda$ и всякое направление, выходящее из данной точки, является направлением максимальных и минимальных растяжений. Далее, при выполнении условия (13) экстремальные значения $\left| \frac{df}{ds} \right|^2$ принимаются при значениях ϑ , равных

$$\vartheta = -\frac{1}{2} \arg \frac{\hat{d}f}{dz} \frac{\hat{d}\bar{f}}{dz}, \quad \vartheta_1 = -\frac{1}{2} \arg \frac{\hat{d}f}{dz} \frac{\hat{d}\bar{f}}{dz} + \frac{\pi}{2},$$

и определяются равенствами

$$\Lambda = \left| \frac{\hat{d}f}{dz} \right| + \left| \frac{\hat{d}\bar{f}}{dz} \right|, \quad \lambda = \left| \left| \frac{\hat{d}f}{dz} \right| - \left| \frac{\hat{d}\bar{f}}{dz} \right| \right|.$$

Следовательно, равенства (11) и (14) верны.

Пусть теперь $\frac{\hat{d}\bar{f}}{dz} \neq 0$. При этом может быть несколько случаев.

1. Если $\frac{\hat{d}f}{dz} = 0$, то в силу (3)

$$\frac{\hat{d}h}{dz} = \frac{df}{dz}, \quad dz = dse^{i\theta}.$$

Отсюда

$$\arg \frac{\hat{d}f(z)}{dz} = \theta' - \theta = \theta'_1 - \theta_1,$$

причем θ и θ_1 — произвольные значения ($0 \leq \theta, \theta_1 \leq 2\pi$).

2. Если $\left| \frac{\hat{d}f}{dz} \right| - \left| \frac{\hat{d}\bar{f}}{dz} \right| = 0$, т. е. $J = 0$, то выполняется одно из условий

$$\frac{u_y}{u_x} = \frac{v_y}{v_x} = \mu = \text{const} \neq \infty, \quad \frac{u_x}{u_y} = \frac{v_x}{v_y} = \mu_1 = \text{const} \neq \infty$$

или соответственно одно из равенств

$$\frac{\hat{d}f}{dz} \frac{\hat{d}\bar{f}}{dz} = \frac{u_x^2 + v_x^2}{4} (1 - i\mu)^2, \quad \frac{\hat{d}f}{dz} \frac{\hat{d}\bar{f}}{dz} = \frac{u_y^2 + v_y^2}{4} (\mu_1 - i)^2.$$

Когда $\Delta z = \Delta x + i\Delta y = \rho e^{i\theta}$, в каждом из этих случаев $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \mu$ и соответственно $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \mu_1$. Это значит, что при $\Delta z = \rho e^{i\theta} = \Delta x + i\Delta y$ справедливы равенства

$$v_y \Delta x - v_x \Delta y = 0, \quad -u_y \Delta x + u_x \Delta y = 0.$$

Но $\frac{\hat{d}f}{dz}$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{\hat{d}f}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta z} & \left[\Delta_x u + \Delta_y v + \frac{\Delta_y v}{\Delta y} \Delta x - \frac{\Delta_x v}{\Delta x} \Delta y + \right. \\ & \left. + i \left(\Delta_x v + \Delta_y v - \frac{\Delta_y u}{\Delta y} \Delta x + \frac{\Delta_x u}{\Delta x} \Delta y \right) \right], \end{aligned}$$

где Δ_x и Δ_y — частные приращения соответствующих функций при изменении x и y . Следовательно,

$$\arg \frac{\hat{d}f}{dz} = \arg \lim_{\Delta z = \rho e^{i\theta} \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{2\Delta z} = \theta' - \theta,$$

$$\arg \frac{\hat{d}f}{dz} = \arg \lim_{\Delta z = \rho e^{i\theta_1} \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{2\Delta z} = \theta'_1 - \theta_1.$$

3. Если в данной точке z_0 $\left| \frac{\hat{d}f}{dz} \right| - \left| \frac{\hat{d}\bar{f}}{dz} \right| > 0$, т. е. $J > 0$, то, полагая $\omega = \xi + i\eta = (z - z_0) e^{-i\theta}$, $\zeta = \xi + i\frac{\lambda}{\Lambda} \eta$ и рассматривая

$f(z)$ как функцию от ζ при $\zeta = 0$, при помощи формулы (4) находим $\left| \frac{\hat{d}f}{d\zeta} \right| > 0$, $\left| \frac{\hat{d}\bar{f}}{d\bar{\zeta}} \right| = 0$. По формуле (4')

$$\frac{\hat{d}f}{dz} = \frac{\hat{d}f}{d\zeta} \frac{\hat{d}\zeta}{dz},$$

и, следовательно, в силу случая 1

$$\arg \frac{\hat{d}f}{dz} = \arg \frac{\hat{d}f}{d\zeta} + \arg \frac{\hat{d}\zeta}{dz} = \vartheta' - \vartheta.$$

Так же получаем

$$\arg \frac{\hat{d}f}{dz} = \vartheta'_1 - \vartheta_1.$$

4. Если в данной точке z_0 $\left| \frac{\hat{d}f}{dz} \right| - \left| \frac{\hat{d}\bar{f}}{dz} \right| < 0$, т. е. $J < 0$, то, полагая $\omega = \xi + i\eta = (z - z_0) e^{-i\vartheta}$, $\zeta = \xi - i \frac{\lambda}{\Lambda} \eta$, как и в случае 3, находим $\left| \frac{\hat{d}f}{d\zeta} \right| > 0$, $\left| \frac{\hat{d}\bar{f}}{d\bar{\zeta}} \right| = 0$ и $\arg \frac{\hat{d}f}{dz} = \vartheta' - \vartheta = \vartheta'_1 - \vartheta_1$. Теорема доказана.

Как следствие из доказанной теоремы отметим равенства

$$\left| \frac{\hat{d}\bar{f}}{dz} \right| = \begin{cases} \frac{1}{2} (\Lambda - \lambda), & \text{если } J \geq 0, \\ \frac{1}{2} (\Lambda + \lambda), & \text{если } J \leq 0, \end{cases} \quad (16)$$

и, если в данной точке $\frac{\hat{d}\bar{f}}{dz} \neq 0$,

$$\arg \frac{\hat{d}\bar{f}}{dz} = \vartheta' - \vartheta; \quad (17)$$

если, кроме того, в данной точке $\frac{\hat{d}f}{dz} \frac{\hat{d}\bar{f}}{dz} \neq 0$, то

$$\frac{\widehat{\bar{d}f}}{dz} = \begin{cases} \frac{1+k}{1-k} e^{i2\vartheta} \frac{\hat{d}\bar{f}}{dz}, & \text{если } J > 0, \\ \frac{1-k}{1+k} e^{i2\vartheta} \frac{\hat{d}\bar{f}}{dz}, & \text{если } J < 0, \end{cases} \quad (18)$$

$$\frac{\hat{d}f}{dz} = \begin{cases} \frac{1-k}{1+k} e^{i2\vartheta} \frac{\hat{d}f}{dz}, & \text{если } J > 0, \\ \frac{1+k}{1-k} e^{i2\vartheta} \frac{\hat{d}f}{dz}, & \text{если } J < 0, \end{cases} \quad (18')$$

где $k = \frac{1}{K}$, $K = \frac{\Lambda}{\lambda}$ — коэффициент растяжений.

Замечание. Записав равенство (3) в форме

$$dw = df = ds \left[\frac{\hat{d}f(z)}{dz} e^{i\theta} + \frac{\hat{d}f(z)}{d\bar{z}} e^{-i\theta} \right],$$

видим, что если $\left| \frac{\hat{d}f(z)}{dz} \right| + \left| \frac{\hat{d}f(z)}{d\bar{z}} \right| \neq 0$, т. е. если частные производные u_x, u_y, v_x, v_y не обращаются в нуль одновременно, то бесконечно малые окружности $dx^2 + dy^2 = ds^2$ в плоскости $z = x + iy$ с центром в точке x, y переходят в бесконечно малые эллипсы в плоскости $w = u + iv$ с центром в точке $f(z) = u + iv$. Складывая два комплексных числа $\frac{\hat{d}f(z)}{dz} e^{i\theta}$ и $\frac{\hat{d}f(z)}{d\bar{z}} e^{-i\theta}$ как векторы по правилу параллелограмма, сразу же замечаем, что если $J = \left| \frac{\hat{d}f(z)}{dz} \right|^2 - \left| \frac{\hat{d}f(z)}{d\bar{z}} \right|^2 > 0$, то направление обхода бесконечно малых окружностей в плоскости $z = x + iy$ и направление обхода соответствующих бесконечно малых эллипсов в плоскости $w = u + iv$ одинаковы, а при $J < 0$ эти направления противоположны. При $J = 0$ указанные бесконечно малые окружности в плоскости $z = x + iy$ переходят в прямолинейные отрезки длиной $ds \left| \frac{\hat{d}f(z)}{dz} \right|$, средняя точка которых совпадает с точкой $w = f(z)$, а угол, составленный с осью u , равен $\frac{1}{2} \arg \left| \frac{\hat{d}f(z)}{dz} \frac{\hat{d}f(z)}{d\bar{z}} \right|$.

При помощи таких чисто геометрических построений можно установить также справедливость всех утверждений, приведенных в доказанной теореме.

Кривые, касательные к которым составляют с осью x углы ϑ и ϑ_1 , определенные равенствами (14), будем называть линиями экстремальных растяжений, а их образы в плоскости функции $f(z) = u + iv$ — взаимными линиями. Линии экстремальных растяжений, взаимные линии и коэффициент растяжений являются очень наглядными геометрическими характеристиками непрерывно дифференцируемых функций комплексного переменного. Исключая из рассмотрения «нулевые точки», которые характеризуются условием $\Lambda = \lambda = 0$ или $u_x = u_y = v_x = v_y = 0$, можем сказать, что во всякой точке области, в которой определена непрерывно дифференцируемая функция $f(z) = u + iv$, $K = 1$ или ϑ и ϑ_1 однозначно определяются равенствами (14). Отображение данной области в плоскости $z = x + iy$, осуществляемое функцией $f(z)$, состоит в преобразовании линий экстремальных растяжений во взаимные линии в плоскости функции, причем взаимные линии могут вырождаться в точки.

Пример 1. Пусть дана функция $f(z) = u + iv = x + y$. Имеем $\frac{\hat{d}f}{dz} = \frac{\hat{d}f}{d\bar{z}} = \frac{1}{2} - i \frac{1}{2}$. В соответствии с (14) $\vartheta = \frac{\pi}{4}$, $\vartheta' = \arg \frac{\hat{d}f}{d\bar{z}} +$

+ ϑ . Это значит, что линиями экстремальных растяжений являются прямые, составляющие с осью x угол, равный $\frac{\pi}{4}$, и прямые им ортогональные. Взаимной линией является одна линия — ось u ; плоскость $z = x + iy$ отображается на ось u . Максимальное растяжение $\Lambda = \left| \frac{\hat{d}f}{dz} \right| + \left| \frac{\hat{d}\bar{f}}{d\bar{z}} \right| = \sqrt{2}$, минимальное растяжение $\lambda = 0$.

Пример 2. Пусть дана p -аналитическая функция, т. е. функция $f(z) = u + iv$, определенная системой уравнений

$$u_x = \frac{1}{p} v_y, \quad u_y = -\frac{1}{p} v_x, \quad (19)$$

где p — заданная функция от x и y , $p > 0$. Имеем

$$\frac{\hat{d}f}{dz} = \frac{u_x(1+p)}{2} - i \frac{u_y(1+p)}{2}, \quad \frac{\hat{d}\bar{f}}{d\bar{z}} = \frac{u_x(1-p)}{2} - i \frac{u_y(1-p)}{2}$$

и, следовательно,

$$\Lambda = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} \frac{(1+p) + |1-p|}{2}, \quad \lambda = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} \frac{(1+p) - |1-p|}{2},$$

$$K = \frac{1+p+|1-p|}{1+p-|1-p|} = \begin{cases} p, & \text{если } p \geq 1, \\ \frac{1}{p}, & \text{если } p \leq 1. \end{cases}$$

Считая для определенности $p < 1$, получаем

$$\begin{aligned} \vartheta &= -\frac{1}{2} \arg(u_x - iu_y)^2 = -\arg(u_x - iu_y) = \\ &= \operatorname{arctg} \frac{u_y}{u_x} = \operatorname{arctg} \frac{-v_x}{v_y}, \end{aligned}$$

$$\vartheta' = \arg \frac{\hat{d}f}{dz} + \vartheta = \arg(u_x - iu_y) + \vartheta = 0.$$

Это, в частности, означает, что функции, определенные системой уравнений (19), преобразуют бесконечно малые окружности в плоскости $z = x + iy$ в бесконечно малые эллипсы (с точностью до бесконечно малых высшего порядка) в плоскости $f(z) = u + iv$, причем оси этих эллипсов параллельны координатным осям u и v , а отношение их полуосей равно p . Линиями экстремальных растяжений в плоскости $z = x + iy$ являются семейства ортогональных кривых $v(x, y) = \text{const}$ и $u(x, y) = \text{const}$, взаимными линиями в плоскости функции $f(z) = u + iv$ — соответственно прямые, параллельные оси u и оси v .

Пример 3. Пусть дана (p, q) -аналитическая функция, т. е. функция $f(z) = u + iv$, определенная системой уравнений

$$pu_x - qu_y - v_y = 0, \quad qu_x + pu_y + v_x = 0. \quad (20)$$

Имеем

$$\frac{\hat{d}f}{dz} = \frac{u_x + pu_x - qu_y}{2} + i \frac{-qu_x - pu_y - u_y}{2} = \frac{1+p-iq}{2} (u_x - iu_y),$$

$$\frac{\hat{d}\bar{f}}{dz} = \frac{1-p+iq}{2} (u_x - iu_y),$$

$$K = \frac{|1+p-iq| + |1-p+iq|}{|1+p-iq| - |1-p+iq|},$$

$$\vartheta' = \frac{1}{2} \left[\arg \frac{\hat{d}f}{dz} - \arg \frac{\hat{d}\bar{f}}{dz} \right] = \frac{1}{2} \arg \frac{1+p-iq}{1-p+iq}.$$

Это означает, что функции, определенные системой уравнений (20), преобразуют бесконечно малые окружности в плоскости $z = x + iy$ в бесконечно малые эллипсы (с точностью до бесконечно малых высшего порядка) в плоскости $f(z) = u + iv$, причем большая полуось каждого из этих эллипсов составляет с осью u угол $\vartheta' = \frac{1}{2} \arg \frac{1+p-iq}{1-p+iq}$, отношение малой полуоси эллипса к его большой полуоси $k = \frac{|1+p-iq| - |1-p+iq|}{|1+p-iq| + |1-p+iq|}$.

Пример 4. Под квазиконформным отображением с характеристиками k и ϑ понимается такое отображение, при котором бесконечно малые эллипсы в плоскости независимого переменного переходят в бесконечно малые окружности в плоскости функции. При этом k — отношение полуосей эллипса ($k \leq 1$) и ϑ — угол, составленный большей полуосью эллипса с вещественной осью, заданы как функции независимого переменного [51—58].

Пусть функция $\omega = \varphi(z) = \alpha + i\beta$ реализует квазиконформное отображение с характеристиками k и ϑ круга $|z| < 1$ ($z = x + iy$) на некоторую область G в плоскости $\omega = \alpha + i\beta$. Предположив, что α и β , как функции x и y , имеют полные дифференциалы и что $\alpha_x \beta_y - \beta_x \alpha_y > 0$, из равенства (18) для определения данной функции легко получаем уравнение

$$\frac{\hat{d}\omega}{dz} = -\frac{k+1}{k-1} e^{-i2\vartheta} \frac{\hat{d}\omega}{d\bar{z}}. \quad (21)$$

Очевидно и обратное: если функция $\omega = \varphi(z) = \alpha + i\beta$ в круге $|z| < 1$ является решением уравнения (21) и если а) ее вещественная и мнимая части в этом круге, как функции x и y , имеют полные дифференциалы и б) якобиан $\alpha_x \beta_y - \beta_x \alpha_y$ в каждой точке этого круга положителен, то данная функция $\omega = \varphi(z) = \alpha + i\beta$ реализует квазиконформное отображение с характеристиками k и ϑ круга $|z| < 1$ на некоторую область в плоскости $\omega = \alpha + i\beta$.

Теорема 2. Пусть характеристики k и ϑ в круге $|z| < 1$ — аналитические функции переменных x и y ($z = x + iy$). Тогда, если $\zeta = \psi(z)$ есть аналитическое в круге $|z| < 1$ решение обыкновенного

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{k^* + 1}{k^* - 1} e^{-i2\theta^*},$$

где k^* и θ^* — функции переменных $z = x + iy$ и $\zeta = \xi + i\eta$, полученные соответственно из k и θ подстановкой вместо $x + iy$ и $x - iy$ переменных соответственно z и ζ , то функция $\omega = \alpha + i\beta = \bar{z} - \psi(z)$ реализует квазиконформное отображение с данными характеристиками k и θ круга $|z| < 1$ на некоторую область G в плоскости $\omega = \alpha + i\beta$ [50].

В самом деле, функция $\omega^* = \zeta - \psi(z)$ при независимых переменных z и ζ ($|z| < 1$) удовлетворяет уравнению в частных производных

$$\frac{\partial \omega^*}{\partial z} = -\frac{k^* + 1}{k^* - 1} e^{-i2\theta^*} \frac{\partial \omega^*}{\partial \zeta}, \quad (21')$$

следовательно, функция $\omega = \alpha + i\beta = \bar{z} - \psi(z)$ в круге $|z| < 1$ является решением уравнения (21). Очевидно, что эта функция удовлетворяет условию «а». Из равенства $\left| \frac{\hat{\partial} \omega}{\partial z} \right|^2 - \left| \frac{\hat{\partial} \omega}{\partial \zeta} \right|^2 = \alpha_x \beta_y - \beta_x \alpha_y$ и из уравнения (21) следует, что эта функция удовлетворяет также условию «б», что и требовалось доказать.

Замечание. Чтобы получить квазиконформное отображение с данными в условиях этой теоремы характеристиками k и θ круга $|z| < 1$ на наперед заданную область с заданной нормировкой, достаточно соответствующим образом подобрать аналитическую функцию от $\omega = \alpha + i\beta = \bar{z} - \psi(z)$.

Перейдем теперь к операции, обратной по отношению к операторному дифференцированию.

Функцию комплексного переменного $f(z) = u + iv$ (не обязательно однозначную), определенную в односвязной или не односвязной области D , будем называть *о-интегрируемой* (операторно интегрируемой) в этой области, если существует функция комплексного переменного $F(z) = U + iV$, непрерывная в области D , за исключением, может быть, отдельных точек, такая, что вне указанных отдельных точек в области D $\frac{\hat{\partial} F(z)}{\partial z}$ существует и справедливо равен-

ство $\frac{\hat{\partial} F(z)}{\partial z} = f(z)$. Всякую такую функцию $F(z)$ будем называть *о-первообразной* $f(z)$, их совокупность — неопределенным *о-интегралом* $f(z)$ в области D . Обозначая неопределенный *о-интеграл* функции $f(z)$ через $\hat{\int} f(z) dz$, будем называть $f(z) dz$ *подынтегральным выражением*, а $f(z)$ — *подынтегральной функцией*.

Из теории аналитических функций комплексного переменного известно, что из выполнения условий Коши — Римана и непрерывности функции следует ее аналитичность [59]. Поэтому справедливо

равенство

$$\hat{\int} f(z) dz = F(z) + \tilde{C}, \quad (22)$$

где $F(z) = U + iV$ — одна из о-первообразных функций $f(z)$ в области D , $\tilde{C}$ — о-постоянная интегрирования, определяющаяся следующим условием: комплексно-сопряженная с ней величина $\bar{\tilde{C}}$ является аналитической в области D функцией, за исключением отдельных точек, представляющих собой ее изолированные особые точки.

Из данного нами определения легко видеть, что неопределенный о-интеграл обладает простейшими свойствами

$$\frac{\hat{d}}{dz} \hat{\int} f(z) dz = f(z), \quad \hat{\int} \frac{\hat{d}F(z)}{dz} dz = F(z) + \tilde{C}, \quad (23)$$

$$\hat{\int} \tilde{C} f(z) dz = \tilde{C} \hat{\int} f(z) dz, \quad (24)$$

$$\hat{\int} [f(z) \pm f_1(z)] dz = \hat{\int} f(z) dz \pm \hat{\int} f_1(z) dz. \quad (25)$$

Приведем теперь некоторые простейшие способы вычисления неопределенного о-интеграла, решая тем самым вопрос о его существовании при соответствующих специальных предположениях о подынтегральных функциях.

1. Неопределенный о-интеграл функции $f(z) = u + iv$, аналитической в области D , существует, и для него справедливо равенство

$$\hat{\int} f(z) dz = \int f(z) dz + \tilde{C}, \quad (26)$$

где интеграл в правой части равенства (26) понимается в смысле теории аналитических функций комплексного переменного.

2. Если функция $f(z) = u + iv$ в области D представима одним из равенств

$$f(z) = \varphi(x) + i\psi(x), \quad (27)$$

$$f(z) = \varphi_1(y) + i\psi_1(y), \quad (28)$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\varphi_1(y)$, $\psi_1(y)$ — интегрируемые вещественные функции своих аргументов, то неопределенный о-интеграл функции $f(z)$ в области D существует и соответственно выполняются равенства

$$\hat{\int} f(z) dz = 2 \int \varphi(x) dx + i2 \int \psi(x) dx + \tilde{C}, \quad (27')$$

$$\hat{\int} f(z) dz = -2 \int \psi_1(y) dy + i2 \int \varphi_1(y) dy + \tilde{C}. \quad (28')$$

3. Пусть $f(z) = u + iv$ и $\zeta = \xi + i\eta$ — две функции комплексного переменного $z = x + iy$, о-дифференцируемые и непрерывные

■ D. Тогда справедливо равенство

$$\hat{\int} f(z) \frac{\hat{d}\zeta}{dz} dz = f(z) \zeta - \hat{\int} \zeta \frac{\hat{d}f(z)}{dz} dz \quad (29)$$

при условии, что хотя бы один из о-интегралов, входящих в это равенство, существует.

В самом деле, взяв о-интеграл от обеих частей равенства

$$\frac{\hat{d}(f(z)\zeta)}{dz} = f(z) \frac{\hat{d}\zeta}{dz} + \zeta \frac{\hat{d}f(z)}{dz},$$

убеждаемся в справедливости высказанного утверждения. Равенство (29) представляет собой формулу о-интегрирования по частям. Например,

$$\begin{aligned} \hat{\int} z \cos x dz &= 2 \hat{\int} z \frac{\hat{d} \sin x}{dz} dz = 2z \sin x - 2 \hat{\int} \sin x \frac{\hat{d}z}{dz} dz = \\ &= 2z \sin x + 4 \hat{\int} \frac{\hat{d} \cos x}{dz} dz = 2z \sin x + 4 \cos x + \tilde{C}. \end{aligned}$$

4. Пусть $\zeta = \zeta(z) = \xi + i\eta$ — функция от $z = x + iy$, о-дифференцируемая в D , а функция $f(\zeta(z)) = u + iv$ такая, что о-интегралы

$$\hat{\int} f(\zeta) \frac{\hat{d}\zeta}{dz} dz, \quad \hat{\int} f(\zeta) d\zeta$$

существуют, причем последний из них по ξ и η имеет полный дифференциал при $z \in D$. Тогда выполняется равенство

$$\hat{\int} f(\zeta) \frac{\hat{d}\zeta}{dz} dz = \hat{\int} f(\zeta) d\zeta - \hat{\int} \frac{\hat{d} \hat{\int} f(\zeta) d\zeta}{d\bar{\zeta}} \frac{\hat{d}\bar{\zeta}}{dz} dz. \quad (30)$$

В самом деле, в соответствии с формулой (4)

$$\frac{\hat{d}}{dz} \hat{\int} f(\zeta) d\zeta = f(\zeta) \frac{d\zeta}{dz} + \frac{\hat{d} \hat{\int} f(\zeta) d\zeta}{d\bar{\zeta}} \frac{\hat{d}\bar{\zeta}}{dz}.$$

Взяв от обеих частей этого равенства о-интеграл, убеждаемся в справедливости формулы (30) — «формулы о-интегрирования заменой переменных».

Отметим, что если $\zeta(z)$ — аналитическая функция от z или $f(\zeta)$ — аналитическая функция от ζ , то формула (30) принимает вид

$$\hat{\int} f(\zeta) \frac{\hat{d}\zeta}{dz} dz = \hat{\int} f(\zeta) d\zeta. \quad (30')$$

5. Об о-интегрировании правильно непрерывных функций комплексного переменного.

Пусть $F(z) = U + iV$ — однозначная функция, непрерывно дифференцируемая в замкнутой области $D + C$, $f(z) = u + iv =$

$= \frac{\hat{\alpha}F(z)}{dz}$ — ее непрерывная в $D + C$ о-производная (C — граница D , состоящая из спрямляемых контуров). Тогда, в силу формулы (9), при $z \in D$

$$F(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_D \frac{f(\xi) d\xi d\eta}{\bar{\xi} - \bar{z}} - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F(\xi) d\bar{\xi}}{\bar{\xi} - \bar{z}}, \quad \xi = \xi + i\eta. \quad (9')$$

Легко видеть, что здесь второе слагаемое представляет собой в области D функцию антианалитическую (т. е. функцию комплексно-сопряженную с аналитической функцией). Поэтому естественно ожидать, что интеграл вида

$$F_0(z) = D(f(z)) = -\frac{1}{\pi} \iint_D \frac{f(\xi) d\xi d\eta}{\bar{\xi} - \bar{z}}, \quad \xi = \xi + i\eta, \quad (31)$$

будет представлять собой о-первообразную функции $f(z) = u + iv$, непрерывную в области D . Покажем, что это так и будет, при этом в дополнение к непрерывности функции $f(z)$ в $D + C$ придется потребовать, чтобы она в области D была правильно непрерывной³. Докажем вначале следующую лемму.

Лемма (о двойном интеграле). Если $f(z)$ — функция комплексного переменного $z = x + iy$, измеримая и ограниченная в области D , лежащей в конечной части плоскости $z = x + iy$, то функция $F_0(z)$, определенная равенством (31), правильно непрерывна в замкнутой области $D + C$ с показателем γ , сколь угодно близким к единице, или, точнее,

$$|F_0(z_1) - F_0(z_2)| \leq A |z_1 - z_2| \left\{ 1 + \ln^+ \frac{1}{|z_1 - z_2|} \right\}, \quad (32)$$

где A — постоянная, $\ln^+ a = \ln a$, если $a \geq 1$, и $\ln^+ a = 0$, если $a < 1$.

В самом деле, пусть $\delta = |z_1 - z_2|$, M — число такое, что $|f(z)| < M$ при $z \in D$. Имеем

$$|F_0(z_1) - F_0(z_2)| \leq \frac{M}{\pi} \iint_D \left| \frac{1}{\bar{\xi} - \bar{z}_1} - \frac{1}{\bar{\xi} - \bar{z}_2} \right| d\xi d\eta. \quad (32')$$

Пусть e — круг $|\xi - z_1| < 2\delta$; тогда

$$\iint_e \frac{d\xi d\eta}{|\bar{\xi} - \bar{z}_1|} + \iint_e \frac{d\xi d\eta}{|\bar{\xi} - \bar{z}_2|} \leq 10\pi\delta.$$

³ Функция $f(z)$ по определению правильно непрерывна в замкнутой области $D + C$ (в области D), если для любых точек z_1 и z_2 , принадлежащих $D + C$ (или D), выполняется неравенство $|f(z_1) - f(z_2)| < K |z_1 - z_2|^\gamma$, где K и γ — положительные постоянные ($0 < \gamma < 1$). Функция $f(z)$ правильно непрерывна внутри области D , если она правильно непрерывна во всякой замкнутой области, содержащейся в области D .

В $D - e$ подынтегральную функцию в (32') запишем в виде $\frac{\delta}{|\bar{\xi} - \bar{z}_1| |\bar{\xi} - \bar{z}_2|}$. В силу того что в $D - e$ $|\xi - z_1| < 2 |\xi - z_2|$, можем сказать, что подынтегральная функция в (32') в области $D - e$ не превышает $2\delta |\xi - \bar{z}_1|^{-2}$. Интегрируя эту функцию по кольцу $2\delta < |\xi - z_1| < R$, содержащему $D - e$, получаем

$$2\delta \int_{2\delta < |\xi - z_1| < R} \int \frac{d\xi d\eta}{|\xi - z_1|^2} = 2\delta \int_0^{2\pi} \int_{2\delta}^R \frac{r dr d\varphi}{r^2} = 4\pi\delta \ln \frac{R}{2\delta}.$$

Таким образом, возвращаясь к (32'), находим

$$|F_0(z_1) - F_0(z_2)| \leq \left(10\pi\delta + 4\pi\delta \ln \frac{R}{2\delta}\right) \frac{M}{\pi},$$

или, считая $R > 2$,

$$\begin{aligned} |F_0(z_1) - F_0(z_2)| &\leq M \left(10\delta + 4\delta \ln \frac{R}{2} + 4\delta \ln \frac{1}{\delta}\right) \leq \\ &\leq M \left(10 + 4 \ln \frac{R}{2}\right) \delta \left[1 + \ln^+ \frac{1}{\delta}\right]. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Приведем еще теорему, необходимую для наших целей.

Теорема 3 (о дифференцировании равномерно сходящихся интегралов). Пусть $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $Q_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ — точки n -мерного пространства, Ω — n -мерная область в этом пространстве, S — граница области Ω , $D(Q_0, Q)$ — вещественная функция точки $Q \in \Omega + S$, зависящая от точки $Q_0 \in \Omega + S$ как от параметра. Пусть, далее, интеграл

$$j(Q_0) = \int_{\Omega} D(Q_0, Q) d\omega \quad (33)$$

имеет в области Ω непрерывные частные производные. Тогда интеграл

$$J(Q_0) = \int_{\Omega} \rho(Q) D(Q_0, Q) d\omega, \quad (34)$$

где $\rho(Q)$ — вещественная функция точки Q , также имеет непрерывные частные производные в области Ω , если выполнены следующие два условия:

а) функция $\rho(Q)$ правильно непрерывна в области Ω ;

б) функция $D(Q_0, Q)$ и ее частные производные $D_{x_i^0}(Q_0, Q)$

($i = 1, 2, \dots, n$) в $\Omega + S$ при $Q \neq Q_0$, как функции обеих точек Q и Q_0 , непрерывны и удовлетворяют условиям

$$|D(Q_0, Q)| < \frac{C}{|Q - Q_0|^{n-1}}, \quad |D_{x_i^0}(Q_0, Q)| < \frac{C}{|Q - Q_0|^n}, \quad (35)$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad C = \text{const}, \quad |Q - Q_0| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0)^2}.$$

При этом указанные частные производные интеграла $J(Q_0)$ определяются равенствами

$$J_{x_i^0}(Q_0) = \rho(Q_0) J_{x_i^0}(Q_0) + \int_{\Omega} [\rho(Q) - \rho(Q_0)] D_{x_i^0}(Q_0, Q) d\omega, \quad (36)$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Доказательство сформулированной теоремы можно найти в книге [60].

Теперь сформулируем и докажем интересующую нас теорему.

Теорема 4 (об α -первообразной правильно непрерывной функции).

Пусть D — область в конечной части плоскости $z = x + iy$, C — ее граница, состоящая из нескольких спрямляемых контуров. Тогда, если непрерывная в $D + C$ однозначная функция $f(z) = u + iv$ правильно непрерывна в области D , то ее α -первообразная в области D существует и определяется равенством (31). При этом она правильно непрерывна в области D с показателем, сколь угодно близким к единице, или, точнее, удовлетворяет условию (32).

В самом деле, в силу приведенной выше леммы, доказательство теоремы сводится к доказательству равенства $\frac{\hat{d}F_0(z)}{dz} = f(z)$. Полагая $F_0(z) = U(z) + iV(z)$, получаем

$$U(z) = \frac{1}{\pi} \iint_D [-u(\xi) G_{\xi} + v(\xi) G_{\eta}] d\xi d\eta,$$

$$V(z) = \frac{1}{\pi} \iint_D [-v(\xi) G_{\xi} - u(\xi) G_{\eta}] d\xi d\eta,$$

где $G = \ln r$, $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$. Функции $D(z, \xi) = G_{\xi}$, G_{η} и $\rho(z) = u(z)$, $v(z)$ удовлетворяют условиям теоремы о дифференцировании равномерно сходящихся интегралов, так как в области D двойные интегралы

$$\iint_D G_{\xi} d\xi d\eta = \int_C G d\eta, \quad \iint_D G_{\eta} d\xi d\eta = \int_C -G d\xi$$

имеют непрерывные частные производные по x и y , а $u(z)$ и $v(z)$ правильно непрерывны. Следовательно, $U(z)$ и $V(z)$ в области D имеют непрерывные частные производные, которые в соответствии с формулами (36) определяются равенствами

$$\pi U_x(z) = -u(z) \int_C G_x d\eta - \iint_D [u(\xi) - u(z)] G_{\xi x} d\xi d\eta -$$

$$-v(z) \int_C G_x d\xi + \iint_D [v(\xi) - v(z)] G_{\eta x} d\xi d\eta,$$

$$\pi U_y(z) = -u(z) \int_C G_y d\eta - \iint_D [u(\xi) - u(z)] G_{\xi y} d\xi d\eta -$$

$$\begin{aligned}
& -v(z) \int_{\zeta} G_y d\zeta + \int_D \int [v(\zeta) - v(z)] G_{\eta y} d\zeta d\eta, \\
\pi V_x(z) &= -v(z) \int_{\zeta} G_x d\eta - \int_D \int [v(\zeta) - v(z)] G_{\xi x} d\zeta d\eta + \\
& + u(z) \int_{\zeta} G_x d\zeta - \int_D \int [u(\zeta) - u(z)] G_{\eta x} d\zeta d\eta, \\
\pi V_y(z) &= -v(z) \int_{\zeta} G_y d\eta - \int_D \int [v(\zeta) - v(z)] G_{\xi y} d\zeta d\eta + \\
& + u(z) \int_{\zeta} G_y d\zeta - \int_D \int [u(\zeta) - u(z)] G_{\eta y} d\zeta d\eta.
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
\pi [U_x(z) + V_y(z)] &= u(z) \int_{\zeta} G_y d\zeta - G_x d\eta, \\
\pi [V_x(z) - U_y(z)] &= v(z) \int_{\zeta} G_y d\zeta - G_x d\eta.
\end{aligned}$$

Легко видеть, что

$$\int_{\zeta} G_y d\zeta - G_x d\eta = \int_{\zeta} \frac{\partial}{\partial \xi} \operatorname{arctg} \frac{\eta - y}{\xi - x} d\zeta + \frac{\partial}{\partial \eta} \operatorname{arctg} \frac{\eta - y}{\xi - x} d\eta = 2\pi$$

и поэтому

$$\frac{U_x(z) + V_y(z)}{2} + i \frac{V_x(z) - U_y(z)}{2} = u(z) + iv(z).$$

Теорема доказана ⁴.

В заключение укажем, что наметившаяся здесь аналогия о-дифференцирования и о-интегрирования функций комплексного переменного с дифференцированием и интегрированием функций вещественного переменного весьма глубока, только в первом случае везде вместо постоянных начинают играть роль о-постоянные — антианалитические функции. Например, если функция $X(z)$ о-интегрируема в области D и если в этой области о-интегрируема функция $Y(z) e^{-\int X(z) dz}$, где под о-интегралом понимается какая-либо из о-первообразных $X(z)$ в области D , то общее решение линейного о-дифференциального уравнения

$$\frac{\hat{d}w}{dz} = X(z) w + V(z) \tag{37}$$

⁴ Отметим, что, сформулировав и доказав теорему об о-первообразной правильно непрерывной функции, мы по существу только воспроизвели частичное содержание и способ доказательства двух лемм (о двойном интеграле и об особых точках), опубликованных в нашей работе [3]. На обобщениях этой теоремы с точки зрения теории функций вещественного переменного и функционального анализа, возможность которых становится особенно ясной на основе работ Л. Берса [37] и И. Н. Векуа [40, 41], мы здесь не останавливаемся.

определяется равенством

$$w = e^{\int X(z) dz} \left[\int e^{-\int X(z) dz} Y(z) dz + \tilde{C} \right], \quad (38)$$

где $\tilde{C}$ — произвольная о-постоянная⁵. Если коэффициенты $X_1(z)$ и $X_2(z)$ уравнения

$$\frac{\hat{d}^2 w}{dz^2} + X_1(z) \frac{\hat{d} w}{dz} + X_2(z) w = 0 \quad (39)$$

о-постоянны в области D , то общее решение этого уравнения в области D имеет вид

$$w = \tilde{C}_1 e^{\tilde{k}_1 z} + \tilde{C}_2 e^{\tilde{k}_2 z} \quad (40)$$

при $q(z) = X_1^2(z) - 4X_2(z) \neq 0$ и

$$w = \tilde{C}_1 e^{\tilde{k}_1 z} + \tilde{C}_2 z e^{\tilde{k}_2 z} \quad (40')$$

при $q(z) = X_1^2(z) - 4X_2(z) \equiv 0$. Здесь $\tilde{C}_1$ и $\tilde{C}_2$ — произвольные о-постоянные, $\tilde{k}_1 = -\frac{X_1(z)}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{q(z)}$, $\tilde{k}_2 = -\frac{X_1(z)}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{q(z)}$.

Если коэффициенты $X_1(z)$ и $X_2(z)$ уравнения (39) — аналитические функции от z в области D , то общее решение этого уравнения в области D имеет вид

$$w = \tilde{C}_1 w_1 + \tilde{C}_2 w_2, \quad (41)$$

где $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ — произвольные о-постоянные, w_1 и w_2 — решения обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + X_1(z) \frac{dw}{dz} + X_2(z) w = 0 \quad (41')$$

такие, что $w_1 \frac{dw_2}{dz} - w_2 \frac{dw_1}{dz} \neq 0$. Если для уравнения

$$\frac{\hat{d}^2 w}{dz^2} + X_1(z) \frac{\hat{d} w}{dz} + X_2(z) w = 0, \quad (42)$$

где $X_1(z), X_2(z)$ — заданные функции от $z = x + iy$, $\int X_1(z) dz$ существует и существует решение w_1 такое, что функция $\frac{1}{w_1^2} e^{-\int X_1(z) dz}$

⁵ К уравнению (37) приводит, например, эллиптическая система уравнений $u_x + v_y = pu + qv + r$, $v_x - u_y = -qu + pv + s$, где p, q, r, s — заданные вещественные функции от x и y , которые могут быть записаны в виде

$$\frac{\hat{d} w}{dz} = \frac{p - iq}{2} w + \frac{r + is}{2} \quad (w = u + iv).$$

о-интегрируема, то общее решение уравнения (42) имеет вид

$$\omega = \omega_1 \left[\tilde{C}_1 \int \frac{1}{\omega_1^2} e^{-\int X_1(z) dz} dz + \tilde{C}_2 \right], \quad (43)$$

где $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ — произвольные о-постоянные.

§ 2. ТРИ КЛАССА ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ. ОСНОВНЫЕ ОБОБЩЕННЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Приведем некоторые общие соображения о рациональном обобщении понятия аналитических функций комплексного переменного.

Будем исходить из линейной эллиптической системы дифференциальных уравнений первого порядка общего вида

$$\left. \begin{aligned} a_1 u_x + b_1 u_y + a_2 v_x + b_2 v_y &= A_1 u + A_2 v, \\ c_1 u_x + d_1 u_y + c_2 v_x + d_2 v_y &= B_1 u + B_2 v, \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

где $a_i, b_i, c_i, d_i, A_i, B_i$ ($i = 1, 2$) — заданные функции от x и y . Если в качестве обобщения аналитических функций ввести функции $\hat{f}(z) = u + iv$ комплексного переменного $z = x + iy$, вещественные и мнимые части которых удовлетворяют непосредственно системе уравнений (44), то изучение таких функций и разработка соответствующего им математического аппарата будут связаны с некоторыми излишними усложнениями, поскольку такие функции будут зависеть от 12 параметров — коэффициентов $a_i, b_i, c_i, d_i, A_i, B_i$ ($i = 1, 2$). Поэтому в соответствии с работой [8] выполним вначале некоторые специальные преобразования системы уравнений (44), чтобы свести ее к такой системе уравнений в частных производных первого порядка, которая зависела бы или от одного вещественного, или только от одного комплексного параметра. Это нам удастся сделать, если мы совершим только преобразование независимых переменных (при $A_1 = A_2 = B_1 = B_2 = 0$) и преобразование независимых переменных в сочетании с аффинным преобразованием искомых функций — в самом общем случае системы уравнений (44).

Условие эллиптичности (например, [60]) в применении к системе уравнений (44) означает, что характеристическое уравнение

$$\Delta(\alpha) = \begin{vmatrix} a_1 \alpha_1 + b_1 \alpha_2 & a_2 \alpha_1 + b_2 \alpha_2 \\ c_1 \alpha_1 + d_1 \alpha_2 & c_2 \alpha_1 + d_2 \alpha_2 \end{vmatrix} = 0, \quad |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 \neq 0, \quad (45)$$

не имеет вещественных решений α_1 и α_2 . Отсюда, в частности, следует, что определитель

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Дело в том, что обратное означало бы, что строки этого определителя пропорциональны, а характеристический определитель $\Delta(\alpha)$ представляется в виде двух линейных относительно

α_1 и α_2 множителей с вещественными коэффициентами и характеристическое уравнение (45) имеет вещественные корни. Поэтому, решая систему уравнений (44) относительно v_x и v_y , можем заменить ее без ограничения общности эллиптической системой уравнений вида

$$\left. \begin{aligned} au_x + bu_y - v_y &= A_1^*u + A_2^*v, \\ du_x + cu_y + v_x &= B_1^*u + B_2^*v, \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

где $a, b, c, d, A_1^*, A_2^*, B_1^*, B_2^*$ — заданные функции от x и y , причем $A_1^*, A_2^*, B_1^*, B_2^*$ выражаются линейно через A_1, A_2, B_1, B_2 . Условие эллиптичности системы уравнений (46) состоит в том, что характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a\alpha_1 + b\alpha_2 & -\alpha_2 \\ d\alpha_1 + c\alpha_2 & \alpha_1 \end{vmatrix} = 0, \quad |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 \neq 0,$$

не имеет вещественных корней, или, что то же самое,

$$\delta = ac - \left(\frac{b+d}{2} \right)^2 > 0.$$

Уравнение характеристических переменных системы уравнений (46) записывается в виде

$$\begin{vmatrix} a\varphi_x + b\varphi_y & -\varphi_y \\ d\varphi_x + c\varphi_y & \varphi_x \end{vmatrix} = 0, \quad |\varphi_x|^2 + |\varphi_y|^2 \neq 0$$

и совпадает с уравнением характеристических переменных для уравнения второго порядка

$$au_{xx} + 2b_1u_{xy} + cu_{yy} = 0, \quad b_1 = \frac{b+d}{2}.$$

При помощи общей замены независимых переменных

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y), \quad J = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x \neq 0$$

система уравнений (46) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} a^*u_{\xi} + \left(b^* + \frac{b-d}{2} \right) u_{\eta} - v_{\eta} &= \frac{1}{J} (g\xi_x - h\xi_y), \\ \left(b^* - \frac{b-d}{2} \right) u_{\xi} + c^*u_{\eta} + v_{\xi} &= \frac{1}{J} (g\eta_x + h\eta_y), \end{aligned}$$

где

$$g = A_1^*u + A_2^*v, \quad h = B_1^*u + B_2^*v,$$

$$a^* = \frac{1}{J} (a\xi_x^2 + 2b_1\xi_x\xi_y + c\xi_y^2), \quad c^* = \frac{1}{J} (a\eta_x^2 + 2b_1\eta_x\eta_y + c\eta_y^2),$$

$$b^* = \frac{1}{J} [a\xi_x\eta_x + b_1(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\eta_y\xi_y].$$

Выбрав в качестве новых независимых переменных ξ и η вещественную и мнимую части характеристических переменных системы урав-

нений (46), эту систему можем записать в виде

$$\left. \begin{aligned} a^* u_\eta + \frac{b-d}{2} u_\eta - v_\eta &= \frac{1}{J} (g\xi_x + h\xi_y), \\ -\frac{b-d}{2} u_\xi + a^* u_\eta + v_\xi &= \frac{1}{J} (g\eta_x + h\eta_y). \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Поэтому в дальнейшем, вместо того чтобы изучать непосредственно эллиптическую систему уравнений (44), или, что то же самое, (46), достаточно без ограничения общности изучать эллиптическую систему уравнений канонического вида

$$\left. \begin{aligned} pu_x - qu_y - v_y &= \alpha_1 u + \alpha_2 v, \\ qu_x + pu_y + v_x &= \beta_1 u + \beta_2 v, \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

где $p, q, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ — заданные функции от x и y , причем во всей рассматриваемой области $p > 0$ или во всей этой области $p < 0$.

В систему уравнений (48) входит всего шесть параметров (вместо 12 параметров в исходной системе (44)), причем четыре из них $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ являются, как это видно из (47), линейными комбинациями параметров $A_1^*, A_2^*, B_1^*, B_2^*$, а следовательно, и параметров A_1, A_2, B_1, B_2 .

Постараемся уменьшить число параметров, входящих в систему уравнений (48), с помощью аффинного преобразования функций u и v . Если положить

$$u = \frac{1}{p} \varphi, \quad v = \psi - \frac{q}{p} \varphi, \quad \varphi = pu, \quad \psi = v + qu, \quad (49)$$

то система уравнений (48) примет вид

$$\varphi_x - \psi_y = \frac{1}{p} (\alpha_1 - \alpha_2 q + p_x - q_y) \varphi + \alpha_2 \psi,$$

$$\psi_x + \varphi_y = \frac{1}{p} (\beta_1 - \beta_2 q + p_y + q_x) \varphi + \beta_2 \psi.$$

Полагая

$$\Phi(z) = \varphi + i\psi = pu + i(v + qu) = \sigma u + iv, \quad \sigma = p + iq, \quad (50)$$

последнюю систему уравнений можем записать в виде

$$\frac{\hat{d}\Phi}{dz} = A\Phi + B\bar{\Phi}, \quad (51)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A = \alpha + i\beta &= \frac{1}{4p} \left[2 \frac{\hat{d}\sigma}{dz} + \alpha_1 + i\beta_1 - i\sigma(\alpha_2 + i\beta_2) \right], \\ B = \gamma + i\delta &= \frac{1}{4p} \left[2 \frac{\hat{d}\sigma}{dz} + \alpha_1 + i\beta_1 + i\sigma(\alpha_2 + i\beta_2) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (51')$$

Систему уравнений (51), в отличие от канонической формы (48), будем называть нормальной формой эллиптической системы уравнений

(44), или, что то же самое, (46). Она зависит от четырех вещественных параметров. Уменьшим число этих параметров, введя новую неизвестную функцию

$$F(z) = U + iV = t\Phi(z) = e^{-\int \hat{A} d\bar{z}} [pu + i(v + qu)]. \quad (52)$$

После умножения обеих частей равенства (51) на

$$t = t(z) = e^{-\int \hat{A} d\bar{z}} \quad (52')$$

получаем

$$t \frac{\hat{d}\Phi}{d\bar{z}} - At\Phi = Bt\bar{\Phi},$$

или

$$\frac{\hat{d}}{d\bar{z}} (t\Phi) = B \frac{t}{i} (\bar{t}\bar{\Phi}).$$

Это значит, что функция $F(z)$, определенная равенством (52), удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{\hat{d}F}{d\bar{z}} = \mu \bar{F}, \quad (53)$$

где μ — комплексный параметр,

$$\mu = r + is = B \frac{t}{i} = B e^{\hat{\int} -A d\bar{z} + \hat{\int} \bar{A} dz}, \quad (53')$$

A и B определяются равенствами (51').

Таким образом, если привести систему уравнений (44), или (46), к канонической форме (48), т. е. если преобразовать только независимые переменные, число вещественных параметров, входящих в систему, снижается до шести (вместо 12). При помощи аффинного преобразования функций u и v , определенного равенством (52) в явном виде через коэффициенты исходной системы (что существенно), число вещественных параметров, входящих в систему, снижается до двух или до одного комплексного параметра $\mu = r + is$.

В соответствии с приведенными выкладками считаем целесообразным введение прежде всего трех классов обобщенных аналитических функций.

К первому классу мы относим p -аналитические функции, введенные нами в работах [2, 3], т. е. функции $f(z) = u + iv$, определенные системой уравнений

$$u_x = \frac{1}{p} v_y, \quad u_y = -\frac{1}{p} v_x, \quad (54)$$

где p — заданная положительная функция от x и y . К этому же классу следует отнести функции $f(z) = u + iv$, определяющиеся системой уравнений (54) при $p < 0$, т. е. функции, комплексно-сопряженные с p -аналитическими функциями. Из (47) видно, что первый класс функций $f(z) = u + iv$ охватывает решения эллиптических систем

уравнений вида

$$au_x + bu_y - v_y = 0, \quad bu_x + cu_y + v_x = 0, \quad (46')$$

где a, b, c — заданные функции от x и y . В частности, к этому классу функций относятся Σ -моногенные функции, рассмотренные Л. Берсом и А. Гельбартом [23—25]. Они определяются системой уравнений вида

$$\sigma_1(x) u_x = \tau_1(y) v_y, \quad \sigma_2(x) u_y = -\tau_2(y) v_x, \quad (46'')$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2$ — заданные положительные функции своих аргументов. Дело в том, что система уравнений (46'') после введения новых независимых переменных

$$\xi = \int \sqrt{\frac{\sigma_2(x)}{\sigma_1(x)}} dx, \quad \eta = \int \sqrt{\frac{\tau_2(y)}{\tau_1(y)}} dy$$

переходит в систему уравнений p -аналитических функций

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{1}{p} \frac{\partial v}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = -\frac{1}{p} \frac{\partial v}{\partial \xi},$$

где $p = \sqrt{\frac{\sigma_1(x) \sigma_2(x)}{\tau_1(y) \tau_2(y)}}$.

Заметим, что систему уравнений, определяющих весь первый класс функций, т. е. p -аналитические функции и комплексно-сопряженные с ними функции, можно записать в комплексной форме

$$p \frac{\hat{d}u}{dz} + i \frac{\hat{d}v}{dz} = 0, \quad (54')$$

где p — заданная функция от x и y , $p > 0$ в случае p -аналитических функций, $p < 0$ в случае p -антианалитических функций, т. е. функций, комплексно-сопряженных с p -аналитическими функциями.

Ко второму классу обобщенных аналитических функций относим введенные в работах [7, 8] (p, q) -аналитические функции $f(z) = u + iv$, определяющиеся системой уравнений

$$pu_x - qu_y - v_y = 0, \quad qu_x + pu_y + v_x = 0, \quad (55)$$

где p и q — заданные функции от x и y , $p > 0$, а также функции $f(z) = u + iv$, определяющиеся системой уравнений (55) при $p < 0$, т. е. функции, которые после изменения знака у мнимой части переходят в $(-p, -q)$ -аналитические функции ($-p > 0$). Из (47) видно, что второй класс функций охватывает все решения эллиптических систем уравнений (44) при условии, что $A_1 = A_2 = B_1 = B_2 = 0$. Уравнения, определяющие второй класс функций в комплексной форме, записываются следующим образом:

$$\sigma \frac{\hat{d}u}{dz} + i \frac{\hat{d}v}{dz} = 0, \quad \sigma = p + iq, \quad (55')$$

или

$$(\sigma + 1) \frac{\hat{d}f}{dz} + (\sigma - 1) \frac{\hat{d}\bar{f}}{dz} = 0, \quad (55'')$$

где p и q — заданные функции от x и y , $p > 0$ в случае (p, q) -аналитических функций и $p < 0$ в случае функций, комплексно-сопряженных с $(-p, -q)$ -аналитическими функциями.

Как видно из (54') и (55'), первый и второй классы обобщенных аналитических функций инвариантны по отношению к конформным преобразованиям независимых переменных; если $z = z(\xi)$ — аналитическая функция от $\xi = \xi + i\eta$, то уравнение (55') при переходе к новой независимой комплексной переменной ξ принимает вид

$$\sigma \frac{\hat{d}u}{d\xi} + i \frac{\hat{d}v}{d\xi} = 0.$$

К третьему классу обобщенных аналитических функций мы относим функции (52), определенные системой уравнений (53), при условии, что $\mu = r + is$ — заданная непрерывная функция от $z = x + iy$.

Характерно, что первый класс функций зависит только от одного вещественного параметра p и для p -аналитических функций, как отмечалось в § 1, известны взаимные линии и коэффициент растяжений K : бесконечно малые окружности в плоскости $z = x + iy$ преобразуются с сохранением направления обхода в бесконечно малые эллипсы с полуосями l и m , параллельными соответственно оси u и оси v , причем $\frac{l}{m} = p$. Второй класс функций зависит от двух вещественных параметров p и q или от одного комплексного параметра $\sigma = p + iq$, и для (p, q) -аналитических функций известны взаимные линии, составляющие с осью u углы

$$\theta' = \frac{1}{2} \arg \frac{1+p-iq}{1-p+iq}, \quad \theta'_1 = \theta' + \frac{\pi}{2},$$

и коэффициент растяжений

$$K = \frac{|1+p-iq| + |1-p+iq|}{|1+p-iq| - |1-p+iq|}.$$

Третий класс функций, так же как и второй, зависит только от одного комплексного параметра $\mu = r + is$, хотя этот класс и настолько широк, что охватывает решения систем уравнений (44) в самом общем случае.

Замечание 1. Из равенств (48), (51), (51'), (52), (53), (53') видно, что всякой функции $f(z) = u + iv$ из первого класса соответствует функция третьего класса

$$F(z) = U + iV = e^{-\int \frac{1}{2} \frac{\hat{d} \ln p}{d\bar{z}} d\bar{z}} (pu + iv) \quad (56)$$

с комплексным параметром

$$\mu = r + is = \frac{1}{2} \frac{\hat{d} \ln p}{d\bar{z}} e^{-\int \frac{1}{2} \frac{\hat{d} \ln p}{d\bar{z}} d\bar{z} + \int \frac{1}{2} \frac{\hat{d} \ln p}{dz} dz}. \quad (56')$$

Например, если $f(z) = u + iv$ — p -аналитическая функция с данной характеристикой p , то функция $\hat{f}(z) = \hat{u} + i\hat{v} = \sqrt{p}u + i\frac{v}{\sqrt{p}}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\hat{f}(z)}{dz} = \frac{d \ln \sqrt{p}}{dz} \hat{f}(z), \quad (57)$$

следовательно,

$$\frac{d^2 \hat{f}(z)}{dz d\bar{z}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\Delta \sqrt{p}}{\sqrt{p}} \hat{u} + i \frac{1}{4} \sqrt{p} \Delta \frac{1}{\sqrt{p}} \hat{v}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (57')$$

Равенство (57) получается из (56), (56') или непосредственно из условия p -аналитичности (55'), равенство (57') — дифференцированием равенства (57) с учетом тождеств

$$\left. \begin{aligned} \frac{\hat{d} \ln \sqrt{p}}{dz} \frac{\hat{d} \ln \sqrt{p}}{d\bar{z}} + \frac{\hat{d}^2 \ln \sqrt{p}}{dz d\bar{z}} &= \frac{1}{4} \cdot \frac{\Delta \sqrt{p}}{\sqrt{p}}, \\ \frac{\hat{d} \ln \sqrt{p}}{dz} \frac{\hat{d} \ln \sqrt{p}}{d\bar{z}} - \frac{\hat{d}^2 \ln \sqrt{p}}{dz d\bar{z}} &= \frac{1}{4} \sqrt{p} \Delta \frac{1}{\sqrt{p}}. \end{aligned} \right\} \quad (57'')$$

Всякой функции $f(z) = u + iv$ второго класса соответствует функция третьего класса

$$F(z) = U + iV = e^{-\hat{\int} \frac{1}{2p} \frac{\hat{d}\sigma}{d\bar{z}} d\bar{z}} [pu + i(v + qu)] \quad (58)$$

с комплексным параметром

$$\begin{aligned} \mu = r + is &= \frac{1}{2p} \frac{\hat{d}\sigma}{d\bar{z}} \frac{t}{i} = \\ &= \frac{1}{2p} \frac{\hat{d}\sigma}{d\bar{z}} e^{-\hat{\int} \frac{t}{2p} \frac{\hat{d}q}{d\bar{z}} d\bar{z}} \hat{\int} \frac{t}{2p} \frac{\hat{d}q}{d\bar{z}} dz. \end{aligned} \quad (58')$$

Отметим как следствие равенств (58), (58'), что если $\sigma = p + iq$ — аналитическая функция от z , то соответствующий второй класс функций $f(z) = u + iv$ такой, что $F(z) = pu + i(v + qu)$ является аналитической функцией от z .

Еще один класс обобщенных аналитических функций составляют функции $\Phi(z) = \varphi + i\psi$, определенные системой уравнений (51). Эти функции с точки зрения проведения аналогий с аналитическими функциями рассматривались в работах [2, 3, 36, 37, 40, 41]. Существенным, как видно из приведенных выкладок, является то, что этот класс функций отличается от третьего класса функций только множителем $t = e^{-\hat{\int} A d\bar{z}}$ и, так же как и третий класс, охватывает все

решения эллиптических систем уравнений (44). Следовательно, в этом отношении класс функций, определенных системой уравнений (51), можно считать эквивалентным третьему классу, однако он несомненно отличается от последнего тем, что зависит не от одного

комплексного параметра, а от двух комплексных или четырех вещественных параметров. Поэтому, отдавая некоторое предпочтение функциям третьего класса, условимся в дальнейшем для определенности функции $\Phi(z) = \varphi + i\psi$, удовлетворяющие системе уравнений (51), называть обобщенными аналитическими функциями четвертого класса.

Замечание 2. Как видно из (48), (51), (51'), (52), (53), (53'), всякой p -аналитической функции $f(z) = u + iv$ соответствует функция четвертого класса $\Phi(z) = \varphi + i\psi = pu + iv$ с комплексными параметрами

$$A = B = \frac{1}{2} \frac{\hat{d} \ln p}{dz}, \quad (59)$$

а всякой (p, q) -аналитической функции $f(z) = u + iv$ — функция четвертого класса $\Phi(z) = \varphi + i\psi = pu + i(v + qu)$ с комплексными параметрами

$$A = B = \frac{1}{2p} \frac{\hat{d}\sigma}{dz}. \quad (59')$$

Таким образом, установлены явные формулы перехода от функций первого и второго классов к функциям третьего и четвертого классов.

Сформулируем теперь основные определения.

Пусть D — односвязная область, лежащая в конечной части плоскости $z = x + iy$; $p, q, A = \alpha + i\beta, B = \gamma + i\delta$ и $\mu = r + is$ — функции комплексного переменного $z = x + iy$, определенные, однозначные и непрерывные в области D , причем p и q вещественные и $p > 0$.

Функцию $f(z) = u + iv$ комплексного переменного $z = x + iy$ будем называть p -аналитической в области D с данной характеристикой $p = p(x, y)$, если в этой области она определена, однозначна и ее вещественная и мнимая части имеют непрерывные частные производные по x и y и удовлетворяют системе уравнений (54). Будем говорить, что функция $f(z) = u + iv$ комплексного переменного $z = x + iy$ p -аналитическая в точке $z_0 \neq \infty$, если она p -аналитическая в некоторой области, содержащей точку z_0 ; p -аналитическая в точке $z_0 = \infty$, если она p -аналитическая как функция от $\zeta = \xi + i\eta = \frac{1}{z}$ в точке $\zeta = 0$; p -аналитическая в неограниченной области, если она p -аналитическая во всякой односвязной области, содержащейся в данной неограниченной области; p -аналитическая в замкнутой области, если она p -аналитическая в данной области и в точках ее границы.

Функцию $f(z) = u + iv$ комплексного переменного $z = x + iy$ будем называть (p, q) -аналитической в области D с данными характеристиками $p = p(x, y)$, $q = q(x, y)$, если в этой области она определена, однозначна и ее вещественная и мнимая части имеют непрерывные частные производные по x и y и удовлетворяют системе урав-

нений (55). Определения (p, q) -аналитических функций в точках $z_0 \neq 0$ и $z_0 = \infty$, в неодносвязной и замкнутой областях такие же, как и соответствующие определения p -аналитических функций, только вместо p -аналитичности функций следует говорить о (p, q) -аналитичности функций.

Функцию $F(z) = U + iV$ комплексного переменного $z = x + iy$ будем называть обобщенной аналитической функцией третьего класса в области D с данным комплексным параметром $\mu = r + is$, если в этой области она определена, однозначна, имеет непрерывные частные производные по x и y и удовлетворяет уравнению (53). Будем говорить, что функция $F(z) = U + iV$ комплексного переменного $z = x + iy$ является обобщенной аналитической функцией от z третьего класса с параметром $\mu = r + is$ в точке $z_0 \neq \infty$, если она является таковой в некоторой односвязной области, содержащей z_0 ; в точке $z_0 = \infty$, если она является таковой как функция от $\zeta = \xi + i\eta = \frac{1}{z}$ в точке $\zeta = 0$ с параметром $\mu^* = r^* + is^* = -\bar{z}^2 (r + is)$. Определения обобщенных аналитических функций третьего класса в неодносвязной и замкнутой областях аналогичны соответствующим определениям p -аналитических и (p, q) -аналитических функций.

Функцию $\Phi(z) = \varphi + i\psi$ комплексного переменного $z = x + iy$ будем называть обобщенной аналитической функцией четвертого класса в области D с данными комплексными параметрами A и B , если она в этой области определена, имеет непрерывные частные производные по x и y и удовлетворяет уравнению (51). Определения обобщенных аналитических функций четвертого класса в точках $z_0 \neq \infty$ и $z_0 = \infty$, в неодносвязной и замкнутой областях аналогичны соответствующим определениям обобщенных аналитических функций третьего класса.

p -аналитические и (p, q) -аналитические функции, в отличие от всех возможных классов обобщенных аналитических функций, связанных с эллиптической системой дифференциальных уравнений (44), будем называть основными обобщенными аналитическими функциями.

Из определений следует, что сумма и разность p -аналитических или (p, q) -аналитических функций, а также произведение этих функций и вещественной постоянной являются p -аналитическими и соответственно (p, q) -аналитическими функциями. Если $f(z) = u + iv$ — p -аналитическая функция, то $f^*(z) = if(z)$ является $\frac{1}{p}$ -аналитической функцией; если $f^*(z) = u + iv$ — (p, q) -аналитическая функция, то $f^*(z) = if(z)$ является (p^*, q^*) -аналитической функцией, где $p^* = \frac{p}{p^2 + q^2}$, $q^* = -\frac{q}{p^2 + q^2}$.

В самом деле, решая равенства (55) относительно u_x и u_y , получаем

$$p^*v_x - q^*v_y - (-u)_y = 0, \quad q^*v_x + p^*v_y + (-u)_x = 0.$$

Отсюда следует справедливость высказанного утверждения. В этом же можно убедиться, записав уравнения (p, q) -аналитических функций

$$\sigma \frac{\hat{du}}{dz} + i \frac{\hat{dv}}{dz} = 0, \quad \sigma = p + iq,$$

в виде

$$\frac{1}{\sigma} \frac{\hat{d}(-v)}{dz} + i \frac{\hat{du}}{dz} = 0.$$

Это значит, что при умножении $f(z)$ на i комплексный параметр σ переходит в комплексный параметр $\frac{1}{\sigma}$.

Отметим, что если $w = f(z) = u + iv$ — p -аналитическая функция и $J = u_x v_y - u_y v_x \neq 0$, то

$$\frac{\partial x}{\partial u} = p \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{1}{p} \frac{\partial y}{\partial u}; \quad (60)$$

если при тех же условиях $w = f(z) = u + iv$ является (p, q) -аналитической функцией, то

$$-q \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial u} - p \frac{\partial y}{\partial v} = 0, \quad -q \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} + p \frac{\partial x}{\partial v} = 0. \quad (60')$$

Действительно, применяя к уравнению $w - f(z) = 0$ формулу для о-производной обратной функции (6''') (см. § 1), получаем

$$\frac{\hat{dz}}{dw} = \frac{\frac{\hat{df}}{dz}}{\left| \frac{\hat{df}}{dz} \right|^2 - \left| \frac{\hat{df}}{dz} \right|^2}, \quad \frac{\hat{dz}}{d\bar{w}} = \frac{\frac{\hat{df}}{dz}}{\left| \frac{\hat{df}}{dz} \right|^2 - \left| \frac{\hat{df}}{dz} \right|^2}. \quad (60'')$$

Записав уравнение (p, q) -аналитических функций (55') в виде

$$\frac{\hat{df}}{dz} (\sigma + 1) + \frac{\hat{d\bar{f}}}{dz} (\sigma - 1) = 0$$

и воспользовавшись (60''), находим

$$\frac{\hat{dz}}{dw} (\sigma + 1) - \frac{\hat{dz}}{d\bar{w}} (\sigma - 1) = 0,$$

или

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial v} + i \left(\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v} \right) \right] (\sigma + 1) - \\ & - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v} + i \left(\frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial v} \right) \right] (\sigma - 1) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда при $\sigma = p$

$$\frac{\partial x}{\partial u} - p \frac{\partial y}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial u} + p \frac{\partial x}{\partial v} = 0,$$

при $\sigma = p + iq$

$$\frac{\partial x}{\partial u} - p \frac{\partial y}{\partial v} - q \frac{\partial x}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial u} + p \frac{\partial x}{\partial v} - q \frac{\partial y}{\partial v} = 0,$$

что совпадает с равенством (60').

Выше было показано, что всякой p -аналитической функции $f(z) = u + iv$ соответствует по формуле (56) функция третьего класса с параметром (56') или функция четвертого класса $\Phi = pu + iv$ с параметрами (58'), всякой (p, q) -аналитической функции $f(z) = u + iv$ соответствует по формуле (57) функция четвертого класса с параметрами (59).

Возникает обратный вопрос, имеющий существенное значение: можно ли заданный третий или четвертый класс обобщенных аналитических функций с помощью аффинных преобразований их вещественных и мнимых частей преобразовать в какой-либо класс основных обобщенных аналитических функций, т. е. в какой-либо класс p -аналитических или (p, q) -аналитических функций при соответствующим образом подобранных характеристиках p и q . Этот вопрос, как показано в нашей работе [47], решается при помощи следующих двух теорем.

Теорема 1. Если $\Phi(z) = \varphi + i\psi$ — обобщенная аналитическая функция четвертого класса с параметрами $A = B$, т. е. $\Phi(z)$ является решением уравнения

$$\frac{\hat{d}\Phi}{dz} = A(\Phi + \bar{\Phi}), \quad (61)$$

и если $\sigma^* = p^* + iq^*$ ($p^* > 0$) является решением этого же уравнения

$$\frac{\hat{d}\sigma^*}{dz} = A(\sigma^* + \bar{\sigma}^*), \quad \sigma^* = p^* + iq^*, \quad p^* > 0, \quad (61')$$

то $\tilde{f}(z) = \tilde{u} + i\tilde{v}$, где $\tilde{u}, \tilde{v}$ определяются равенствами

$$\tilde{u} = \frac{1}{p^*} \varphi, \quad \tilde{v} = \psi - \frac{q^*}{p^*} \varphi, \quad (61'')$$

является (p^*, q^*) -аналитической функцией с характеристиками p^* и q^* , определяющимися уравнением (61').

В самом деле, для выражения $L = \sigma^* \frac{\hat{d}\tilde{u}}{dz} + i \frac{\hat{d}\tilde{v}}{dz}$ имеем

$$L = \sigma^* \left[\frac{1}{p^*} \frac{\hat{d}\varphi}{dz} + \varphi \frac{\hat{d}}{dz} \frac{1}{p^*} \right] + i \left[\frac{\hat{d}\psi}{dz} - \frac{q^*}{p^*} \frac{\hat{d}\varphi}{dz} + \right. \\ \left. + \varphi \left(-\frac{1}{p^*} \frac{\hat{d}q^*}{dz} - q^* \frac{\hat{d}}{dz} \frac{1}{p^*} \right) \right] = \frac{\hat{d}\Phi}{dz} - \frac{1}{p^*} \varphi \frac{\hat{d}p}{dz} - \frac{i}{p^*} \varphi \frac{\hat{d}q^*}{dz},$$

или

$$L = \frac{\hat{d}\Phi}{dz} - \frac{1}{2p^*} \frac{\hat{d}\sigma^*}{dz} (\Phi + \bar{\Phi}).$$

Это означает, что если $\frac{1}{2\rho^*} \frac{d\sigma^*}{dz} = A$, то $L' = 0$ и $\tilde{f}(z) = \tilde{u} + i\tilde{v}$ является (ρ^*, q^*) -аналитической функцией с характеристиками ρ^* и q^* , определяющимися уравнением (61').

Теорема 2. Пусть $F(z) = U + iV$ — обобщенная аналитическая функция третьего класса с заданным параметром $\mu = \mu(z)$, т. е. $F(z)$ является решением уравнения (53). Тогда, если λ и ν — какие-нибудь фиксированные решения соответственно уравнений

$$\frac{\hat{d}\lambda}{dz} = \mu\bar{\lambda}, \quad \frac{\hat{d}\nu}{dz} = -\mu\bar{\nu} \quad (62)$$

такие, что

$$\frac{\lambda}{\nu} = \sigma^* = \rho^* + iq^*, \quad \rho^* > 0, \quad (62')$$

где ρ^* и q^* — какие-либо функции от x и y ($\rho^* > 0$), функция $\tilde{f}(z) = \tilde{u} + i\tilde{v}$, определенная равенством

$$F(z) = U + iV = \nu [\rho^* \tilde{u} + i(\tilde{v} + q^* \tilde{u})] \quad (63)$$

или равенствами

$$\tilde{u} = \frac{1}{\rho} \varphi, \quad \tilde{v} = \psi - \frac{q^*}{\rho^*} \varphi, \quad (63')$$

$$\varphi = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\nu} F(z) \right], \quad \psi = \operatorname{Im} \left[\frac{1}{\nu} F(z) \right], \quad (63'')$$

является (ρ^*, q^*) -аналитической функцией с характеристиками ρ^* и q^* , определяющимися равенствами (62), (62').

В самом деле, полагая в уравнении (53) $F(z) = \nu \Phi(z)$, получаем

$$\nu \frac{\hat{d}\Phi}{dz} = -\Phi \frac{\hat{d}\nu}{dz} + \mu \bar{\nu} \bar{\Phi} = \nu A (\Phi + \bar{\Phi}),$$

где (в силу второго из уравнений (62))

$$A = -\frac{1}{\nu} \frac{\hat{d}\nu}{dz} = \frac{1}{\nu} \mu \bar{\nu}. \quad (63''')$$

Таким образом, функция $\Phi(z) = \varphi + i\psi = \frac{1}{\nu} F(z)$ является обобщенной аналитической функцией четвертого класса с параметрами $A = B$, где A определяется равенствами (63'''). В силу первого из уравнений (62), это же самое можно сказать о функции $\frac{\lambda}{\nu} = \sigma^* = \rho^* + iq^*$. Поэтому на основании теоремы 1 функция $\tilde{f}(z) = \tilde{u} + i\tilde{v}$, определенная равенствами (63'), (63''), является (ρ^*, q^*) -аналитической с характеристиками ρ^* и q^* , определяющимися равенствами (62), (62').

Установим еще одну теорему, при помощи которой также можно положительно решить поставленный выше вопрос.

Теорема 3. Пусть $\Phi(z) = \varphi + i\psi$ — обобщенная аналитическая функция четвертого класса с заданными параметрами A и B , т. е. $\Phi(z)$ является решением уравнения (51). Пусть $\Phi_1(z) = \varphi_1 + i\psi_1$, $\Phi_2(z) = \varphi_2 + i\psi_2$ — фундаментальная пара функций данного четвертого класса, т. е. функций, удовлетворяющих уравнению (51) и таких, что

$$i \frac{\Phi_1(z)}{\Phi_2(z)} = \sigma^* = p^* + iq^*, \quad (64)$$

где p^* и q^* — какие-либо функции от x и y ($p^* > 0$). Тогда функция

$$\tilde{f}(z) = \tilde{u} + i\tilde{v}, \quad \tilde{u} = \frac{1}{p^* |\Phi_2|^2} (\varphi\psi_2 - \psi\varphi_2), \quad \tilde{v} = -\frac{1}{p^* |\Phi_2|^2} (-\varphi\psi_1 + \psi\varphi_1), \quad (65)$$

будет (p^*, q^*) -аналитической функцией с характеристиками p^* и q^* , определяющимися равенством (64).

В самом деле, равенство (65) означает, что $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ являются решением системы уравнений

$$\varphi_1 \tilde{u} + \varphi_2 \tilde{v} = \varphi, \quad \psi_1 \tilde{u} + \psi_2 \tilde{v} = \psi$$

с определителем $\Delta = \varphi_1 \psi_2 - \varphi_2 \psi_1 = p^* |\Phi_2|^2$ (в силу (64)). Подставляя $\Phi(z) = \tilde{u}\Phi_1 + \tilde{v}\Phi_2$ в (51), получаем

$$i \frac{\Phi_1(z)}{\Phi_2(z)} \frac{\hat{d}\tilde{u}}{dz} + i \frac{\hat{d}\tilde{v}}{dz} = 0,$$

а это, в силу (55'), означает, что $\tilde{f}(z) = \tilde{u} + i\tilde{v}$ является (p^*, q^*) -аналитической функцией с характеристиками p^* и q^* , определенными равенством (64).

§ 3. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО СОПРЯЖЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.

p -ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И (p, q) -ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Пусть $f(z) = u + iv$ — функция комплексного переменного $z = x + iy$, имеющая непрерывные частные производные по x и y , $\sigma = p + iq$ — заданный непрерывный комплексный параметр, непрерывно дифференцируемый по x и y достаточное число раз, $p > 0$. Условимся операторной p -производной функции $f(z) = u + iv$ по $z = x + iy$ называть выражение

$$\frac{\hat{d}_p f(z)}{dz} = p \frac{\hat{d}u}{dz} + i \frac{\hat{d}v}{dz} = \frac{pu_x + v_y}{2} + i \frac{v_x - pu_y}{2}, \quad (66)$$

и операторной (p, q) -производной по $z = x + iy$ — выражение вида

$$\frac{\hat{d}_{p,q} f(z)}{dz} = \sigma \frac{\hat{d}u}{dz} + i \frac{\hat{d}v}{dz} = \frac{pu_x - qu_y + v_y}{2} + i \frac{v_x - qu_x - pu_y}{2}. \quad (66')$$

Отметим, что

$$\overline{\hat{d}_p f(z)} = \frac{\hat{d}_p \overline{f(z)}}{d\bar{z}}, \quad \overline{\hat{d}_{p,q} f(z)} = \frac{\hat{d}_{p,-q} \overline{f(z)}}{d\bar{z}} = \frac{p u_x - q u_y + v_y}{2} + i \frac{p u_y + q u_x - v_x}{2}.$$

Теорема 1. Для того чтобы в классе функций $f(z) = u + iv$, имеющих непрерывные частные производные по x и y , существовал

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{p(z) \Delta u + i \Delta v}{\Delta z}, \quad \Delta u = u(z + \Delta z) - u(z), \quad \Delta v = v(z + \Delta z) - v(z), \quad (66'')$$

не зависящий от способа стремления Δz к нулю, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(z) = u + iv$ была p -аналитической. При выполнении этого условия справедливы равенства

$$\begin{aligned} \frac{\hat{d}_p f(z)}{dz} &= \frac{p u_x + v_y}{2} + i \frac{v_x - p u_y}{2} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{p \Delta u + i \Delta v}{\Delta z} = \\ &= p \frac{\hat{d}u}{dz} + i \frac{\hat{d}v}{dz} = p(u_x - i u_y) = i(v_x - i v_y). \end{aligned} \quad (67)$$

Для того чтобы функция $f(z) = u + iv$, имеющая непрерывные частные производные по x и y , была p -аналитической, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\hat{d}_p f(z)}{d\bar{z}} = 0. \quad (68)$$

В самом деле, считая, что предел (66'') существует, полагаем $\Delta z = \Delta x$ и затем $\Delta z = i \Delta y$. Переходя к пределу при $\Delta z \rightarrow 0$ и сравнивая один результат с другим, получаем

$$p u_x + i v_x = v_y - i p u_y$$

и, следовательно,

$$p \frac{\hat{d}u}{dz} + i \frac{\hat{d}v}{dz} = 0.$$

Это значит, что функция $f(z) = u + iv$ p -аналитическая. Пусть теперь дано обратное, т. е. что $f(z) = u + iv$ — функция p -аналитическая. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{p(z) \Delta u + i \Delta v}{\Delta z} &= \frac{p(z) \left(\frac{\hat{d}u}{dz} \Delta z + \frac{\hat{d}u}{d\bar{z}} \Delta \bar{z} \right) + i \left(\frac{\hat{d}v}{dz} \Delta z + \frac{\hat{d}v}{d\bar{z}} \Delta \bar{z} \right) + o(\Delta z)}{\Delta z} \rightarrow \\ &\rightarrow p(z) \frac{\hat{d}u}{dz} + i \frac{\hat{d}v}{dz} + \left(p(z) \frac{\hat{d}u}{d\bar{z}} + i \frac{\hat{d}v}{d\bar{z}} \right) \frac{\Delta \bar{z}}{\Delta z} = \\ &= p \frac{\hat{d}u}{dz} + i \frac{\hat{d}v}{dz} = \frac{p u_x + v_y}{2} + i \frac{v_x - p u_y}{2} = \\ &= p(u_x - i u_y) = i(v_x - i v_y). \end{aligned}$$

Справедливость утверждения второй части теоремы вытекает из равенства

$$\frac{\hat{a}_p f(z)}{d\bar{z}} = \frac{\rho u_x - v_y}{2} + i \frac{v_x + \rho u_y}{2}.$$

Замечание. В тех случаях, когда $f(z) = u + iv$ — p -аналитическая функция, будем говорить о ее p -производной по z вместо операторной p -производной по z . Это вполне естественно, так как в указанных случаях, в силу доказанной теоремы, операторная p -производная по z (66) представляется в виде предела отношения комплексных приращений (66''). p -производную по z будем обозначать $\frac{d_p f(z)}{dz}$.

Теорема 2. p -производная $\frac{d_p f(z)}{dz}$ p -аналитической функции $f(z) = u + iv$ является обобщенной аналитической функцией четвертого класса с параметрами* $A = \frac{1}{2p} \frac{\hat{a}_p}{dz}$, $B = -\frac{1}{2p} \frac{\hat{a}_p}{dz}$, т. е.

$$\frac{\hat{a}}{d\bar{z}} \frac{d_p f}{dz} = \frac{1}{2p} \frac{\hat{a}_p}{dz} \frac{d_p f}{dz} - \frac{1}{2p} \frac{\hat{a}_p}{dz} \overline{\frac{d_p f}{dz}}. \quad (69)$$

Всякую обобщенную аналитическую функцию $\Phi(z)$ четвертого класса с параметрами $A = \frac{1}{2p} \frac{\hat{a}_p}{dz}$, $B = -\frac{1}{2p} \frac{\hat{a}_p}{dz}$, где p — заданная положительная непрерывно дифференцируемая функция, можно рассматривать как p -производную $\frac{d_p f(z)}{dz}$ некоторой p -аналитической функции $f(z) = u + iv$ с характеристикой p .

В самом деле, учитывая, что

$$\frac{d_p f}{dz} = p \frac{\hat{a}u}{dz} + i \frac{\hat{a}v}{dz}, \quad \frac{d_p f}{d\bar{z}} = p \frac{\hat{a}u}{d\bar{z}} + i \frac{\hat{a}v}{d\bar{z}} = 0,$$

получаем

$$\begin{aligned} \frac{\hat{a}}{d\bar{z}} \frac{d_p f}{dz} &= \frac{\hat{a}_p}{dz} \frac{\hat{a}u}{dz} + p \frac{\hat{a}^2 u}{dz d\bar{z}} + i \frac{\hat{a}^2 v}{dz d\bar{z}} = \frac{\hat{a}_p}{dz} \frac{\hat{a}u}{dz} - \frac{\hat{a}_p}{dz} \frac{\hat{a}u}{d\bar{z}} + \\ &+ \frac{\hat{a}}{dz} \left(p \frac{\hat{a}u}{dz} \right) + \frac{\hat{a}}{dz} \left(i \frac{\hat{a}v}{dz} \right) = \frac{1}{2p} \frac{\hat{a}_p}{dz} \left(p \frac{\hat{a}u}{dz} + i \frac{\hat{a}v}{dz} \right) + \\ &+ \frac{1}{2p} \frac{\hat{a}_p}{d\bar{z}} \left(p \frac{\hat{a}u}{dz} - i \frac{\hat{a}v}{dz} \right) - \frac{1}{2p} \frac{\hat{a}_p}{dz} \left(p \frac{\hat{a}u}{d\bar{z}} - i \frac{\hat{a}v}{d\bar{z}} \right) - \\ &- \frac{1}{2p} \frac{\hat{a}_p}{d\bar{z}} \left(p \frac{\hat{a}u}{d\bar{z}} + i \frac{\hat{a}v}{d\bar{z}} \right), \end{aligned}$$

или

$$\frac{\hat{a}}{d\bar{z}} \frac{d_p f}{dz} = \frac{1}{2p} \frac{\hat{a}_p}{dz} \frac{d_p f}{dz} - \frac{1}{2p} \frac{\hat{a}_p}{dz} \overline{\frac{d_p f}{dz}}.$$

* Предполагается, что характеристика p непрерывно дифференцируема по x и y .

Первая часть теоремы доказана. Полагая $\Phi = p\Phi_1$, из равенств

$$\frac{\hat{d}\Phi}{dz} = \frac{1}{2p} \frac{\hat{d}p}{dz} \Phi - \frac{1}{2p} \frac{\hat{d}p}{dz} \bar{\Phi}, \quad p \frac{\hat{d}\Phi_1}{dz} = -\Phi_1 \frac{\hat{d}p}{dz} + \frac{1}{2} \frac{\hat{d}p}{dz} \Phi - \frac{1}{2} \frac{\hat{d}p}{dz} \bar{\Phi}$$

получаем $\operatorname{Re} \frac{\hat{d}\Phi}{dz} = 0$, $\operatorname{Im} \frac{\hat{d}\Phi_1}{dz} = 0$, и, следовательно, существуют вещественные функции u и v от x и y такие, что

$$\Phi = v_y + iv_x, \quad \Phi_1 = u_x - iu_y.$$

Из равенства $v_y + iv_x = p(u_x - iu_y)$ заключаем, что $f(z) = u + iv$ — p -аналитическая функция с характеристикой p . Из равенств (67) следует, что функция $\Phi = p(u_x - iu_y)$ является p -производной функции $f(z) = u + iv$.

Теорема 3. Если $\frac{dpf}{dz} = p(u_x - iu_y)$ — p -производная p -аналитической функции $f(z) = u + iv$, то ее аффинное преобразование

$$\tilde{f}(z) = \tilde{u} + i\tilde{v} = \frac{1}{p^*} \varphi + i\left(\psi - \frac{q^*}{p^*} \varphi\right), \quad (70)$$

где

$$\varphi = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\sqrt{p}} \cdot \frac{1}{v} \frac{dpf}{dz} \right], \quad \psi = \operatorname{Im} \left[\frac{1}{\sqrt{p}} \cdot \frac{1}{v} \frac{dpf}{dz} \right], \quad (70')$$

$$\sigma^* = p^* + iq^* = \frac{\lambda}{v}, \quad p^* > 0, \quad (70'')$$

λ и v — какие-либо фиксированные решения уравнений

$$\frac{\hat{d}\lambda}{dz} = -\frac{1}{2p} \frac{\hat{d}p}{dz} \bar{\lambda}, \quad \frac{\hat{d}v}{dz} = -\frac{1}{2p} \frac{\hat{d}p}{dz} \bar{v} \quad (70''')$$

такие, что $\operatorname{Re} \frac{\lambda}{v} > 0$, является (p^*, q^*) -аналитической функцией с характеристиками p^* и q^* , определенными равенствами (70''), (70''').

Справедливость этой теоремы следует из теоремы 2 § 2, если учесть, что функция $F(z) = U + iV = \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{dpf}{dz}$, в силу (69), является обобщенной аналитической функцией третьего класса с параметром $\mu = -\frac{1}{2p} \frac{\hat{d}p}{dz}$.

Замечание 1. Если $p = p_1(x) p_2(y)$, где $p_1(x)$ — функция только от x , $p_2(y)$ — функция только от y , то уравнениям (70''') можно удовлетворить, полагая $\lambda = \sqrt{p_2(y)} \frac{1}{\sqrt{p_1(x)}}$, $v = \sqrt{p_1(x)} \frac{1}{\sqrt{p_2(y)}}$, следовательно, в силу (70''), $p^* = p_2(y) \frac{1}{p_1(x)}$, $q^* = 0$ и аффинное

преобразование (70), (70') принимает вид

$$\tilde{f}(z) = \tilde{u} + i\tilde{v} = p_1(x) u_x - ip_2(y) u_y.$$

Замечание 2. Если $p = p_1(\alpha) p_2(\beta)$, где $p_1(\alpha)$ — функция только от α , $p_2(\beta)$ — функция только от β , причем $\omega = \alpha + i\beta$ — аналитическая функция от z , то уравнениям (70''') можно удовлетворить, полагая

$$\lambda = \sqrt{\frac{p_2}{p_1}} \frac{dz}{d\omega}, \quad \nu = \sqrt{\frac{p_1}{p_2}} \frac{dz}{d\omega}.$$

В самом деле, первое из равенств (70''') принимает вид

$$\frac{dz}{d\omega} \frac{\hat{d}}{d\bar{z}} \sqrt{\frac{p_2}{p_1}} = - \frac{\hat{d} \ln \sqrt{p_1 p_2}}{dz} \sqrt{\frac{p_2}{p_1}} \frac{d\bar{z}}{d\omega},$$

или

$$\frac{\hat{d}}{d\omega} \ln \sqrt{\frac{p_2}{p_1}} = - \frac{\hat{d}}{d\omega} \ln \sqrt{p_1 p_2},$$

и, следовательно, выполняется. Второе из равенств (70''') преобразуется к виду

$$\frac{dz}{d\omega} \frac{\hat{d}}{d\bar{z}} \sqrt{\frac{p_1}{p_2}} = \frac{\hat{d} \ln \sqrt{p_1 p_2}}{dz} \sqrt{\frac{p_1}{p_2}} \frac{d\bar{z}}{d\omega},$$

или

$$\frac{\hat{d}}{d\omega} \ln \sqrt{\frac{p_1}{p_2}} = \frac{\hat{d}}{d\omega} \ln \sqrt{p_1 p_2},$$

и, следовательно, удовлетворяется.

Из (70'') в данном случае имеем $p^* = p_2(\beta) \frac{1}{p_1(\alpha)}$, $q^* = 0$. Аффинное преобразование (70) p -производной $\frac{dpf(z)}{dz}$ p -аналитической функции $f(z) = u + iv$ принимает вид

$$\tilde{f}(z) = \tilde{u} + i\tilde{v} = p_1(\alpha) \operatorname{Re} \left[\frac{d\omega}{dz} (u_x - iu_y) \right] + ip_2(\beta) \operatorname{Im} \left[\frac{d\omega}{dz} (u_x - iu_y) \right]$$

и является p^* -аналитической функцией с характеристикой $p^* = p_2(\beta) \frac{1}{p_1(\alpha)}$.

Замечание 3. Если $\ln p$ — гармоническая функция от x и y , то уравнениям (70''') можно удовлетворить, полагая

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{\hat{d} \ln \sqrt{p}}{dz}, \quad \nu = \sqrt{p} \frac{\hat{d} \ln \sqrt{p}}{dz},$$

и, следовательно, в этом случае, в силу (72''), $p^* = \frac{1}{p}$, $q^* = 0$. Аффинное преобразование (70) p -производной $\frac{dpf(z)}{dz}$ принимает

$$\begin{aligned}\tilde{f}(z) = \tilde{u} + i\tilde{v} = p \operatorname{Re} \left[\left(\frac{\hat{d} \ln \sqrt{p}}{dz} \right)^{-1} (u_x - iu_y) \right] + \\ + i \operatorname{Im} \left[\left(\frac{\hat{d} \ln \sqrt{p}}{dz} \right)^{-1} (u_x - iu_y) \right]\end{aligned}$$

и является p^* -аналитической функцией с характеристикой $p^* = \frac{1}{p}$.

Условимся p -интегралом вдоль контура Γ функции $\omega(z) = \alpha + i\beta$ комплексного переменного $z = x + iy$ называть выражение вида

$$\int_{\Gamma} \omega(z) d_p(z) = \operatorname{Re} \int_{\Gamma} \frac{1}{p} \omega dz + i \operatorname{Im} \int_{\Gamma} \omega dz. \quad (71)$$

Теорема 4. p -интеграл p -производной по z p -аналитической функции $f(z)$ не зависит от пути интегрирования, соединяющего какие-либо точки z_0 и z , и выполняется равенство

$$\int_{z_0}^z \frac{d_p f(z)}{dz} d_p z = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \frac{1}{p} \frac{d_p f(z)}{dz} dz + i \operatorname{Im} \int_{z_0}^z \frac{\hat{d}_p f(z)}{dz} dz = f(z) - f(z_0). \quad (71')$$

Справедливость утверждений теоремы непосредственно вытекает из равенств (67). Из равенства (71') видно, что p -интеграл можно рассматривать как левый обратный оператор по отношению к p -производной по z в классе p -аналитических функций.

Теорема 1'. Для того чтобы в классе функций $f(z) = u + iv$, имеющих непрерывные частные производные по x и y , существовал предел

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\sigma \Delta u + i \Delta v}{\Delta z},$$

не зависящий от способа стремления Δz к нулю, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(z) = u + iv$ была (p, q) -аналитической. При выполнении этого условия справедливы равенства

$$\begin{aligned}\frac{\hat{d}_{p,q} f(z)}{dz} &= \frac{pu_x + qu_y + v_y}{2} + i \frac{v_x + qu_x - pu_y}{2} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\sigma \Delta u + i \Delta v}{\Delta z} = \\ &= \sigma \frac{\hat{d}u}{dz} + i \frac{\hat{d}v}{dz} = p(u_x - iu_y) = p \frac{i}{\sigma} (v_x - iv_y). \quad (67')\end{aligned}$$

Для того чтобы функция $f(z) = u + iv$, имеющая непрерывные частные производные по x и y , была (p, q) -аналитической, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\hat{d}_{p,q} f(z)}{dz} = 0. \quad (68')$$

В самом деле, считая, что предел (71'') существует, имеем

$$\sigma \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \sigma \frac{\partial u}{\partial y},$$

или

$$\sigma \frac{\hat{d}u}{dz} + i \frac{\hat{d}v}{dz} = 0.$$

Это означает, что $f(z) = u + iv$ является (p, q) -аналитической функцией. Пусть теперь $f(z) = u + iv$ — (p, q) -аналитическая функция. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\sigma \Delta u + i \Delta v}{\Delta z} &= \frac{\sigma \left(\frac{\hat{d}u}{dz} \Delta z + \frac{\hat{d}u}{d\bar{z}} \Delta \bar{z} \right) + i \left(\frac{\hat{d}v}{dz} \Delta z + \frac{\hat{d}v}{d\bar{z}} \Delta \bar{z} \right) + o(\Delta z)}{\Delta z} \rightarrow \\ &\rightarrow \sigma \frac{\hat{d}u}{dz} + i \frac{\hat{d}v}{dz} = \frac{pu_x + qu_y + v_y}{2} + i \frac{v_x + qu_x - pu_y}{2} = \\ &= p(u_x - iu_y) = 2p \frac{\hat{d}u}{dz} = 2p \frac{i}{\sigma} \frac{\hat{d}v}{dz} = p \frac{i}{\sigma} (v_x - iv_y). \end{aligned}$$

Справедливость второй части теоремы вытекает из равенства

$$\frac{\hat{d}_{p,q} f(z)}{d\bar{z}} = \frac{pu_x - qu_y - v_y}{2} + i \frac{v_x + qu_x + pu_y}{2}.$$

Замечание. В случае (p, q) -аналитических функций вместо операторной (p, q) -производной по z будем говорить о (p, q) -производной по z , которую обозначим через $\frac{d_{p,q} f(z)}{dz}$.

Теорема 2'. (p, q) -производная по z (p, q) -аналитической функции $f(z) = u + iv$ является обобщенной аналитической функцией четвертого класса с параметрами $A = \frac{1}{2p} \frac{\hat{d}\sigma}{dz}$ и $B = -\frac{1}{2p} \frac{\hat{d}\sigma}{dz}$, т. е.

$$\frac{\hat{d}}{d\bar{z}} \frac{d_{p,q} f}{dz} = \frac{1}{2p} \frac{\hat{d}\sigma}{d\bar{z}} \frac{d_{p,q} f}{dz} - \frac{1}{2p} \frac{\hat{d}\sigma}{dz} \overline{\frac{d_{p,q} f}{d\bar{z}}}. \quad (69')$$

Всякую обобщенную аналитическую функцию $\Phi(z)$ четвертого класса с параметрами $A = \frac{1}{2p} \frac{\hat{d}\sigma}{d\bar{z}}$ и $B = -\frac{1}{2p} \frac{\hat{d}\sigma}{dz}$ ($\sigma = p + iq$) можно рассматривать как (p, q) -производную некоторой (p, q) -аналитической функции $f(z) = u + iv$ с данными характеристиками p и q .

В самом деле, учитывая, что

$$\frac{\hat{d}_{p,q} f}{dz} = \sigma \frac{\hat{d}u}{dz} + i \frac{\hat{d}v}{dz}, \quad \frac{d_{p,q} f}{d\bar{z}} = \sigma \frac{\hat{d}u}{d\bar{z}} + i \frac{\hat{d}v}{d\bar{z}} = 0,$$

² Предполагается, что p и q имеют непрерывные частные производные по x и y .

получаем

$$\begin{aligned} \frac{\hat{d}}{dz} \frac{d_{p,q} f}{dz} &= \frac{\hat{d}\sigma}{dz} \frac{\hat{d}u}{dz} + \sigma \frac{\hat{d}^2 u}{dz dz} + i \frac{\hat{d}^2 v}{dz dz} = \frac{\hat{d}\sigma}{dz} \frac{\hat{d}u}{dz} - \frac{\hat{d}\sigma}{dz} \frac{\hat{d}u}{dz} + \\ &+ \frac{\hat{d}}{dz} \left(\sigma \frac{\hat{d}u}{dz} \right) + \frac{\hat{d}}{dz} \left(i \frac{\hat{d}v}{dz} \right) = \frac{1}{2\rho} \frac{\hat{d}\sigma}{dz} (\sigma + \bar{\sigma}) \frac{\hat{d}u}{dz} - \\ &- \frac{1}{2\rho} (\sigma + \bar{\sigma}) \frac{\hat{d}\sigma}{dz} \frac{\hat{d}u}{dz} = \frac{1}{2\rho} \frac{\hat{d}\sigma}{dz} \left(\sigma \frac{\hat{d}u}{dz} + i \frac{\hat{d}v}{dz} \right) + \frac{1}{2\rho} \frac{\hat{d}\sigma}{dz} \left(\bar{\sigma} \frac{\hat{d}u}{dz} - \right. \\ &\quad \left. - i \frac{\hat{d}v}{dz} \right) - \frac{1}{2\rho} \frac{\hat{d}\sigma}{dz} \left(\bar{\sigma} \frac{\hat{d}u}{dz} - i \frac{\hat{d}v}{dz} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{2\rho} \frac{\hat{d}\sigma}{dz} \left(\sigma \frac{\hat{d}u}{dz} + i \frac{\hat{d}v}{dz} \right), \end{aligned}$$

или

$$\frac{\hat{d}}{dz} \frac{d_{p,q} f}{dz} = \frac{1}{2\rho} \frac{\hat{d}\sigma}{dz} \frac{d_{p,q} f}{dz} - \frac{1}{2\rho} \frac{\hat{d}\sigma}{dz} \frac{\overline{d_{p,q} f}}{dz}.$$

Первая часть теоремы доказана. Полагая в уравнении (51) $\Phi = \rho\Psi$, и $\Phi = \frac{\rho}{\sigma} \chi$, где Ψ и χ — некоторые новые неизвестные функции получаем

$$\begin{aligned} \rho \frac{\hat{d}\Psi}{dz} &= -\frac{\hat{d}\rho}{dz} \Psi + \frac{1}{2} \frac{\hat{d}\sigma}{dz} \Psi - \frac{1}{2} \frac{\hat{d}\sigma}{dz} \bar{\Psi}, \\ \frac{\rho}{\sigma} \frac{\hat{d}\chi}{dz} &= \left(-\frac{\hat{d}}{dz} \frac{\rho}{\sigma} + \frac{1}{2} \frac{\hat{d}\sigma}{dz} \frac{1}{\sigma} \right) \chi - \frac{1}{2} \frac{d\sigma}{dz} \frac{1}{\sigma} \chi = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sigma}{\sigma^2} \frac{d\bar{\sigma}}{dz} \chi - \frac{1}{2} \frac{\hat{d}\sigma}{dz} \frac{1}{\sigma} \chi. \end{aligned}$$

Из этих равенств следует, что

$$\operatorname{Im} \frac{\hat{d}}{dz} \Psi = 0, \quad \operatorname{Re} \frac{\hat{d}}{dz} \chi = 0.$$

Поэтому существуют вещественные функции u и v от x и y такие, что

$$\Psi = u_x - iu_y, \quad \chi = i(v_x - iv_y).$$

Из равенств

$$\Phi = \rho\Psi = \frac{\rho}{\sigma} \chi = \rho(u_x - iu_y) = \frac{\rho}{\sigma} i(v_x - iv_y)$$

получаем

$$\rho u_x - \rho u_y - v_y = 0, \quad \rho u_x + \rho u_y + v_x = 0.$$

Это означает, что $f(z) = u + iv$ является (ρ, q) -аналитической функцией с характеристиками ρ и q , а $\Phi = \rho(u_x - iu_y) = \frac{\rho}{\sigma} i(v_x - iv_y)$, в силу (67'), — ее (ρ, q) -производной. Теорема доказана.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3'. Если $\frac{d_{p,q}f}{dz} = p(u_x - iu_y) - (p, q)$ -производная (p, q) -аналитической функции $f(z) = u + iv$, то ее аффинное преобразование

$$\tilde{f}(z) = \tilde{u} + i\tilde{v} = \frac{1}{p^*} \varphi + i \left(\psi - \frac{q^*}{p^*} \varphi \right), \quad (72)$$

где

$$\varphi = \operatorname{Re} \left[t \frac{1}{v} \frac{d_{p,q}f}{dz} \right], \quad \psi = \operatorname{Im} \left[t \frac{1}{v} \frac{d_{p,q}f}{dz} \right], \quad t = e^{-\int \frac{1}{2p} \frac{\hat{d}\sigma}{dz} dz}, \quad (72')$$

$$\sigma^* = p^* + iq^* = \frac{\lambda}{v}, \quad p^* > 0, \quad (72'')$$

λ и v — какие-либо фиксированные решения соответственно уравнений

$$\frac{\hat{d}}{dz} = -\frac{1}{2p} \frac{\hat{d}\sigma}{dz} \frac{t}{i} \bar{\lambda}, \quad \frac{\hat{d}v}{dz} = \frac{1}{2p} \frac{\hat{d}\sigma}{dz} \frac{t}{i} \bar{v} \quad (72''')$$

такие, что $\operatorname{Re} \frac{\lambda}{v} > 0$, является (p^*, q^*) -аналитической функцией с характеристиками p^* и q^* , определенными равенствами (72''), (72''').

В самом деле, из уравнения (69') следует, что функция $F(z) = U + iV = t \frac{d_{p,q}f}{dz}$ является функцией третьего класса с параметром $\mu = -\frac{1}{2p} \frac{d\sigma}{dz} \frac{t}{i}$ ($\sigma = p + iq$). Поэтому, в силу теоремы 2

§ 2 или равенств (63'), (63''), (62), (62'), функция $\tilde{f}(z) = \tilde{u} + i\tilde{v}$, определенная равенствами (72), (72'), является (p^*, q^*) -аналитической с характеристиками p^* и q^* , определенными равенствами (72''), (72''').

Условимся (p, q) -интегралом вдоль контура Γ функции $\omega(z) = \alpha + i\beta$ комплексного переменного $z = x + iy$ называть выражение вида

$$\int_{\Gamma} \omega(z) d_{p,q}z = \operatorname{Re} \int_{\Gamma} \frac{1}{p} \omega dz + i \operatorname{Im} \int_{\Gamma} \frac{\bar{\sigma}}{p} \omega dz. \quad (73)$$

Теорема 4'. (p, q) -интеграл (p, q) -производной по z (p, q) -аналитической функции $f(z)$ не зависит от пути интегрирования, соединяющего какие-либо точки z_0 и z , и выполняется равенство

$$\begin{aligned} \int_{z_0}^z \frac{d_{p,q}f(z)}{dz} d_{p,q}z &= \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \frac{1}{p} \frac{d_{p,q}f(z)}{dz} dz + i \operatorname{Im} \int_{z_0}^z \frac{\bar{\sigma}}{p} \frac{d_{p,q}f(z)}{dz} dz = \\ &= f(z) - f(z_0). \end{aligned} \quad (73')$$

Справедливость утверждений теоремы вытекает непосредственно из равенств (67'). Из равенства (73') видно, что (p, q) -интеграл можно рассматривать в определенном смысле как левый обратный

оператор по отношению к (p, q) -производной по z в классе (p, q) -аналитических функций.

Сопряженными переменными, соответствующими данной характеристике $p = p(x, y) > 0$, будем называть в соответствии с работами [2, 3] дважды непрерывно дифференцируемые функции комплексного переменного

$$Z = X + iY, \quad \bar{Z} = \bar{X} + i\bar{Y},$$

если

$$Z^* = X + i\bar{Y}, \quad -i\bar{Z}^* = Y - i\bar{X} \quad (\bar{Z}^* = \bar{X} + iY)$$

являются p -аналитическими функциями в рассматриваемой области с данной характеристикой $p = p(x, y)$, т. е. если выполняются равенства

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \frac{1}{p} \bar{Y}_y, & X_y &= -\frac{1}{p} \bar{Y}_x, \\ Y_x &= -\frac{1}{p} \bar{X}_y, & Y_y &= \frac{1}{p} \bar{X}_x, \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

или в комплексной форме

$$\left. \begin{aligned} \frac{\hat{d}Z}{dz} &= \frac{1}{p} \frac{\hat{d}\bar{Z}}{dz}, \\ \frac{\hat{d}Z}{d\bar{z}} &= -\frac{1}{p} \frac{\hat{d}\bar{Z}}{d\bar{z}}. \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

Сопряженные переменные в той или иной области D будут сопряженными переменными также во всякой области, содержащейся в данной области D , и в этом смысле они не зависят от области. Отметим, что, как видно из (74) или (75), X и Y являются произвольными p -гармоническими функциями (вещественными частями произвольных p -аналитических функций). Однако после того, как переменная $Z = X + iY$ фиксирована, вторая переменная $\bar{Z} = \bar{X} + i\bar{Y}$ определена с точностью до постоянного слагаемого. Поэтому будем называть $Z = X + iY$ основной, а $\bar{Z} = \bar{X} + i\bar{Y}$ — вспомогательной сопряженными переменными. Переменные $\bar{Z} = X - iY$ и $\bar{\bar{Z}} = X - i\bar{Y}$ будем называть антисопряженными, первую — основной, вторую — вспомогательной.

Интегралом по сопряженным переменным, или, короче, по сопряженной переменной $Z = X + iY$ функции $f(z) = u + iv$ (не обязательно p -аналитической) вдоль контура Γ , будем называть выражение вида

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(z) d_p Z &= \int_{\Gamma} u d\bar{Z} + i v dZ = \int_{\Gamma} u d\bar{X} - v dY + i \int_{\Gamma} v dX + u d\bar{Y} = \\ &= \int_{\Gamma} (pu + iv) \frac{\hat{d}Z}{dz} dz - (pu - iv) \frac{\hat{d}Z}{d\bar{z}} d\bar{z}. \end{aligned} \quad (76)$$

Сопряженными переменными, соответствующими данным характеристикам p и q ($p > 0$), будем называть в соответствии с работами [7, 8, 46] дважды непрерывно дифференцируемые функции комплексного переменного $z = x + iy$

$$Z = X + iY, \quad \bar{Z} = \bar{X} + i\bar{Y},$$

если

$$Z^* = X + i\bar{Y}, \quad -i\bar{Z}^* = Y - i\bar{X} \quad (\bar{Z}^* = \bar{X} + iY)$$

являются $(p, -q)$ -аналитическими функциями в рассматриваемой области с данными характеристиками p и $-q$, т. е. если выполняются равенства

$$\left. \begin{aligned} pX_x + qX_y - \bar{Y}_y &= 0, & -qX_x + pX_y + \bar{Y}_x &= 0, \\ pY_x + qY_y + \bar{X}_y &= 0, & -qY_x + pY_y - \bar{X}_x &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (74')$$

или в комплексной форме

$$\left. \begin{aligned} \sigma \frac{\hat{\partial} Z}{\partial z} - \frac{\hat{\partial} \bar{Z}}{\partial \bar{z}} &= 0, \\ \bar{\sigma} \frac{\hat{\partial} z}{\partial \bar{z}} + \frac{\hat{\partial} \bar{Z}}{\partial \bar{z}} &= 0, \quad \sigma = p + iq. \end{aligned} \right\} \quad (75')$$

Будем называть $Z = X + iY$ также основной, а $\bar{Z} = \bar{X} + i\bar{Y}$ — вспомогательной сопряженными переменными, $\bar{Z} = X - iY$ и $\bar{\bar{Z}} = \bar{X} - i\bar{Y}$ — антисопряженными переменными. Существенно, что X и Y являются $(p, -q)$ -гармоническими функциями, т. е. вещественными частями $(p, -q)$ -аналитических функций, и удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x} (pu_x + qu_y) + \frac{\partial}{\partial y} (pu_y - qu_x) = 0.$$

Из (75), (75') следует, что при конформном преобразовании независимой комплексной переменной $z = x + iy$ сопряженные переменные Z и $\bar{Z}$ остаются сопряженными переменными с соответствующей характеристикой p или соответствующими характеристиками p и q .

Интегралом по сопряженным переменным, или, короче, по сопряженной переменной $Z = X + iY$ функции $f(z) = u + iv$ (не обязательно (p, q) -аналитической) вдоль контура Γ , будем называть выражение вида

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(z) d_p q Z &= \int_{\Gamma} u d\bar{Z} + iv dZ = \\ &= \int_{\Gamma} (\sigma u + iv) \frac{\hat{\partial} Z}{\partial z} dz - (\bar{\sigma} u - iv) \frac{\hat{\partial} \bar{Z}}{\partial \bar{z}} d\bar{z}. \end{aligned} \quad (76')$$

В качестве обобщения теоремы Коши из теории аналитических функций получаются равенства

$$\int_C f(z) d_p Z = 0, \quad (77)$$

$$\int_C f(z) d_{p,q} Z = 0, \quad (77')$$

где C — замкнутый спрямляемый контур, ограничивающий односвязную область D , $f(z)$ — p -аналитическая функция в $D + C$ в случае равенства (77) и $f(z)$ — (p, q) -аналитическая функция в $D + C$ в случае равенства (77'). Для доказательства равенства (77'), а следовательно, и равенства (77) (если считать $q = 0$) достаточно учесть, что

$$\begin{aligned} \int_C f(z) d_{p,q} Z = \int_C (u\tilde{X}_x - vY_x) dx + (u\tilde{X}_y - vY_y) dy + i \int_C (vX_x + \\ + u\tilde{Y}_x) dx + (vX_y + u\tilde{Y}_y) dy, \end{aligned}$$

и к правой части последнего равенства применить формулу Грина, учитывая при этом, что $f(z) = u + iv$ — (p, q) -аналитическая функция, а $Z^* = X + i\tilde{Y}$ и $-i\tilde{Z}^* = Y - i\tilde{X}$ — $(p, -q)$ -аналитические функции.

Заметим, что приведенная обобщенная теорема Коши для (p, q) -аналитических функций остается справедливой, если условие (p, q) -аналитичности $f(z)$ на C заменить условием существования на C ее непрерывных предельных значений изнутри, к которым $f(z)$ стремится равномерно при подходе к C . Доказать это утверждение, если предположить, что контур C кусочно-монотонный, можно простым повторением выкладок, которые приводятся при доказательстве подобного рода утверждения в случае аналитических функций [59].

Будем говорить, что характеристики p и q удовлетворяют условию α , если в окрестности всякой точки $z_0 = x_0 + iy_0$ рассматриваемой области существует решение системы уравнений (55) такое, что

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{z_0} = A, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{z_0} = B,$$

где A и B — произвольно заданные числа.

Теорема 5. Пусть характеристики p и q удовлетворяют условию α , тогда линейный интеграл общего вида

$$\begin{aligned} \int_{z_0}^z (u\tilde{X}_1 - vY_1) dx + (u\tilde{X}_2 - vY_2) dy + i \int_{z_0}^z (u\tilde{Y}_1 + vX_1) dx + \\ + (u\tilde{Y}_2 + vX_2) dy, \end{aligned} \quad (78)$$

где $f(z) = u + iv$ — (p, q) -аналитическая функция, а $X_1, X_2, Y_1, Y_2, \tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2$ — произвольные непрерывно дифференцируемые функции от x, y , не зависит от пути интегрирования Γ , соединяю-

щего точки z_0 и z , в том и только в том случае, когда он совпадает с интегралом по сопряженным переменным (76').

В самом деле, для того чтобы интеграл (78) не зависел от пути интегрирования, соединяющего точки z_0 и z , необходимо и достаточно, чтобы этот интеграл по любому замкнутому контуру C , ограничивающему какую-либо область D , равнялся нулю, или, что то же самое, чтобы

$$\begin{aligned} \iint_D \left[u \left(\frac{\partial \tilde{X}_2}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{X}_1}{\partial y} \right) - v \left(\frac{\partial Y_2}{\partial x} - \frac{\partial Y_1}{\partial y} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \tilde{X}_2 + \frac{\partial v}{\partial y} Y_1 - \right. \\ \left. - \frac{\partial v}{\partial x} Y_2 - \frac{\partial u}{\partial y} \tilde{X}_1 \right] dx dy = 0, \\ \iint_D \left[u \left(\frac{\partial \tilde{Y}_2}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{Y}_1}{\partial y} \right) + v \left(\frac{\partial X_2}{\partial x} - \frac{\partial X_1}{\partial y} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \tilde{Y}_2 - \right. \\ \left. - \frac{\partial v}{\partial y} X_1 - \frac{\partial u}{\partial y} \tilde{Y}_1 + \frac{\partial v}{\partial x} X_2 \right] dx dy = 0. \end{aligned}$$

Отсюда, в силу того что $f(z) = 1$ и $f(z) = i$ — (p, q) -аналитические функции, получаем

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial X}{\partial x}, & X_2 &= \frac{\partial X}{\partial y}, & Y_1 &= \frac{\partial Y}{\partial x}, & Y_2 &= \frac{\partial Y}{\partial y}, \\ \tilde{X}_1 &= \frac{\partial \tilde{X}}{\partial x}, & \tilde{X}_2 &= \frac{\partial \tilde{X}}{\partial y}, & \tilde{Y}_1 &= \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial x}, & \tilde{Y}_2 &= \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (78')$$

где $X, Y, \tilde{X}, \tilde{Y}$ — дважды непрерывно дифференцируемые функции от x и y . В силу условия α

$$\begin{aligned} \tilde{X}_2 + pY_1 + qY_2 &= 0, & -qY_1 + pY_2 - \tilde{X}_1 &= 0, \\ \tilde{Y}_2 - pX_1 - qX_2 &= 0, & qX_1 - \tilde{Y}_1 - pX_2 &= 0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} p \frac{\partial Y}{\partial x} + q \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{X}}{\partial y} &= 0, & -q \frac{\partial Y}{\partial x} + p \frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{X}}{\partial x} &= 0, \\ p \frac{\partial X}{\partial x} + q \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial y} &= 0, & -q \frac{\partial X}{\partial x} + p \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial x} &= 0. \end{aligned}$$

Последние равенства означают, что $-i\tilde{Z}^* = Y - i\tilde{X}$ и $Z^* = X + i\tilde{Y}$ — $(p, -q)$ -аналитические функции. Подставляя (78') в интеграл (78), убеждаемся, что этот интеграл принимает вид

$$\int_{z_0}^z u d\tilde{X} - v dY + i \int_{z_0}^z v dX + u d\tilde{Y} = \int_{z_0}^z u d\tilde{Z} + i v dZ = \int_{z_0}^z f(z) d_{p,q} Z.$$

Следствие 1. Из доказанной теоремы следует, что интеграл по сопряженной переменной $Z = X + iY$

$$\begin{aligned} f^*(z) = u^* + iv^* &= \int_{z_0}^z f(z) d_{p,q}Z = \int_{z_0}^z u d\tilde{Z} + i v dZ = \\ &= \int_{z_0}^z (\sigma u + iv) \frac{\hat{d}Z}{dz} dz - (\bar{\sigma} u - iv) \frac{\hat{d}\bar{Z}}{d\bar{z}} d\bar{z} \end{aligned} \quad (79)$$

является вполне определенной функцией комплексного переменного $z = x + iy$ в области (p, q) -аналитичности функции $f(z) = u + iv$. Например, в случае $p = 1, q = 0$, полагая $Z = z = x + iy$, получаем

$$\int_{z_0}^z f(z) d_{p,q}Z = \int_{z_0}^z f(z) dz.$$

В этом же случае при $Z = x$ ($X = x, Y = 0$)

$$\int_{z_0}^z f(z) d_{p,q}Z = i \operatorname{Im} \int_{z_0}^z f(z) dz.$$

Следствие 2. Из теоремы о сохранении области для (p, q) -аналитических функций (доказательство см. в § 7) следует, что $Z^* = X + i\tilde{Y}$ и $\tilde{Z}^* = \tilde{X} + iY$ при $X \neq \text{const}, Y \neq \text{const}$ преобразуют область в плоскости $z = x + iy$ в область соответственно в плоскости Z^* или $\tilde{Z}^*$. Поэтому (p, q) -аналитическую функцию $f(z) = u + iv$ в равенстве (79) можно рассматривать как функцию от Z^* или от $\tilde{Z}^*$. Применяя формулу Грина к вещественной и мнимой частям интеграла по сопряженным переменным (79), приходим к выводу, что вещественная и мнимая части (p, q) -аналитической функции $f(z) = u + iv$ должны удовлетворять равенствам

$$\frac{\partial u}{\partial X} - \frac{\partial v}{\partial \tilde{Y}} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \tilde{X}} + \frac{\partial u}{\partial Y} = 0.$$

В частности, если положить $X = Y$, то в силу (74) (при $q = 0$) $\tilde{X} = -\tilde{Y}$ и второе из последних равенств совпадает с первым.

Замечание. Из доказанной теоремы следует, что Σ -интеграл, рассмотренный в работах Л. Берса и А. Гельбарта [23—25] и обобщенный в ряде других работ [29—31] в применении к системе уравнений (55), должен всегда совпадать с одним из частных видов интеграла по сопряженным переменным (79).

Теорема 6. Пусть сопряженная переменная $Z = X + iY$, соответствующая характеристикам p и q ($p > 0$), такая, что

$$i \frac{\hat{d}X}{d\bar{z}} \frac{1}{\frac{\hat{d}Y}{dz}} = \sigma^* = p^* + iq^*, \quad p^* \neq 0. \quad (79')$$

Тогда интеграл $f^*(z) = u^* + iv^*$ по сопряженной переменной $Z = X + iY$ (p, q)-аналитической функции $f(z) = u + iv$ с данными характеристиками p и q будет обобщенной аналитической функцией второго класса, и в частности при $p^* > 0$ — (p^*, q^*) -аналитической функцией с характеристиками p^* и q^* , определяющимися равенством (79').

В самом деле, в силу (79)

$$\frac{\hat{d}f^*}{dz} = (\sigma u + iv) \frac{\hat{d}Z}{dz}, \quad \frac{\hat{d}f^*}{d\bar{z}} = -(\bar{\sigma} u - iv) \frac{\hat{d}Z}{d\bar{z}},$$

и, следовательно,

$$\frac{\hat{d}f^*}{d\bar{z}} \frac{\hat{d}Z}{d\bar{z}} + \frac{\hat{d}f^*}{dz} \frac{\hat{d}\bar{Z}}{dz} = 0,$$

или, в соответствии с (55''),

$$(\sigma^* + 1) \frac{\hat{d}f^*}{dz} + (\sigma^* - 1) \frac{\hat{d}f}{d\bar{z}} = 0, \quad \frac{\sigma^* + 1}{\sigma^* - 1} = \frac{\hat{d}Z}{d\bar{z}} \left(\frac{\hat{d}\bar{Z}}{dz} \right)^{-1}.$$

Из последнего равенства получаем

$$\sigma^* = \left(\frac{\hat{d}Z}{d\bar{z}} + \frac{\hat{d}\bar{Z}}{dz} \right) \left(\frac{\hat{d}Z}{d\bar{z}} - \frac{\hat{d}\bar{Z}}{dz} \right)^{-1} = i \frac{\hat{d}X}{d\bar{z}} \frac{1}{\frac{\hat{d}Y}{d\bar{z}}},$$

что совпадает с равенством (79'). Теорема доказана.

Найдем теперь в соответствии с работами [7, 8, 46] необходимые и достаточные условия для того, чтобы интеграл по сопряженным переменным произвольной p -аналитической функции был функцией того же класса, т. е. p -аналитической функцией.

Теорема 7. Для того чтобы интеграл по сопряженной переменной $Z = X + iY$ произвольной p -аналитической функции $f(z) = u + iv$ был p -аналитической функцией, необходимо и достаточно, чтобы

$$-iZ = Y - iX, \quad \tilde{Z} = \tilde{X} + i\tilde{Y}$$

были p -аналитическими функциями.

В самом деле, из (79) находим

$$u_x^* = u \tilde{X}_x - v Y_x, \quad u_y^* = u \tilde{X}_y - v Y_y,$$

$$v_x^* = u \tilde{Y}_x + v X_x, \quad v_y^* = u \tilde{Y}_y + v X_y.$$

Отсюда

$$u_x^* - \frac{1}{p} v_y^* = u \left(\tilde{X}_x - \frac{1}{p} \tilde{Y}_y \right) - v \left(Y_x + \frac{1}{p} X_y \right),$$

$$u_y^* + \frac{1}{p} v_x^* = u \left(\tilde{X}_y + \frac{1}{p} \tilde{Y}_x \right) - v \left(Y_y - \frac{1}{p} X_x \right).$$

Учитывая, что $f(z) = 1$ и $f(z) = i$ — p -аналитические функции, приходим к выводу, что

$$\begin{aligned}\tilde{X}_x &= \frac{1}{p} \tilde{Y}_y, & \tilde{X}_y &= -\frac{1}{p} \tilde{Y}_x, \\ X_x &= pY_y, & X_y &= -pY_x.\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Теорема 7'. Для того чтобы интеграл по сопряженной переменной $Z = X + iY$ произвольной p -аналитической функции $f(z) = u + iv$ был p -аналитической функцией, необходимо и достаточно, чтобы характеристика p была функцией от какой-либо гармонической функции $\alpha = \alpha(x, y)$. Если это условие выполнено, то сопряженные переменные и интеграл по сопряженной переменной Z соответственно имеют вид

$$Z = X + iY = \beta - i \int \frac{d\alpha}{p}, \quad \tilde{Z} = \tilde{X} + i\tilde{Y} = \beta - i \int p d\alpha, \quad (80)$$

$$f^*(z) = u^* + iv^* = \int_{z_0}^z u d\beta + v \frac{d\alpha}{p} + i \int_{z_0}^z v d\beta - i p d\alpha + f^*(z_0), \quad (80')$$

где β — функция⁸ такая, что $\omega = \alpha + i\beta$ — аналитическая функция от $z = x + iy$.

В самом деле, условие p -аналитичности функций

$$Z^* = X + i\tilde{Y}, \quad -i\tilde{Z}^* = Y - i\tilde{X}, \quad \tilde{Z} = \tilde{X} + i\tilde{Y}, \quad -iZ = Y - iX$$

означает, что четыре вещественные функции $X, Y, \tilde{X}, \tilde{Y}$ должны удовлетворять восьми дифференциальным уравнениям

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \frac{1}{p} \tilde{Y}_y, & Y_x &= -\frac{1}{p} \tilde{X}_y, & \tilde{X}_x &= \frac{1}{p} \tilde{Y}_y, & Y_x &= -\frac{1}{p} X_y, \\ (a) & & (б) & & (в) & & (г) \end{aligned} \right\} (81)$$

$$\left. \begin{aligned} X_y &= -\frac{1}{p} \tilde{Y}_x, & Y_y &= \frac{1}{p} \tilde{X}_x, & \tilde{X}_y &= -\frac{1}{p} \tilde{Y}_x, & Y_y &= \frac{1}{p} X_x. \end{aligned} \right\}$$

Из систем (а) и (г) находим

$$d\tilde{Y} = p^2 dY, \quad (81')$$

и, следовательно, $\tilde{Y}$ и p являются функциями только от Y . Из системы (г) получаем

$$\frac{\partial}{\partial x} (pY_x) + \frac{\partial}{\partial y} (pY_y) = 0. \quad (81'')$$

⁸ Здесь гармоническая функция β в силу равенства $\beta = X$ должна быть p -гармонической, а в силу равенства $\beta = \tilde{X} - \frac{1}{p}$ -гармонической. Эти условия оказываются совместными в силу того, что p является функцией только от α .

Полагая

$$pY_x = -\frac{\partial \alpha}{\partial x}, \quad pY_u = -\frac{\partial \alpha}{\partial y}, \quad (81''')$$

из (81'') заключаем, что α является гармонической функцией от x , y , а Y — функцией только от β . Из (81''') и (81') находим

$$Y = -\int \frac{d\alpha}{p}, \quad \tilde{Y} = -\int p d\alpha.$$

Из системы (г) получаем $X = \beta$, из системы (в) находим $\tilde{X} = \beta$. При помощи непосредственной проверки убеждаемся, что найденные функции X , Y , $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ удовлетворяют всем восьми уравнениям (81). Теорема доказана.

Отметим, что ранее, до выхода из печати работ [7, 8, 46], в работе [31] был изучен Σ -интеграл p -аналитических функций и показано, что он является p -аналитической функцией только в том случае, когда характеристика p сама является гармонической функцией от x , y , а не произвольной функцией от какой-либо гармонической функции.

Теорема 8. Для того чтобы интеграл по сопряженным переменным произвольной p -аналитической функции $f(z) = u + iv$ был p' -аналитической функцией, необходимо и достаточно, чтобы

$$\tilde{Z} = \tilde{X} + i\tilde{Y}, \quad -iZ = Y - iX$$

были p' -аналитическими функциями.

Теорема 8'. Для того чтобы интеграл по сопряженной переменной произвольной p -аналитической функции $f(z) = u + iv$ был p' -аналитической функцией, необходимо и достаточно, чтобы существовала аналитическая функция $\omega = \alpha + i\beta$ от z такая, что $\sqrt{\frac{p}{p'}}$ будет функцией только от β , а $\sqrt{pp'}$ — функцией только от α . При выполнении этого условия сопряженные переменные и интеграл по сопряженной переменной Z соответственно будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} Z = X + iY &= \int \sqrt{\frac{p'}{p}} d\beta - i \int \frac{d\alpha}{\sqrt{pp'}}, \\ \tilde{Z} = \tilde{X} + i\tilde{Y} &= \int \sqrt{\frac{p}{p'}} d\beta - i \int \sqrt{pp'} d\alpha, \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

$$\begin{aligned} f^*(z) = u^* + iv^* &= \int_{z_0}^z u \sqrt{\frac{p}{p'}} d\beta + v \frac{d\alpha}{\sqrt{pp'}} + i \int_{z_0}^z v \sqrt{\frac{p'}{p}} d\beta - \\ &- u \sqrt{pp'} d\alpha + f^*(z_0). \end{aligned} \quad (82')$$

В самом деле, условие p -аналитичности $Z^* = X + i\tilde{Y}$, $-i\tilde{Z}^* = Y - i\tilde{X}$ и условие p' -аналитичности $\tilde{Z} = \tilde{X} + i\tilde{Y}$, $-iZ = Y - iX$ эквивалентны системам уравнений (81), если в системах (в)

и (г) вместо p подставлено p' . Из систем (б) и (в) находим

$$d\tilde{Y} = pp'dY.$$

Из систем (б) и (г) получаем $d\tilde{X} = \frac{p}{p'}dX$, и, следовательно, $\tilde{Y}$ и $\sqrt{pp'}$ — функции только от Y , а $\tilde{X}$ и $\sqrt{\frac{p}{p'}}$ — функции только от X .

Из систем (б), (г) и (а), (г) получаем

$$\frac{\partial}{\partial x}(pY_x) + \frac{\partial}{\partial y}(pY_y) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}(p'Y_x) + \frac{\partial}{\partial y}(p'Y_y) = 0, \quad (83)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(pX_x) + \frac{\partial}{\partial y}(pX_y) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{p'}X_x\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{p'}X_y\right) = 0. \quad (84)$$

Складывая равенства (83), а затем равенства (84), получаем уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}(\sqrt{pp'}Y_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\sqrt{pp'}Y_y) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{\frac{p}{p'}}X_x\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{\frac{p}{p'}}X_y\right) = 0.$$

Из этих уравнений заключаем, что $\sqrt{pp'}$ и Y являются функциями от гармонической функции α , а $\sqrt{\frac{p}{p'}}$ и X — функциями от гармонической функции β , причем

$$\sqrt{pp'}dY = -d\alpha, \quad \sqrt{\frac{p}{p'}}dX = d\beta.$$

Таким образом, получаем

$$\left. \begin{aligned} X &= \int \sqrt{\frac{p'}{p}} d\beta, & Y &= -\int \frac{d\alpha}{\sqrt{pp'}}, \\ \tilde{X} &= \int \sqrt{\frac{p}{p'}} d\beta, & \tilde{Y} &= -\int \sqrt{pp'} d\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (84')$$

Подставляя (84') в систему (а), получаем $\alpha_x = \beta_y$, $\alpha_y = -\beta_x$, т. е. $\omega = \alpha + i\beta$ является аналитической функцией от $z = x + iy$. При помощи непосредственной проверки убеждаемся, что найденные четыре функции (84') удовлетворяют всем четырем системам уравнений (81) при условии, что в двух последних системах (в) и (г) вместо p подставлено p' . Теорема доказана. (Например, условия доказанной теоремы будут выполнены, если $p = \lambda(x)\mu(y)$, $p' = \frac{\lambda(x)}{\mu(y)}$,

так как в этом случае $\sqrt{\frac{p}{p'}} = \mu(y)$ и $\sqrt{pp'} = \lambda(x)$, $\lambda(x)$ и $\mu(y)$ — произвольные функции своих аргументов.)

Теорема 9. Для того чтобы интеграл по сопряженным переменным произвольной (p, q) -аналитической функции $f(z) = u + iv$ был (p', q') -аналитической функцией, необходимо и достаточно, чтобы

$$\tilde{Z} = \tilde{X} + i\tilde{Y}, \quad -iZ = Y - iX \quad (85)$$

были (p', q') -аналитическими функциями, и в частности чтобы этот интеграл был (p, q) -аналитической функцией, необходимо и достаточно, чтобы функции (85) были (p, q) -аналитическими функциями.

Доказательство этой теоремы по существу ничем не отличается от доказательств теорем 7 и 8.

Теорема 9'. Для того чтобы интеграл по сопряженным переменным произвольной (p, q) -аналитической функции $f(z) = u + iv$ был (p, q) -аналитической функцией, необходимо и достаточно, чтобы характеристики p и q были функциями от какой-либо гармонической функции $\alpha = \alpha(x, y)$. Если это условие выполнено, то сопряженные переменные и интеграл по сопряженным переменным соответственно имеют вид

$$\left. \begin{aligned} Z = X + iY &= \beta - \int \frac{q}{p} d\alpha - i \int \frac{d\alpha}{p}, \\ \tilde{Z} = \tilde{X} + i\tilde{Y} &= \beta + \int \frac{q}{p} d\alpha - i \int \frac{d\alpha}{p^*}, \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

$$\begin{aligned} f^*(z) = u^* + iv^* &= \int_{z_0}^z u \left(d\beta + \frac{q}{p} d\alpha \right) + v \frac{d\alpha}{p} + i \int_{z_0}^z v \left(d\beta - \frac{q}{p} d\alpha \right) - \\ &- u \frac{d\alpha}{p^*} + f^*(z_0), \end{aligned} \quad (87)$$

где β — гармоническая функция такая, что $\omega = \alpha + i\beta$ является аналитической функцией от z .

В самом деле, условия $(p^*, -q^*)$ -аналитичности $\tilde{Z}^* = \tilde{X} + iY$, $(p, -q)$ -аналитичности $Z^* = X + i\tilde{Y}$ и (p, q) -аналитичности $\tilde{Z} = \tilde{X} + i\tilde{Y}$, $-iZ = Y - iX$ эквивалентны системам восьми уравнений

$$\left. \begin{aligned} p^* \tilde{X}_x + q^* \tilde{X}_y - Y_y &= 0, \\ -q^* \tilde{X}_x + p^* \tilde{X}_y + Y_x &= 0, \\ p \tilde{X}_x - q \tilde{X}_y - \tilde{Y}_y &= 0, \\ q \tilde{X}_x + p \tilde{X}_y + \tilde{Y}_x &= 0, \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & \text{(A)} \\ & \text{(B)} \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} p X_x + q X_y - \tilde{Y}_y &= 0, \\ -q X_x + p X_y + \tilde{Y}_x &= 0, \\ p Y_x - q Y_y + X_y &= 0, \\ q Y_x + p Y_y - X_x &= 0. \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & \text{(Б)} \\ & \text{(Г)} \end{aligned} \quad (88)$$

Из систем (А) и (Б), учитывая, что $p^* = \frac{p}{p^2 + q^2}$, $q^* = \frac{-q}{p^2 + q^2}$, получаем

$$d\tilde{Y} = (p^2 + q^2) dY, \quad (88')$$

и, следовательно, $\tilde{Y}$ и $p^2 + q^2$ являются функциями только от Y . Из системы (Г) и условия $(p, -q)$ -аналитичности $-iZ^* = Y - i\tilde{X}$,

эквивалентного системе (A), получаем уравнения

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (pY_x) + \frac{\partial}{\partial y} (pY_y) + q_y Y_x - q_x Y_y &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} (pY_x) + \frac{\partial}{\partial y} (pY_y) - q_y Y_x + q_x Y_y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (88'')$$

Из них следует, что $q_x Y_y - q_y Y_x = 0$, поэтому q , а также p являются функциями только от Y и уравнения (88'') запишутся в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} (pY_x) + \frac{\partial}{\partial y} (pY_y) = 0,$$

на основании чего можем написать $pdY = -d\alpha$, где α — гармоническая функция от x, y . Отсюда вытекает, что p и Y , а следовательно, и q являются функциями только от α и $Y = -\int \frac{d\alpha}{p}$. Из (88') находим

$$\tilde{Y} = -\int \frac{p^2 + q^2}{p} d\alpha = -\int \frac{d\alpha}{p^*}.$$

Из системы (Г) получаем

$$X_x = -\frac{q}{p} \alpha_x - \alpha_y, \quad X_y = \alpha_x - \frac{q}{p} \alpha_y,$$

и, следовательно,

$$X = \beta - \int \frac{q}{p} d\alpha.$$

Из условия $(p, -q)$ -аналитичности $-i\tilde{Z}^* = Y - i\tilde{X}$, эквивалентного системе (A), находим

$$\tilde{X}_x = q \frac{\alpha_x}{p} - \alpha_y, \quad \tilde{X}_y = q \frac{\alpha_y}{p} + \alpha_x,$$

и, следовательно,

$$\tilde{X} = \beta + \int \frac{q}{p} d\alpha.$$

С помощью проверки убеждаемся, что найденные функции $X, Y, \tilde{X}, \tilde{Y}$ удовлетворяют всем восьми уравнениям (88). Теорема доказана.

Пусть $f^*(z) = u^* + iv^*$ — произвольная функция комплексного переменного $z = x + iy$, имеющая непрерывные частные производные по x и y ; $Z = X + iY$ и $\tilde{Z} = \tilde{X} + i\tilde{Y}$ — сопряженные переменные, соответствующие данной характеристике p . Рассматривая u^* как функцию от $\tilde{Z}^* = \tilde{X} + i\tilde{Y}$ и v^* — как функцию от $Z^* = X + i\tilde{Y}$, условимся выражение вида

$$\frac{\hat{d}_p f^*(z)}{dZ} = \frac{\hat{d}u^*}{d\tilde{Z}^*} + i \frac{\hat{d}v^*}{dZ^*} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^*}{\partial \tilde{X}} + \frac{\partial v^*}{\partial \tilde{Y}} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial v^*}{\partial X} - \frac{\partial u^*}{\partial Y} \right) \quad (89)$$

называть операторной производной (или просто производной) функции $f^*(z) = u^* + iv^*$ по сопряженной переменной $Z = X + iY$. Под операторной производной функции $f^*(z) = u^* + iv^*$ по антисопряженной переменной $\bar{Z} = X - iY$ будем понимать выражение

$$\frac{\hat{d}_p f^*(z)}{d\bar{Z}} = \frac{\hat{d}u^*}{d\bar{Z}^*} + i \frac{\hat{d}v^*}{d\bar{Z}^*} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^*}{\partial \bar{X}} - \frac{\partial v^*}{\partial \bar{Y}} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial v^*}{\partial \bar{X}} + \frac{\partial u^*}{\partial \bar{Y}} \right). \quad (90)$$

Легко заметить, что

$$\frac{\hat{d}_p \bar{f}^*(z)}{d\bar{Z}} = \frac{\overline{\hat{d}_p f^*(z)}}{d\bar{Z}}. \quad (91)$$

Существенным является следующее обстоятельство. Если $f(z) = u + iv$ — p -аналитическая функция, то, как видно из (79),

$$\frac{\hat{d}_p}{dZ} \int_{z_0}^z f(z) d_p Z = f(z), \quad (92)$$

и в этом смысле, т. е. в смысле равенства (92), операторная производная по сопряженной переменной $Z = X + iY$ является левым обратным оператором по отношению к интегралу по сопряженной переменной Z от p -аналитической функции.

Однозначную функцию комплексного переменного $f(z) = u + iv$, определенную в какой-либо области D , будем называть o -интегрируемой (операторно интегрируемой) по сопряженной переменной $Z = X + iY$ в этой области, если существует функция комплексного переменного $f^*(z) = u^* + iv^*$, непрерывная в области D , за исключением, может быть, отдельных точек, такая, что вне указанных отдельных точек в области D $\frac{\hat{d}_p f^*(z)}{d\bar{Z}}$ существует

и выполняется равенство $\frac{\hat{d}_p f^*(z)}{d\bar{Z}} = f(z)$. Всякую такую функцию $f^*(z)$ будем называть o -первообразной (операторной первообразной) функции $f(z)$ по сопряженной переменной $Z = X + iY$, их совокупность — неопределенным o -интегралом (операторным интегралом) функции $f(z)$ по сопряженной переменной Z в области D . Обозначая неопределенный o -интеграл по сопряженной переменной Z функции $f(z) = u + iv$ через $\hat{\int} f(z) d_p Z$, будем называть $f(z) d_p Z$ подынтегральным выражением, а $f(z)$ — подынтегральной функцией. Можно легко убедиться в справедливости равенства

$$\hat{\int} f(z) d_p Z = f^*(z) + C^*(z), \quad (93)$$

где $C^*(z)$ — постоянная неопределенного операторного интеграла по сопряженной переменной Z , представляющая собой любую функцию от z в области D такую, что $\frac{\hat{d}_p C^*(z)}{dZ} = 0$.

Точно таким же способом можно ввести понятие операторной производной $\frac{\hat{d}_{p,q} f^*(z)}{dZ}$ функции $f^*(z) = u^* + iv^*$ по сопряженной переменной $Z = X + iY$, соответствующей характеристикам p и q , и понятие неопределенного операторного интеграла $\hat{\int} f(z) d_{p,q} Z$ функции $f(z)$ по указанной сопряженной переменной Z , соответствующей характеристикам p и q . При этом равенства (89) — (93) остаются неизменными, только всюду вместо $\frac{\hat{d}_p}{dZ}$, $d_p Z$ следует подставить $\frac{\hat{d}_{p,q}}{dZ}$ и $d_{p,q} Z$, а под $Z = X + iY$ и $\tilde{Z} = \tilde{X} + i\tilde{Y}$ понимать сопряженные переменные, соответствующие характеристикам p и q .

Приведем в качестве примеров некоторую конкретизацию введенных здесь понятий применительно к p -аналитическим функциям $f(z) = u + iv$, удовлетворяющим условиям теоремы 7' ($p = p(\alpha)$, α — гармоническая функция от x и y , $\omega = \alpha + i\beta$ — аналитическая функция от $z = x + iy$). В этом случае имеем следующие равенства: для p -производной по $z = x + iy$ в соответствии с (66), (69)

$$\frac{d_p f(z)}{dz} = p(u_x - iu_y) = i(v_x - iv_y),$$

для p -интеграла в соответствии с (73)

$$\int_{z_0}^z \frac{d_p f(z)}{dz} d_p z = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \frac{1}{p} \frac{d_p f(z)}{dz} + i \operatorname{Im} \int_{z_0}^z \frac{d_p f(z)}{dz} dz = f(z) - f(z_0),$$

для интеграла по сопряженной переменной Z в соответствии с (80')

$$f^*(z) = u^* + iv^* = \int_{z_0}^z u d\beta + v \frac{d\alpha}{p} + i \int_{z_0}^z v d\beta - u p d\alpha + f^*(z_0),$$

для операторной производной по сопряженной переменной Z функции $f^*(z) = u^* + iv^*$ (p -аналитической в силу теоремы 7') в соответствии с (89), (90), (80)

$$\frac{\hat{d}_p f^*(z)}{dZ} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^*}{\partial \beta} - \frac{1}{p} \frac{\partial v^*}{\partial \alpha} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial v^*}{\partial \beta} + p \frac{\partial u^*}{\partial \alpha} \right) = \frac{\partial u^*}{\partial \beta} + i \frac{\partial v^*}{\partial \beta}, \quad (94)$$

$$\frac{\hat{d}_p f^*(z)}{dZ} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^*}{\partial \beta} + \frac{1}{p} \frac{\partial v^*}{\partial \alpha} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial v^*}{\partial \beta} - p \frac{\partial u^*}{\partial \alpha} \right) = 0, \quad (94')$$

для неопределенного операторного интеграла по сопряженной переменной Z p -аналитической функции $f(z)$ в соответствии с (93)

$$\hat{\int} f(z) d_p Z = f^*(z) + C^*(z),$$

где $f^*(z)$ — p -аналитическая функция, являющаяся о-первообразной функции $f(z)$ по сопряженной переменной Z , $C^*(z) = v + i\delta$ — любая p -антианалитическая функция, т. е. функция, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{d_p C^*(z)}{dZ} = 0.$$

Из равенства

$$\frac{\hat{d}_p f^*(z)}{dZ} = \frac{\partial u^*}{\partial \beta} + i \frac{\partial v^*}{\partial \beta}$$

следует, что в условиях теоремы 7' операторная производная по сопряженной переменной Z не выводит из класса p -аналитических функций, т. е., как и интеграл по сопряженной переменной Z , переводит p -аналитические функции в p -аналитические.

Пусть теперь $f(z) = u + iv$ — (p, q) -аналитическая функция, удовлетворяющая условиям теоремы 9' ($p = p(\alpha)$, $q = q(\alpha)$), α — гармоническая функция от x и y , $\omega = \alpha + i\beta$ — аналитическая функция от $z = x + iy$. В этом случае имеем следующие равенства: для (p, q) -производной по $z = x + iy$ в соответствии с (66'), (67')

$$\begin{aligned} \frac{d_{p,q} f(z)}{dz} &= \frac{pu_x - qu_y + v_y}{2} + i \frac{vx - qu_x - pu_y}{2} = p(u_x - u_y) = \\ &= p \frac{i}{\sigma} (v_x - iv_y), \end{aligned}$$

для (p, q) -интеграла в соответствии с (73')

$$\begin{aligned} \int_{z_0}^z \frac{d_{p,q} f(z)}{dz} d_{p,q} z &= \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \frac{1}{p} \frac{d_{p,q} f(z)}{dz} dz + \\ &+ i \operatorname{Im} \int_{z_0}^z \frac{\bar{\sigma}}{p} \frac{d_{p,q} f(z)}{dz} dz = f(z) - f(z_0), \end{aligned}$$

для интеграла по сопряженной переменной Z в соответствии с (87)

$$\begin{aligned} f^*(z) = u^* + iv^* &= \int_{z_0}^z u \left(d\beta + \frac{q}{p} d\alpha \right) + v \frac{d\alpha}{p} + i \int_{z_0}^z v \left(d\beta - \frac{q}{p} d\alpha \right) - \\ &- u \frac{d\alpha}{p^*} + f^*(z_0). \end{aligned}$$

Чтобы найти выражение для операторной производной по сопряженной переменной Z , используем равенства (86) и равенство

$$\frac{d_{p,q} f(z)}{dZ} = \frac{\hat{d}u}{d\tilde{Z}^*} + i \frac{\hat{d}v}{d\tilde{Z}^*}.$$

Получаем

$$\frac{\hat{d}u}{d\tilde{Z}^*} = \frac{\hat{d}u}{d\omega} \frac{d\omega}{d\tilde{Z}^*} + \frac{\hat{d}u}{d\bar{\omega}} \frac{\hat{d}\bar{\omega}}{d\tilde{Z}^*}.$$

В соответствии с формулой (6''') § 1

$$\frac{\hat{d}\bar{\omega}}{d\tilde{Z}^*} = \frac{1}{I} \frac{\hat{d}\tilde{Z}^*}{d\omega}, \quad I = \tilde{X}_\alpha Y_\beta - \tilde{X}_\beta Y_\alpha = \frac{1}{\rho},$$

$$\frac{\hat{d}\bar{\omega}}{d\tilde{Z}^*} = -\frac{1}{I} \frac{\hat{d}\tilde{Z}^*}{d\bar{\omega}}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{\hat{d}u}{d\tilde{Z}^*} &= \frac{1}{I} \frac{\hat{d}u}{d\omega} \frac{\hat{d}\tilde{Z}^*}{d\omega} - \frac{1}{I} \frac{\hat{d}u}{d\bar{\omega}} \frac{\hat{d}\tilde{Z}^*}{d\bar{\omega}} = \frac{1}{I} \frac{\hat{d}u}{d\omega} \frac{1}{2} \left(\frac{q}{\rho} + i \left(\frac{1}{\rho} + 1 \right) \right) - \\ &- \frac{1}{I} \frac{\hat{d}u}{d\bar{\omega}} \frac{1}{2} \left(\frac{q}{\rho} + i \left(\frac{1}{\rho} - 1 \right) \right) = \frac{1}{4I} \left[(u_\alpha - i u_\beta) \left(\frac{q}{\rho} + i \left(\frac{1}{\rho} + 1 \right) \right) - \right. \\ &- (u_\alpha + i u_\beta) \left(\frac{q}{\rho} + i \left(\frac{1}{\rho} - 1 \right) \right) \left. \right] = \frac{1}{4I} \left[\frac{2}{\rho} u_\beta + i \left(2u_\alpha - \frac{2q}{\rho} u_\beta \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} [u_\beta + i(\rho u_\alpha - q u_\beta)]. \end{aligned}$$

Далее, находим

$$\frac{\hat{d}v}{d\tilde{Z}^*} = \frac{\hat{d}v}{d\omega} \frac{\hat{d}\omega}{d\tilde{Z}^*} + \frac{\hat{d}v}{d\bar{\omega}} \frac{\hat{d}\bar{\omega}}{d\tilde{Z}^*} = \frac{1}{I_1} \left[\frac{\hat{d}v}{d\omega} \frac{\hat{d}\tilde{Z}^*}{d\omega} - \frac{\hat{d}v}{d\bar{\omega}} \frac{\hat{d}\tilde{Z}^*}{d\bar{\omega}} \right],$$

$$I_1 = X_\alpha \tilde{Y}_\beta - X_\beta \tilde{Y}_\alpha = \frac{1}{\rho^*},$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\hat{d}v}{d\tilde{Z}^*} &= \frac{1}{4I_1} \left[(v_\alpha - i v_\beta) \left(-\frac{q}{\rho} + i \left(\frac{1}{\rho^*} + 1 \right) \right) - (v_\alpha + i v_\beta) \times \right. \\ &\times \left. \left(-\frac{q}{\rho} - i \left(-\frac{1}{\rho^*} + 1 \right) \right) \right] = \frac{1}{4I_1} \left[\frac{2}{\rho^*} v_\beta + i \left(\frac{2q}{\rho} v_\beta + 2v_\alpha \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} [v_\beta + i(-q^* v_\beta + \rho^* v_\alpha)]. \end{aligned}$$

В результате получаем

$$\frac{\hat{d}_{p,q}f}{dZ} = \frac{q^*v_\beta - p^*v_\alpha + u_\beta}{2} + i \frac{-qu_\beta + pu_\alpha + v_\beta}{2}, \quad (95)$$

$$\frac{\hat{d}_{p,q}f}{d\bar{Z}} = \frac{\overline{\hat{d}_{p,q}f}}{d\bar{Z}} = \frac{-q^*v_\beta + p^*v_\alpha + u_\beta}{2} + i \frac{qu_\beta - pu_\alpha + v_\beta}{2}, \quad (95')$$

и в частности, если $f(z) = u + iv$ — (p, q) -аналитическая функция,

$$\frac{d_{p,q}f}{dZ} = \frac{\partial u}{\partial \beta} + i \frac{\partial v}{\partial \beta}, \quad \frac{\hat{d}_{p,q}f}{dZ} = 0. \quad (95'')$$

Для неопределенного операторного интеграла по сопряженной переменной Z при условиях теоремы 9' можно записать равенство

$$\hat{\int} f(z) d_{p,q}Z = f^*(z) + C^*(z), \quad (93')$$

где $f^*(z)$ — одна из o -первообразных (p, q) -аналитической функции $f(z)$ по сопряженной переменной Z , $C^*(z) = \gamma + i\delta$ — постоянная операторного интегрирования по сопряженной переменной Z , представляющая собой любую функцию, сопряженную с (p, q) -аналитической, т. е. в силу (95)

$$\frac{\hat{d}_{p,q}C^*(z)}{dZ} = \frac{q^*\delta_\beta - p^*\delta_\alpha + \gamma_\beta}{2} + i \frac{-q\gamma_\beta + p\gamma_\alpha + \delta_\beta}{2} = 0.$$

Из равенства

$$\frac{\hat{d}_{p,q}f(z)}{dZ} = \frac{\partial u}{\partial \beta} + i \frac{\partial v}{\partial \beta}$$

и рассмотренных выше (см. § 2) преобразований системы уравнений (55) в систему

$$pu_\alpha - qu_\beta - v_\beta = 0, \quad qu_\alpha + pu_\beta + v_\alpha = 0$$

следует, что при выполнении условий теоремы 9' ($p = p(\alpha)$, $q = q(\alpha)$, α — гармоническая функция от x и y , $\omega = \alpha + i\beta$ — аналитическая функция от $z = x + iy$) операторная производная по сопряженной переменной Z не выводит из класса (p, q) -аналитических функций, т. е., как и интеграл по сопряженной переменной Z , переводит (p, q) -аналитические функции в (p, q) -аналитические.

Условимся в дальнейшем p -аналитические функции, удовлетворяющие условиям теоремы 7', т. е. когда p — функция от гармонической функции $\alpha = \alpha(x, y)$, называть инвариантным классом p -аналитических функций. Дело в том, что функции этого класса при операторном дифференцировании и интегрировании по сопряженной переменной Z переходят в функции этого же класса, т. е. в p -аналитические функции с той же характеристикой p . Точно так же (p, q) -аналитические функции, удовлетворяющие условиям теоремы 9' ($p = p(\alpha)$, $q = q(\alpha)$, $\omega = \omega(z) = \alpha + i\beta$ — аналитическая функция от $z = x + iy$), будем называть инвариантным

классом (p, q) -аналитических функций. В силу указанного свойства инвариантных классов p -аналитических и (p, q) -аналитических функций представляется возможным рассматривать в этих классах дифференциальные уравнения с операторными производными по сопряженной переменной Z , соответствующей данной характеристике p или данным характеристикам p и q , а также строить элементарные p -аналитические и (p, q) -аналитические функции точно так же, как это делается в теории аналитических функций, без каких-либо существенных изменений. В частности, интегрируя n раз по сопряженной переменной Z , соответствующей характеристике p , в пределах от z_0 до z постоянные $P_0 = 1$, $Q_0 = i$ и умножая на $n!$, получаем p -аналитические функции $P_n(z, z_0)$ и $Q_n(z, z_0)$, аналогичные степенным аналитическим функциям $(\omega(z) - \omega(z_0))^n$ и $i(\omega(z) - \omega(z_0))^n$. Например, при $p = x^3$ в соответствии с (80')

$$\int_{z_0}^z f(z) d_p Z = \int_{z_0}^z u dy + v \frac{dx}{x^3} + i \int_{z_0}^z v dy - u x^3 dx,$$

$$\omega = \alpha + i\beta = x + iy,$$

положив $P_0(z, 0) = 1$, $Q_0(z, 0) = i$, находим

$$P_1(z, 0) = \int_0^z dy - i \int_0^z x^3 dx = y - i \frac{x^4}{4},$$

$$Q_1(z, 0) = \int_0^z x^{-3} dx + i \int_0^z dy = -\frac{1}{2x^2} + iy.$$

Точно так же находим

$$P_2(z, 0) = -y^2 + \frac{x^2}{4} + i \frac{x^4 y}{2},$$

$$Q_2(z, 0) = \frac{y}{x^2} - i \left(y^2 + \frac{x^2}{2} \right),$$

$$P_3(z, 0) = y^3 - \frac{3}{4} x^2 y - i \left(\frac{3}{4} x^4 y^2 - \frac{x^6}{8} \right),$$

$$Q_3(z, 0) = -\frac{3}{2} \frac{y^2}{x^2} + \frac{3}{2} \ln x + i \left(y^3 + \frac{3}{2} x^2 y \right),$$

$$P_4(z, 0) = -y^4 + \frac{3}{2} x^2 y^2 - \frac{x^4}{8} - i \left(-x^4 y^3 + \frac{x^6 y}{2} \right),$$

$$Q_4(z, 0) = 2 \frac{y^3}{x^2} - 6y \ln x - i \left(\frac{4}{3} y^4 + 3x^2 y^2 + \frac{3}{2} x^4 \ln x - \frac{3}{8} x^4 \right)$$

и т. д.

Подобного рода формальные степени для случая системы уравнений (46'') § 2 при $\sigma_1(x) = \sigma_2(x) = 1$, эквивалентной системе

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{p} \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{p} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad p = \sqrt{\frac{1}{\tau_1(y) \tau_2(y)}},$$

были построены ранее другим способом при помощи Σ -интегрирования [23—25]. Для некоторых случаев указанной системы также изучен вопрос о разложении произвольных функций, определенных данной системой, в ряды, аналогичные степенным рядам [23—25, 28].

При построении элементарных p -аналитических функций, аналогичных элементарным аналитическим функциям от $\omega = \alpha + i\beta$, естественно, можно исходить из соответствующих обыкновенных дифференциальных уравнений, заменяя в них каждый раз обыкновенную производную по $-i\omega$ операторной производной по сопряженной переменной $Z = X + iY$, определенной равенствами (94). Так, p -аналитическую показательную функцию $e^{-i\omega}$ можно определить как решение дифференциального уравнения

$$\frac{\hat{d}_p f}{dZ} = f, \quad f|_{z=0} = 1;$$

p -аналитические тригонометрические функции $'\cos(-i\omega)$ и $'\sin(-i\omega)$ — как решения соответственно уравнений

$$\frac{\hat{d}_p^2 f}{dZ^2} + f = 0, \quad f|_{z=0} = 1, \quad \frac{\hat{d}_p f}{dZ} \Big|_{z=0} = 0,$$

$$\frac{\hat{d}_p^2 f}{dZ^2} + f = 0, \quad f|_{z=0} = 0, \quad \frac{\hat{d}_p f}{dZ} \Big|_{z=0} = 1;$$

p -аналитический полином n -й степени — как решение дифференциального уравнения $(n+1)$ -го порядка

$$\frac{\hat{d}_p^{n+1} f}{dZ^{n+1}} = 0.$$

Нетрудно заметить, что последний полином n -й степени представляет собой линейную комбинацию с произвольными вещественными коэффициентами формальных степеней $P_k(z, z_0)$, $Q_k(z, z_0)$, где $k = 0, 1, \dots, n$.

Указанным способом можно построить p -аналитические аналоги элементарных аналитических функций, которые удовлетворяют линейным обыкновенным дифференциальным уравнениям с постоянными вещественными коэффициентами.

Все сказанное об инвариантном классе p -аналитических функций относится также к инвариантному классу (p, q) -аналитических функций, следует только в последнем случае вместо операторной производной по $Z = X + iY$ (94) везде подставить операторную производную по сопряженной переменной $\bar{Z}$, определенную равенствами (95).

Покажем теперь некоторые применения интегрирования по сопряженной переменной (80) и операторного дифференцирования по сопряженной переменной $\bar{Z}$ (89) к уравнениям в частных производных.

Пусть M — класс всевозможных функций $f^*(z) = u^* + iv^*$, вещественная и мнимая части которых непрерывно дифференцируемы по x и y достаточное число раз. Тогда решение дифференциального уравнения $\frac{\hat{d}_p f^*}{dZ} = 0$ в классе M , в силу (94), имеет вид $f^* = \bar{f}(z)$, где $f(z)$ — произвольная p -аналитическая функция, $\bar{f}(z)$ — функция, комплексно-сопряженная с $f(z)$. С помощью непосредственной проверки, учитывая, что в силу (89), (80)

$$\frac{\hat{d}_p f^*}{dZ} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^*}{\partial \beta} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial v^*}{\partial \alpha} \right) + i \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v^*}{\partial \beta} + \rho \frac{\partial u^*}{\partial \alpha} \right),$$

можно убедиться, что решение уравнения

$$\frac{\hat{d}_p f^*}{dZ} = \bar{f}(z),$$

где $f(z)$ — произвольная p -аналитическая функция, в классе M имеет вид

$$f^*(z) = \hat{\int} \bar{f}(z) d_p Z = 2\beta \bar{f}(z) + \bar{f}_1(z), \quad (95''')$$

где $f_1(z)$ — произвольная p -аналитическая функция. Решение уравнения второго порядка

$$\frac{\hat{d}_p^2 f^*}{dZ^2} = 0$$

в классе M имеет вид

$$f^* = 2\beta \bar{f}(z) + \bar{f}_1(z),$$

где $f(z)$ и $f_1(z)$ — произвольные p -аналитические функции.

Пусть, далее, например, требуется найти общее решение уравнений четвертого порядка

$$\Delta_1 \Delta_1 u^* = 0, \quad \Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha}, \quad (96)$$

$$\Delta_2 \Delta_2 v^* = 0, \quad \Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha}. \quad (96')$$

Замечая, что если $f^* = u^* + iv$, то

$$\frac{\hat{d}_p^2 f^*}{dZ d\bar{Z}} = \frac{1}{4} (\Delta_1 v^* + i \Delta_2 v^*),$$

$$\frac{\hat{d}_p^4 f^*}{dZ^2 d\bar{Z}^2} = \frac{1}{16} (\Delta_1 \Delta_1 u^* + i \Delta_2 \Delta_2 v^*),$$

уравнения (96) и (96') можно записать в виде

$$\frac{\hat{d}_p^4 f^*}{dZ^2 d\bar{Z}^2} = 0. \quad (97)$$

Отсюда при помощи неопределенного операторного интеграла по сопряженной переменной $Z = X + iY$ получаем

$$\frac{\hat{d}^3 f^*}{dZ d\bar{Z}^2} = \bar{f}(z),$$

или

$$\frac{\hat{d}^3 \bar{f}^*}{d\bar{Z}^2 dZ} = f(z),$$

где $f(z)$ — произвольная p -аналитическая функция. Из последнего равенства находим

$$\frac{\hat{d}^2 \bar{f}^*}{dZ d\bar{Z}} = \hat{\int} f(z) d_p Z + \bar{f}_2(z) = f_1(z) + \bar{f}_2(z),$$

где $f_1(z)$ и $f_2(z)$ — произвольные p -аналитические функции. Таким образом,

$$\frac{d_p \bar{f}^*}{d\bar{Z}} = \hat{\int} f_1(z) d_p Z + \hat{\int} \bar{f}_2(z) d_p Z = f_3(z) + 2\beta \bar{f}_2(z) + \bar{f}_4(z),$$

где $f_2(z)$, $f_3(z)$ и $f_4(z)$ — произвольные p -аналитические функции. Из последнего равенства находим

$$f^*(z) = \hat{\int} \bar{f}_2(z) d_p Z + \hat{\int} 2\beta f_2(z) d_p Z + f_4(z) + \bar{f}_5(z),$$

где $f_4(z)$, $f_5(z)$ — произвольные p -аналитические функции. Но с помощью непосредственного дифференцирования можно проверить, что

$$\hat{\int} 2\beta f_2(z) d_p Z = \hat{\int} f_2(z) d_p Z + 2\beta f_2(z),$$

поэтому

$$f^*(z) = 2\beta \bar{f}_2(z) + 2\beta f_2(z) + f_4(z) + \hat{\int} f_2(z) d_p Z,$$

или

$$f^*(z) = 2\beta [f_1(z) + \bar{f}_1(z)] + f_3(z) + \bar{f}_4(z), \quad (97')$$

где $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_3(z)$, $f_4(z)$ — произвольные p -аналитические функции. Равенство (97') представляет собой общее решение в классе функций M уравнения (97). В частности, общие решения уравнений (96) и (96') соответственно запишутся в виде

$$u^* = 2\beta [f_1(z) + \bar{f}_1(z)] + f_2(z) + \bar{f}_2(z),$$

$$iv^* = 2\beta [f_1(z) - \bar{f}_1(z)] + f_2(z) - \bar{f}_2(z),$$

где $f_1(z)$ и $f_2(z)$ — произвольные p -аналитические функции. Последние формулы можно рассматривать как обобщение известной формулы Гурса для бигармонических функций двух переменных. Аналогичные формулы можно получить для полигармонических уравнений в смысле операторов Δ_1 и Δ_2 , т. е. для уравнений вида $\Delta_1^n u^* = 0$, $\Delta_2^n v^* = 0$, где Δ_1^n и Δ_2^n — n раз повторенные операторы Δ_1 и Δ_2 . Последнее обстоятельство важно в том отношении, что

позволяет сводить решение вполне определенных задач для уравнений четвертого порядка и порядка $2n$ к решению соответствующих краевых задач для p -аналитических функций или для уравнений второго порядка.

Приведем в заключение для некоторых частных инвариантных классов p -аналитических функций, весьма часто встречающихся в приложениях, явные выражения соответствующих сопряженных переменных.

1. Если $p = \alpha(x, y)$ — гармоническая функция от x и y , то в соответствии с (80)

$$Z = X + iY = \beta + i \ln \alpha, \quad \tilde{Z} = \tilde{X} + i\tilde{Y} = \beta + i \frac{\alpha^2}{2}, \quad (98)$$

где $\omega = \alpha + i\beta$ — аналитическая функция от $z = x + iy$.

2. Если p — функция только от x , то

$$Z = y - i \int \frac{dx}{p(x)}, \quad \tilde{Z} = y - i \int p(x) dx, \quad \omega = x + iy. \quad (99)$$

3. Если p — функция только от y , то

$$Z = -x - i \int \frac{dy}{p(y)}, \quad \tilde{Z} = -x - i \int p(y) dy, \quad \omega = y - ix. \quad (100)$$

§ 4. ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛЫ КОШИ И ИНТЕГРАЛА ТИПА КОШИ НА СЛУЧАЙ p -АНАЛИТИЧЕСКИХ И (p, q) -АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В соответствии с работами [2, 3, 7, 8, 46] покажем, что для p -аналитических и (p, q) -аналитических функций комплексного переменного справедливы формулы, аналогичные формуле Коши для аналитических функций. Для краткости будем рассматривать (p, q) -аналитические функции, так как p -аналитические функции соответствуют случаю $q = 0$.

Пусть D — односвязная область в плоскости $z = x + iy$, C — ограничивающий ее спрямляемый контур, $f(z) = u + iv$ — функция, имеющая непрерывные частные производные по x и y в замкнутой области $D + C$, $Z = X + iY$ и $\tilde{Z} = \tilde{X} + i\tilde{Y}$ — соответствующие данным характеристикам p и q сопряженные переменные в какой-либо области, содержащей $D + C$. Рассмотрим интеграл по сопряженной переменной $Z = X + iY$ вдоль контура C

$$\begin{aligned} \int_C f(z) d_{p,q} Z &= \int_C u d\tilde{Z} + i v dZ = \int_C u d\tilde{X} - v dY + i \int_C v dX + u d\tilde{Y} = \\ &= \int_C (u \tilde{X}_x - v Y_x) dx + (u \tilde{X}_y - v Y_y) dy + i \int_C (v X_x + u \tilde{Y}_x) dx + \\ &\quad + (v X_y - u \tilde{Y}_y) dy. \end{aligned} \quad (101)$$

Применяя к вещественной и мнимой частям этого интеграла формулу Грина, получаем

$$\begin{aligned} \int_C f(z) d_{p,q}Z &= \int_C u d\tilde{Z} + i v dZ = \\ &= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} (u\tilde{X}_y - vY_y) - \frac{\partial}{\partial y} (u\tilde{X}_x - vY_x) \right] dx dy + \\ &+ i \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} (vX_y + u\tilde{Y}_y) - \frac{\partial}{\partial y} (vX_x + u\tilde{Y}_x) \right] dx dy, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \int_C u d\tilde{Z} + i v dZ &= \iint_D [u_x \tilde{X}_y - v_x Y_y - u_y \tilde{X}_x + v_y Y_x] dx dy + \\ &+ i \iint_D [v_x X_y + u_x \tilde{Y}_y - v_y X_x - u_y \tilde{Y}_x] dx dy. \end{aligned}$$

Учитывая, что $Z^* = X + i\tilde{Y}$ и $-i\tilde{Z}^* = Y - i\tilde{X}$ — (p, q) -аналитические функции (см. (74')), получаем

$$\begin{aligned} \int_C u d\tilde{Z} + i v dZ &= \iint_D [u_x (-pY_x - qY_y) - v_x Y_y - u_y (-qY_x + pY_y) + \\ &+ v_y Y_x] dx dy + i \iint_D [v_x X_y + u_x (pX_x + qX_y) - v_y X_x - \\ &- u_y (qX_x - pX_y)] dx dy = \iint_D [Y_x (-pu_x + qu_y + v_y) + \\ &+ Y_y (-pu_y - qu_x - v_x)] dx dy + i \iint_D [X_x (pu_x - qu_y - v_y) + \\ &+ X_y (pu_y + qu_x + v_x)] dx dy. \end{aligned}$$

Таким образом, приходим к интересующей нас формуле преобразования интеграла по сопряженной переменной $Z = X + iY$ вдоль замкнутого спрямляемого контура в двойной интеграл по ограниченной им области

$$\int_C u d\tilde{Z} + i v dZ = 2i \iint_D \left[\frac{pu_x - qu_y - v_y}{2} Z_x + \frac{qu_x + pu_y + v_x}{2} Z_y \right] dx dy, \quad (102)$$

или

$$\int_C u d\tilde{Z} + i v dZ = 2i \iint_D \left[Z_x \operatorname{Re} \frac{\hat{d}_{p,q} f(z)}{dz} + Z_y \operatorname{Im} \frac{\hat{d}_{p,q} f(z)}{dz} \right] dx dy. \quad (102')$$

Пусть $\gamma_1(\xi, z)$, $\gamma_2(\xi, z)$ ($\xi = \xi + i\eta$, $z = x + iy$) — вещественные однозначные функции от $\xi = \xi + i\eta$ в области G , зависящие от параметра $z = x + iy \subset G$, дважды непрерывно

дифференцируемые в G по ξ и η и удовлетворяющие условиям
 а) $\gamma_1(z, z) = 1$ при $z \in G$, б) функция

$$\gamma(\zeta, z) = \gamma_1(\zeta, z) \ln r + \gamma_2(\zeta, z), \quad (103)$$

где $r = |\zeta - z| = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$, при всяком фиксированном значении $z \in G$ по переменным ξ и η в области G вне точки $\zeta = z$ удовлетворяет уравнению

$$L_{\xi, \eta}(u) = \frac{\partial}{\partial \xi}(pu_{\xi}) + \frac{\partial}{\partial \eta}(pu_{\eta}) - \frac{\partial}{\partial \xi}(qu_{\eta}) + \frac{\partial}{\partial \eta}(qu_{\xi}) = 0, \quad (104)$$

т. е. является (p, q) -гармонической функцией от $\zeta = \xi + i\eta$, или, что то же самое, вещественной частью $(p, -q)$ -аналитической функции от ζ . Тогда функция $\gamma(\zeta, z)$ называется фундаментальным решением уравнения (104) для области G [61].

Вопросу существования фундаментального решения линейного эллиптического дифференциального уравнения второго порядка посвящено много работ (например, [62—69]). В применении к уравнению (104), не стремясь ответить на этот вопрос в наиболее общем случае, можем считать, что он решается положительно, если p и q в области G как функции от ξ и η дважды непрерывно дифференцируемы и $p > 0$ [62].

Пусть

$$\Gamma(\zeta, z) = \frac{1}{p(z)} \gamma(\zeta, z) = \frac{\gamma_1(\zeta, z)}{p(z)} \ln r + \frac{\gamma_2(\zeta, z)}{p(z)}, \quad (105)$$

$$\tilde{\Gamma}(\zeta, z) = \frac{1}{p^*(z)} \tilde{\gamma}(\zeta, z) = \frac{1}{p^*(z)} \tilde{\gamma}_1(\zeta, z) \ln r + \frac{1}{p^*(z)} \tilde{\gamma}_2(\zeta, z), \quad (105')$$

где $\tilde{\gamma}(\zeta, z)$ — фундаментальное решение уравнения

$$\tilde{L}_{\xi, \eta}(u) = \frac{\partial}{\partial \xi}(p^*u_{\xi}) + \frac{\partial}{\partial \eta}(p^*u_{\eta}) - \frac{\partial}{\partial \xi}(q^*u_{\eta}) + \frac{\partial}{\partial \eta}(q^*u_{\xi}) = 0, \quad (104')$$

$$p^* + iq^* = \frac{1}{p + iq},$$

для области G . Тогда сопряженными ядрами, соответствующими характеристикам p и q , будем называть выражения

$$\Omega(\zeta, z) = \Gamma(\zeta, z) + iH(\zeta, z), \quad \tilde{\Omega}(\zeta, z) = \tilde{\Gamma}(\zeta, z) + i\tilde{H}(\zeta, z), \quad (106)$$

если они при всяком фиксированном значении $z \in G$, рассматриваемые как функции от $\zeta = \xi + i\eta$ в области G вне точки $\zeta = z$, являются сопряженными переменными. Ядро $\Omega(\zeta, z)$ иногда будем называть основным сопряженным ядром. Характерно, что если $\Omega(\zeta, z)$ и $\tilde{\Omega}(\zeta, z)$ являются сопряженными ядрами для области G , то они являются также сопряженными ядрами для всякой области, содержащейся в G , и в этом смысле не зависят от области.

Установим одно свойство сопряженных ядер. Из их определения следует, что

$$\Omega(\zeta, z) = \Gamma(\zeta, z) + i\tilde{H}(\zeta, z), \quad \tilde{\Omega}^*(\zeta, z) = \tilde{\Gamma}(\zeta, z) + iH(\zeta, z) \quad (107)$$

являются соответственно $(p, -q)$ -аналитической и $(p^*, -q^*)$ -аналитической функциями от $\zeta = \xi + i\eta$ в области G вне точки $\zeta = z$. Это значит, что $\Omega^*(\zeta, z)$ и $\tilde{\Omega}^*(\zeta, z)$ удовлетворяют соответственно системам уравнений

$$p\Gamma_{\xi} + q\Gamma_{\eta} - \tilde{H}_{\eta} = 0, \quad -q\Gamma_{\xi} + p\Gamma_{\eta} + \tilde{H}_{\xi} = 0, \quad (108)$$

$$p^*\tilde{\Gamma}_{\xi} + q^*\tilde{\Gamma}_{\eta} - H_{\eta} = 0, \quad -q^*\tilde{\Gamma}_{\xi} + p^*\tilde{\Gamma}_{\eta} + H_{\xi} = 0. \quad (108')$$

Имеем

$$\begin{aligned} d\tilde{H}(\zeta, z) &= \tilde{H}_{\xi}d\xi + \tilde{H}_{\eta}d\eta = (q\Gamma_{\xi} - p\Gamma_{\eta})d\xi + (p\Gamma_{\xi} + q\Gamma_{\eta})d\eta = \\ &= q(\zeta)d\Gamma + \frac{p(\zeta)}{p(z)} \left\{ -\frac{\partial}{\partial\eta} [\gamma_1 \ln r + \gamma_2] d\xi + \frac{\partial}{\partial\xi} [\gamma_1 \ln r + \gamma_2] d\eta \right\} = \\ &= q(z)d\Gamma + \frac{p(\zeta)}{p(z)} \left[-\frac{\partial}{\partial\eta} \ln r d\xi + \frac{\partial}{\partial\xi} \ln r d\eta \right] - (q(z) - q(\zeta))d\Gamma + \\ &+ \frac{p(\zeta)}{p(z)} \left\{ -\frac{\partial}{\partial\eta} [(\gamma_1 - 1) \ln r + \gamma_2] d\xi + \frac{\partial}{\partial\xi} [(\gamma_1 - 1) \ln r + \gamma_2] d\eta \right\} = \\ &= q(z)d\Gamma + d \operatorname{arctg} \frac{\eta - y}{\xi - x} + \left(\frac{p(\zeta)}{p(z)} - 1 \right) d \operatorname{arctg} \frac{\eta - y}{\xi - x} - \\ &- (q(z) - q(\zeta))d\Gamma + \frac{p(\zeta)}{p(z)} \left\{ -\frac{\partial}{\partial\eta} [(\gamma_1 - 1) \ln r + \gamma_2] d\xi + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial\xi} [(\gamma_1 - 1) \ln r + \gamma_2] d\eta \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом, $\tilde{H}(\zeta, z)$ в окрестности точки $\zeta = z$ можно представить в виде

$$\tilde{H}(\zeta, z) = \operatorname{arctg} \frac{\eta - y}{\xi - x} + \frac{q(z)}{p(z)} \ln r + \tilde{h}(\zeta, z). \quad (109)$$

Здесь $\tilde{h} = (\zeta, z)$ — функция от $\zeta = \xi + i\eta$ такая, что ее частные производные по ξ и η представимы в виде

$$\left. \begin{aligned} \tilde{h}_{\xi}(\zeta, z) &= \tilde{h}_1(\zeta, z) \ln r + \tilde{h}_2(\zeta, z), \\ \tilde{h}_{\eta}(\zeta, z) &= \tilde{h}_1^*(\zeta, z) \ln r + \tilde{h}_2^*(\zeta, z), \end{aligned} \right\} \quad (109')$$

где $\tilde{h}_1(\zeta, z)$ и $\tilde{h}_1^*(\zeta, z)$ — функции от ζ , непрерывные и непрерывно дифференцируемые в области G , $\tilde{h}_2(\zeta, z)$, $\tilde{h}_2^*(\zeta, z)$ — функции от ζ , непрерывные в области G , за исключением точки $\zeta = z$, при

подходе к которой они ограничены. Очевидным является равенство

$$\Gamma(\zeta, z) = \frac{1}{p(z)} \ln r + g(\zeta, z), \quad (110)$$

где $g(\zeta, z)$ — функция от ζ такая, что ее частные производные по ξ и η представимы в виде

$$\left. \begin{aligned} g_{\xi}(\zeta, z) &= g_1(\zeta, z) \ln r + g_2(\zeta, z), \\ g_{\eta}(\zeta, z) &= g_1^*(\zeta, z) \ln r + g_2^*(\zeta, z). \end{aligned} \right\} \quad (110')$$

Здесь $g_1(\zeta, z)$ и $g_1^*(\zeta, z)$ — функции от ζ , непрерывно дифференцируемые в области G , $g_2(\zeta, z)$ и $g_2^*(\zeta, z)$ — функции от ζ , непрерывные в области G , за исключением точки $\zeta = z$, при подходе к которой они ограничены или имеют предельные значения.

Таким образом, интересующее нас свойство сопряженных ядер можно записать в виде равенств

$$\begin{aligned} \Omega(\zeta, z) &= \Gamma(\zeta, z) + iH(\zeta, z) = \frac{1}{p(z)} \ln r + \\ &+ i \left(\arctg \frac{\eta - y}{\xi - x} + \frac{q^*(z)}{p^*(z)} \ln r \right) + g(\zeta, z) + ih(\zeta, z), \end{aligned} \quad (111)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}(\zeta, z) &= \tilde{\Gamma}(\zeta, z) + i\tilde{H}(\zeta, z) = \frac{1}{p^*(z)} \ln r + \\ &+ i \left(\arctg \frac{\eta - y}{\xi - x} + \frac{q(z)}{p(z)} \ln r \right) + \tilde{g}(\zeta, z) + i\tilde{h}(\zeta, z), \end{aligned} \quad (111')$$

где $h(\zeta, z)$, $\tilde{g}(\zeta, z)$ — вещественные функции от ζ , обладающие теми же свойствами, как и $\tilde{h}(\zeta, z)$, $g(\zeta, z)$.

Пусть теперь $z = x + iy$ — точка, лежащая в односвязной области D , ограниченной спрямляемым контуром C , e — достаточно малый круг радиуса ρ с центром в точке $\zeta = z$, γ — окружность $|\zeta - z| = \rho$, $f(\zeta) = u + iv$ — функция от $\zeta = \xi + i\eta$, непрерывно дифференцируемая в $D + C$. Применим формулу (102) к области $D - e$, заменив в ней $z = x + iy$ на $\zeta = \xi + i\eta$ и приняв в качестве сопряженных переменных Z и $\bar{Z}$ сопряженные ядра $\Omega(\zeta, z)$ и $\tilde{\Omega}(\zeta, z)$. Получаем

$$\begin{aligned} &- \int_{\gamma} u(\zeta) d\tilde{\Omega}(\zeta, z) + iv(\zeta) d\Omega(\zeta, z) + \int_C u(\zeta) d\tilde{\Omega}(\zeta, z) + \\ &+ iv(\zeta) d\Omega(\zeta, z) = 2i \iint_{D-e} \left[\frac{p\mu_{\xi} - qu_{\eta} - v_{\eta}}{2} \Omega_{\xi}(\zeta, z) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{qu_{\xi} + p\mu_{\eta} + v_{\xi}}{2} \Omega_{\eta}(\zeta, z) \right] d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Переходим в этом равенстве к пределу $\rho \rightarrow 0$. В силу (111) и (111')

$$\begin{aligned} & -2\pi i u(z) - 2\pi i v(z) + \int_C u(\zeta) d\tilde{\Omega}(\zeta, z) + \\ & + i v(\zeta) d\Omega(\zeta, z) = 2i \iint_D \left[\frac{\rho u_\xi - q u_\eta - v_\eta}{2} \Omega_\xi(\zeta, z) + \right. \\ & \left. + \frac{q u_\xi + \rho u_\eta + v_\xi}{2} \Omega_\eta(\zeta, z) \right] d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Отсюда находим важную формулу интегральных представлений непрерывно дифференцируемых функций комплексного переменного

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C u(\zeta) d\tilde{\Omega}(\zeta, z) + i v(\zeta) d\Omega(\zeta, z) - \\ & - \frac{1}{\pi} \iint_D \left[\frac{\rho u_\xi + q u_\eta - v_\eta}{2} \Omega_\xi(\zeta, z) + \right. \\ & \left. + \frac{-q u_\xi + \rho u_\eta + v_\xi}{2} \Omega_\eta(\zeta, z) \right] d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (112)$$

или

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C u(\zeta) d\tilde{\Omega}(\zeta, z) + i v(\zeta) d\Omega(\zeta, z) - \\ & - \frac{1}{\pi} \iint_D \left[\Omega_\xi(\zeta, z) \operatorname{Re} \frac{\hat{d}_{p,q} f(\zeta)}{d\bar{\zeta}} + \Omega_\eta(\zeta, z) \operatorname{Im} \frac{\hat{d}_{p,q} f(\zeta)}{d\bar{\zeta}} \right] d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (113)$$

Формулы (112) и (113) можно рассматривать как аналоги формулы (9), с которой они совпадают при $\rho = 1$, $q = 0$, $\Omega(\zeta, z) = \tilde{\Omega}(\zeta, z) = \ln(\zeta - z)$. Обозначив правую часть равенства (112) или (113) через $T(f(z))$, можем написать

$$T(f(z)) = \begin{cases} f(z), & \text{если } z \in D, \\ \frac{\alpha}{2\pi} f(z), & \text{если } z \in C, \\ 0, & \text{если } z \notin D + C, \end{cases} \quad (114)$$

где α — внутренний угол между касательными к контуру C , выходящими из точки z , лежащей на C . В самом деле, первое из равенств (114) совпадает с равенством (112), второе и третье доказываются так же, как и первое. В частности, если предположить, что функция $f(z) = u + iv$ в односвязной замкнутой области $D + C$, ограниченной спрямляемым контуром C , (p, q) -аналитическая, то формула (112) принимает вид

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\zeta) d_{p,q} \Omega(\zeta, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C u(\zeta) d\tilde{\Omega}(\zeta, z) + i v(\zeta) d\Omega(\zeta, z). \quad (115)$$

Формулу (115), установленную вначале для p -аналитических функций [1, 2], согласно имеющимся в нашем распоряжении литературным источникам следует считать первым обобщением классической формулы Коши на случай каких-либо систем уравнений вида (49), отличных от условий Коши — Римана. Для (p, q) -аналитических функций эта формула была получена в работах [7, 8, 46]. Другое существенное обобщение формулы Коши получено Л. Берсом [37] и И. Н. Векуа [40] в применении к функциям, определенным системой уравнений (51)⁹.

Обобщенную формулу Коши для (p, q) -аналитических функций (115) можно записать также в виде

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C (\sigma u(\zeta) + i v(\zeta)) \frac{\hat{\partial} \Omega(\zeta, z)}{d\zeta} d\zeta - (\bar{\sigma} u(\zeta) - i v(\zeta)) \frac{\hat{\partial} \bar{\Omega}(\zeta, z)}{d\bar{\zeta}} d\bar{\zeta}. \quad (116)$$

Справедливость этого утверждения следует из того, что $\Omega(\zeta, z)$ и $\bar{\Omega}(\zeta, z)$, как сопряженные переменные по ζ , в соответствии с (75') удовлетворяют уравнениям

$$\sigma \frac{\hat{\partial} \Omega(\zeta, z)}{d\zeta} - \frac{\hat{\partial} \bar{\Omega}(\zeta, z)}{d\bar{\zeta}} = 0, \quad \bar{\sigma} \frac{\hat{\partial} \Omega(\zeta, z)}{d\bar{\zeta}} + \frac{\hat{\partial} \bar{\Omega}(\zeta, z)}{d\zeta} = 0, \quad (117)$$

$$\sigma = p + iq.$$

Важно обратить внимание на следующее обстоятельство. Когда контур C , ограничивающий область D , кусочно-монотонный, обобщенная формула Коши для (p, q) -аналитических функций (115) остается справедливой, если условие (p, q) -аналитичности функций $f(z)$ на контуре C заменить условием существования на C ее непрерывных предельных значений изнутри, к которым она стремится равномерно при подходе к C . Справедливость этого утверждения следует из обобщенной теоремы Коши для (p, q) -аналитических функций (§ 3).

В качестве следствия из обобщенной формулы Коши, соответствующей данным характеристикам p и q (115), непосредственно получаем равенства

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Gamma(\zeta, z)=R} u(\zeta) d\tilde{H}(\zeta, z), \quad (118)$$

$$v(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\tilde{\Gamma}(\zeta, z)=\tilde{R}} v(\zeta) dH(\zeta, z), \quad (119)$$

где R и $\tilde{R}$ — любые положительные числа (может быть, достаточно большие) такие, что замкнутые кривые $-\Gamma(\zeta, z) = R$ и $-\tilde{\Gamma}(\zeta, z) = \tilde{R}$

⁹ Это обобщение формулы Коши отличается от формулы (115) и нельзя сказать, что какое-либо одно из приведенных двух обобщений является частным случаем другого, так как они относятся к различным классам функций [41, стр. 187].

$= \tilde{R}$, охватывающие точку z , лежат в области (p, q) -аналитичности функции $f(z) = u(z) + iv(z)$. Эти равенства следует рассматривать как распространение на (p, q) -аналитические функции известной в теории аналитических функций комплексного переменного теоремы о среднем арифметическом.

Чтобы построить обобщение интеграла Коши и интеграла типа Коши на случай p -аналитических и (p, q) -аналитических функций, введем некоторые специальные понятия.

Функцию $\Gamma(\zeta, z)$, определенную равенством (105), будем называть правильным фундаментальным решением уравнения (104) (условия $(p, -q)$ -гармоничности по ζ) в области G , если она удовлетворяет дополнительному условию: как функция от z в области G при $z \neq \zeta$ является $(p(z), q(z))$ -гармонической функцией и рассматриваемая как функция двух точек $\zeta = \xi + i\eta$ и $z = x + iy$, принадлежащих G , при $\zeta \neq z$ непрерывна вместе с первыми производными по ξ, η, x, y и производными

$$\Gamma_{\xi\xi}(\zeta, z), \Gamma_{\eta\xi}(\zeta, z), \Gamma_{x\eta}(\zeta, z), \Gamma_{y\eta}(\zeta, z). \quad (120)$$

Условимся основное сопряженное ядро, определенное равенством

$$\Omega(\zeta, z) = \Gamma(\zeta, z) + iH(\zeta, z) = \Gamma(\zeta, z) + i \int_{z_0}^z [-p(z) \Gamma_y(\zeta, z) - \\ - q(z) \Gamma_x(\zeta, z)] dx + [p(z) \Gamma_x(\zeta, z) - q(z) \Gamma_y(\zeta, z)] dy, \quad (121)$$

где $\Gamma(\zeta, z)$ — правильное фундаментальное решение уравнения (104) в области G , z_0 — любая фиксированная точка, называть правильным сопряженным ядром в области G . Равенство (121) означает, что правильное сопряженное ядро $\Omega(\zeta, z) = \Gamma(\zeta, z) + iH(\zeta, z)$, как функция от z , является $(p(z), q(z))$ -аналитической функцией в области G при $z \neq \zeta$, т. е. удовлетворяет уравнениям

$$\left. \begin{aligned} p(z) \Gamma_x(\zeta, z) - q(z) \Gamma_y(\zeta, z) - H_y(\zeta, z) &= 0, \\ q(z) \Gamma_x(\zeta, z) + p(z) \Gamma_y(\zeta, z) + H_x(\zeta, z) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (122)$$

или

$$\frac{\hat{d}_{p,q} \Omega(\zeta, z)}{d\bar{z}} = 0. \quad (123)$$

Как функция обеих точек $\zeta = \xi + i\eta$ и $z = x + iy$, принадлежащих G при $\zeta \neq z$, правильное сопряженное ядро, в силу (121), непрерывно вместе со своими первыми производными по ξ, η, x, y и производными $\Omega_{\xi x}(\zeta, z), \Omega_{\xi y}(\zeta, z), \Omega_{\eta x}(\zeta, z)$ и $\Omega_{\eta y}(\zeta, z)$.

Пусть $\Omega(\zeta, z) = \Gamma(\zeta, z) + iH(\zeta, z)$ — правильное сопряженное ядро в области G , $\tilde{\Omega}(\zeta, z) = \bar{\Gamma}(\zeta, z) + i\bar{H}(\zeta, z)$ — вспомогательное сопряженное ядро, определяющееся следующим условием: $\Omega^*(\zeta, z) = \Gamma(\zeta, z) + i\bar{H}(\zeta, z)$ и $-i\tilde{\Omega}^* = H(\zeta, z) - i\bar{\Gamma}(\zeta, z)$,

как функции от ζ , при $\zeta \neq z$ являются $(p(\zeta), -q(\zeta))$ -аналитическими функциями, т. е. в соответствии с (74')

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}(\zeta, z) = & \int_{\zeta_0}^{\zeta} [-q(\zeta) H_{\xi}(\zeta, z) + p(\zeta) H_{\eta}(\zeta, z)] d\xi + \\ & + [-p(\zeta) H_{\xi}(\zeta, z) - q(\zeta) H_{\eta}(\zeta, z)] d\eta, \end{aligned} \quad (124)$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}(\zeta, z) = & \int_{\zeta_0}^{\zeta} [q(\zeta) \Gamma_{\xi}(\zeta, z) - p(\zeta) \Gamma_{\eta}(\zeta, z)] d\xi + \\ & + [-p(\zeta) \Gamma_{\xi}(\zeta, z) + q(\zeta) \Gamma_{\eta}(\zeta, z)] d\eta, \end{aligned} \quad (125)$$

где ζ_0 — какая-либо фиксированная точка. Из (124), (125) видно, что $\tilde{\Omega}(\zeta, z)$, как функция обеих точек $\zeta = \xi + i\eta$ и $z = x + iy$, принадлежащих G , при $\zeta \neq z$ обладает такими же свойствами непрерывности и дифференцируемости, как и $\Omega(\zeta, z)$.

Построенные ядра (121) и (124), (125) будем называть правильными сопряженными ядрами в области G , соответствующими данным характеристикам p и q , соответственно основным и вспомогательным. Характеристики p и q , для которых в области G существуют правильные сопряженные ядра, будем называть регулярными в данной области.

Обобщенным интегралом Коши, соответствующим характеристикам p и q , будем называть правую часть равенства (115) или (116) при условии, что $\Omega(\zeta, z)$ и $\tilde{\Omega}(\zeta, z)$ — правильные сопряженные ядра, соответствующие данным характеристикам p и q в области G , содержащей замкнутую область $D + C$, $f(z) = u + iv$ — любая функция от $z = x + iy$, (p, q) -аналитическая в замкнутой области $D + C$ или (p, q) -аналитическая в D и непрерывная изнутри на контуре C .

Обобщенным интегралом типа Коши, соответствующим характеристикам p и q (характеристике p , если $q = 0$), будем называть выражение

$$\begin{aligned} \Phi(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\zeta) d_{p,q}\Omega(\zeta, z) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} u(\zeta) d\tilde{\Omega}(\zeta, z) + iv d\Omega(\zeta, z), \end{aligned} \quad (126)$$

или

$$\begin{aligned} \Phi(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\zeta) d_{p,q}\Omega(\zeta, z) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\sigma u(\zeta) + iv(\zeta)) \frac{d\tilde{\Omega}(\zeta, z)}{d\bar{\zeta}} d\bar{\zeta} - (\bar{\sigma} u(\zeta) - iv(\zeta)) \frac{d\Omega(\zeta, z)}{d\zeta} d\zeta, \end{aligned} \quad (127)$$

где $\Omega(\zeta, z)$ и $\tilde{\Omega}(\zeta, z)$ — правильные сопряженные ядра в области G , Γ — любой спрямляемый контур (замкнутый или незамкнутый),

лежащий в G , $f(\zeta) = u(\xi, \eta) + iv(\xi, \eta)$ — заданная непрерывная функция длины дуги s контура Γ .

Очевидно, что обобщенный интеграл Коши является частным случаем обобщенного интеграла типа Коши.

Теперь можно сформулировать и доказать основную теорему о построенном обобщенном интеграле типа Коши.

Теорема 1. *Обобщенный интеграл типа Коши (127) всюду в области G определения правильных сопряженных ядер $\Omega(\zeta, z)$ и $\tilde{\Omega}(\zeta, z)$ вне точек контура Γ представляет собой (p, q) -аналитическую функцию от z .*

В самом деле, если γ — замкнутый контур, лежащий в G и допускающий его непрерывную деформацию в точку без пересечения с контуром Γ , то приращение $\Phi(z)$ вдоль γ равно нулю. Далее,

$$\begin{aligned} \frac{\hat{d}_{p,q}\Phi(z)}{d\bar{z}} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\sigma u(\zeta) + iv(\zeta)) \frac{\hat{d}_{p,q}}{d\bar{z}} \frac{\hat{d}\Omega(\zeta, z)}{d\bar{\zeta}} d\zeta - \\ &- (\sigma u(\zeta) - iv(\zeta)) \frac{\hat{d}_{p,q}}{d\bar{z}} \frac{\hat{d}\tilde{\Omega}(\zeta, z)}{d\bar{\zeta}} d\bar{\zeta}, \quad z \notin \Gamma. \end{aligned}$$

Таким образом, в силу (123) $\frac{\hat{d}_{p,q}\Phi(z)}{d\bar{z}} = 0$, а это и означает, что функция $\Phi(z)$ (p, q) -аналитическая.

Пусть Γ — гладкий контур, z_0 — точка, лежащая на Γ , $\Phi^+(z_0)$ и $\Phi^-(z_0)$ — предельные значения обобщенного интеграла типа Коши при подходе к точке z_0 слева и справа, если таковые существуют. $\Phi(z_0)$ — обобщенный интеграл типа Коши в смысле главного значения, т. е.

$$\Phi(z_0) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma - \delta} f(\zeta) d_{p,q}\Omega(\zeta, z_0), \quad (128)$$

где δ — часть контура Γ , лежащая в круге $|z - z_0| < \rho$ (рис. 1). Приведем один простой результат, относящийся к вопросу о предельных значениях обобщенного интеграла типа Коши. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Если подынтегральная функция $f(\zeta) = u + iv$ (плотность) обобщенного интеграла типа Коши является (p, q) -аналитической функцией от ζ в точках контура Γ , то предельные значения обобщенного интеграла типа Коши при подходе к точкам z_0 контура Γ слева $\Phi^+(z_0)$ и справа $\Phi^-(z_0)$ существуют, являются (p, q) -аналитическими функциями от z_0 и выполняются формулы*

$$\Phi^+(z_0) = \frac{f(z_0)}{2} + \Phi(z_0), \quad \Phi^-(z_0) = -\frac{f(z_0)}{2} + \Phi(z_0). \quad (129)$$

В самом деле, заменяя в обобщенном интеграле типа Коши (127) контур Γ контуром, составленным из $\Gamma - \delta$ и части окружности

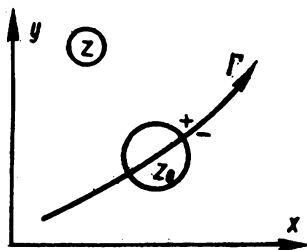


Рис. 1.

$|z - z_0| = \rho$, лежащей справа от Γ (см. рис. 1), приходим к выводу, что $\Phi^+(z_0)$ существует и является (p, q) -аналитической функцией от z_0 . При $\rho \rightarrow 0$ получаем первую из формул (129). Аналогично доказывается справедливость утверждений теоремы, относящихся к $\Phi^-(z_0)$.

В целом поставленный вопрос о построении обобщенного интеграла типа Коши и его предельных значениях сводится к вопросу о построении и свойствах введенных нами правильных сопряженных ядер $\Omega(\zeta, z)$ и $\bar{\Omega}(\zeta, z)$ или, в конечном счете, к вопросу о построении и свойствах правильного фундаментального решения $\Gamma(\zeta, z)$ уравнения (104), определяющего $(p, -q)$ -гармонические функции от $\zeta = \xi + i\eta$.

Не ставя перед собой цель дать решение этого вопроса с исчерпывающей полнотой и общностью, покажем, как можно убедиться в существовании правильного фундаментального решения $\Gamma(\zeta, z)$ и построить правильные сопряженные ядра $\Omega(\zeta, z)$, $\bar{\Omega}(\zeta, z)$ для случая p -аналитических функций.

Функция $-\Gamma(\zeta, z)$, определенная равенством (105), называется функцией Грина первой краевой задачи для уравнения

$$L_{\xi\eta}(u) = \frac{\partial}{\partial \xi}(p(\zeta)u_\xi) + \frac{\partial}{\partial \eta}(p(\zeta)u_\eta) = 0 \quad (104'')$$

в области G , если она, как функция от ζ , при $\zeta \neq z$ в области G удовлетворяет уравнению (104''), а на границе G непрерывна и обращается в нуль.

На основании результатов, полученных в работах [62—70], можно считать установленным существование функций Грина, если характеристика $p(\zeta)$ дважды непрерывно дифференцируема и положительна в области G и на ее границе, представляющей собой некоторый замкнутый контур (например, [61, стр. 70—73]). Известно также, что функция Грина обладает свойством симметрии

$$-\Gamma(\zeta, z) = -\Gamma(z, \zeta) \quad (130)$$

[61, стр. 62] и, следовательно, как функция от z , при $z \neq \zeta$ является дважды непрерывно дифференцируемым по x и y решением уравнения

$$L_{xy}(u) = \frac{\partial}{\partial x}(p(z)u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(p(z)u_y) = 0 \quad (104''')$$

В силу сказанного, функцию Грина в области G со знаком минус естественно принять в качестве правильного фундаментального решения уравнения (104'') для всякой области D , содержащейся в G , и затем, исходя из него, выполнять дальнейшие построения, связанные с обобщенным интегралом типа Коши. Однако сначала следует убедиться в том, что указанная функция Грина со знаком минус как функция обеих точек $\zeta = \xi + i\eta$ и $z = x + iy$, принадлежащих G , при $\zeta \neq z$ непрерывна вместе со своими производными первого порядка по ξ, η, x, y и производными (117). Для этого за-

метим, что уравнение (104'') в силу тождества

$$\frac{L_{xy} \left(u \frac{1}{\sqrt{r}} \right)}{\sqrt{r}} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{r} u_x \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p}{r} u_y \right) + u \frac{L_{xy} \left(\frac{1}{\sqrt{r}} \right)}{\sqrt{r}}, \quad (131)$$

где L_{xy} — оператор левой части равенства (104'''), r — положительная функция от x и y , можно записать в виде

$$\frac{1}{\sqrt{p(\zeta)}} L_{\xi\eta} (u) = \Delta_{\xi\eta} (u \sqrt{p(\zeta)}) - ku = 0,$$

где $k = k(\zeta) = \Delta_{\xi\eta} \sqrt{p(\zeta)}$, $\Delta_{\xi\eta} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$. Поэтому, если точка $\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1$ принадлежит кругу e : $|\zeta - \zeta_0| < \rho$, то

$$\begin{aligned} \sqrt{p(\zeta_1)} u(\zeta_1) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \sqrt{p(\zeta)} u(\zeta) \frac{\partial G(\zeta, \zeta_1)}{\partial n} ds - \\ &- \frac{1}{2\pi} \iint_e k(\zeta) u(\zeta) G(\zeta, \zeta_1) d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (132)$$

где $\frac{\partial G}{\partial n}$ — производная по внутренней нормали к границе γ круга e , ds — элемент длины дуги окружности γ в точке ζ , $G(\zeta, \zeta_1)$ — функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа для круга e

$$G(\zeta, \zeta_1) = \ln \left| \frac{\rho^2 - (\zeta - \zeta_0)(\overline{\zeta_1} - \overline{\zeta_0})}{\rho(\zeta - \zeta_1)} \right|. \quad (132')$$

На основании (132)

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{p(\zeta_1)} \Gamma(\zeta_1, z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \sqrt{p(\zeta)} \Gamma(\zeta, z) \frac{\partial G(\zeta, \zeta_1)}{\partial n} ds - \\ &- \frac{1}{2\pi} \iint_e k(\zeta) \Gamma(\zeta, z) G(\zeta, \zeta_1) d\xi d\eta, \\ (\sqrt{p(\zeta_1)} \Gamma(\zeta_1, z))_{\xi_1} &= \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \sqrt{p(\zeta)} \Gamma(\zeta, z) \frac{\partial G_{\xi_1}(\zeta, \zeta_1)}{\partial n} ds - \\ &- \frac{1}{2\pi} \iint_e k(\zeta) \Gamma(\zeta, z) G_{\xi_1}(\zeta, \zeta_1) d\xi d\eta, \\ (\sqrt{p(\zeta_1)} \Gamma(\zeta_1, z))_{\eta_1} &= \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \sqrt{p(\zeta)} \Gamma(\zeta, z) \frac{\partial G_{\eta_1}(\zeta, \zeta_1)}{\partial n} ds - \\ &- \frac{1}{2\pi} \iint_e k(\zeta) \Gamma(\zeta, z) G_{\eta_1}(\zeta, \zeta_1) d\xi d\eta. \end{aligned} \right\} \quad (133)$$

Но известно, что при высказанных предположениях относительно $\rho(\zeta)$ функция Грина уравнения (104'') независимо от точек ζ и z ,

принадлежащих области G и отличных друг от друга, удовлетворяет неравенству

$$|-\Gamma(\zeta, z)| \leq \frac{1}{p(z)} |\ln r| + A, \quad (134)$$

где A — постоянная [67, стр. 8—13, 20—25]. Поэтому первое из равенств (133) показывает, что непрерывность $\Gamma(\zeta_1, z)$ при $\zeta_1 \subset e$ равномерна относительно $z \notin e$, т. е. $\Gamma(\zeta, z)$ при $\zeta \neq z$, как функция обеих точек ζ и z , принадлежащих G , непрерывна. Учитывая это, а также второе и третье равенства (133), заключаем, что таким же свойством обладают $\Gamma_{\xi}(\zeta, z)$ и $\Gamma_{\eta}(\zeta, z)$, а следовательно, в соответствии с (130), и $\Gamma_x(\zeta, z)$, $\Gamma_y(\zeta, z)$. Дифференцируя второе и третье равенства (133) по x и y под знаками контурных и двойных интегралов, считая, что $z \notin e$, приходим к выводу, что производные $\Gamma_{\xi x}(\zeta, z)$, $\Gamma_{\xi y}(\zeta, z)$, $\Gamma_{\eta x}(\zeta, z)$, $\Gamma_{\eta y}(\zeta, z)$ непрерывны как функции обеих точек ζ и z , принадлежащих G , при $\zeta \neq z$.

Таким образом, теперь в качестве правильного фундаментального решения уравнения (104'') для всякой области D , содержащейся в области G , в которой характеристика $p(\zeta)$ дважды непрерывно дифференцируема и положительна, можем принять функцию Грина со знаком минус уравнения (104'') для области G при краевых условиях задачи Дирихле. Посредством этого фундаментального решения определяются правильные сопряженные ядра $\Omega(\zeta, z)$ и $\tilde{\Omega}(\zeta, z)$ по формуле (121) и соответственно по формулам (124), (125).

Приведем в заключение три простых примера построения правильных фундаментальных решений и правильных сопряженных ядер в явном виде

Пример 1. Пусть характеристика $p = p(z)$ такая, что $\sqrt{p(z)}$ — гармоническая функция (в области G). Тогда в качестве правильного фундаментального решения уравнения (104'') можно взять

$$\Gamma(\zeta, z) = \frac{1}{\sqrt{p(\zeta)p(z)}} \ln r, \quad (135)$$

и правильное сопряженное ядро $\Omega(\zeta, z)$ в соответствии с (121) запишется в виде

$$\begin{aligned} \Omega(\zeta, z) = \Gamma(\zeta, z) + iH(\zeta, z) = \frac{1}{\sqrt{p(\zeta)p(z)}} \ln r + \\ + \int_{z_0}^z p(z) \left[- \left(\frac{1}{\sqrt{p(\zeta)p(z)}} \ln r \right)_y dx + \left(\frac{1}{\sqrt{p(\zeta)p(z)}} \ln r \right)_x dy \right]. \end{aligned} \quad (136)$$

Рассмотренный класс p -аналитических функций $f(z) = u + iv$ характеризуется тем, что соответствующие им функции третьего класса $\hat{f}(z) = \hat{u} + i\hat{v} = \sqrt{p}u + i\frac{v}{\sqrt{p}}$ такие, что $\hat{u}$ — является гармонической функцией, а $\hat{v}$, в силу (57'), — решением уравнения

$$\Delta \hat{v} - \sqrt{p} \Delta \frac{1}{\sqrt{p}} \hat{v} = 0, \quad \Delta \sqrt{p} = 0. \quad (137)$$

Пример 2. Пусть характеристика $p = p(z)$ такая, что $\frac{\Delta_{\xi\eta} \sqrt{p(\xi)}}{\sqrt{p(\xi)}} = k^2 = \text{const} > 0$, $\Delta_{\xi\eta} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$. Полагая $u = \frac{u^*}{\sqrt{p(\xi)}}$, вместо уравнения (104'') получаем

$$\frac{L_{\xi\eta}(u)}{\sqrt{p(\xi)}} = \Delta_{\xi\eta} u^* - k^2 u^* = 0. \quad (138)$$

Переходя к полярным координатам $\xi - x = r \cos \varphi$, $\eta - y = r \sin \varphi$ и считая, что v не зависит от φ , получаем

$$\frac{d^2 u^*}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du^*}{dr} - k^2 u^* = 0.$$

Полагая $kr = \rho$, получаем уравнение Бесселя

$$\rho^2 \frac{d^2 u^*}{d\rho^2} + \rho \frac{du^*}{d\rho} - (\rho^2 + n^2) u^* = 0$$

при $n = 0$. Решение этого уравнения выражается через бесселевы функции мнимого аргумента [70, стр. 95]

$$K_0(\rho) = -I_0(\rho) \ln \frac{\rho}{2} + \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2v}}{(v!)^2} \psi(v+1), \quad (139)$$

$$I_0(\rho) = 1 + \frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^2}{(1!)^2} + \frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^4}{(2!)^2} + \frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^6}{(3!)^2} + \dots, \quad (139')$$

где $\psi(v+1) = -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{v}$, γ — постоянная Эйлера, $\gamma \approx 0,5772$. Поэтому в качестве правильного фундаментального решения уравнения (104'') можно взять

$$\Gamma(\xi, z) = -\frac{1}{\sqrt{p(\xi)p(z)}} K_0(kr), \quad (140)$$

и правильное сопряженное ядро $\Omega(\xi, z)$ в данном случае имеет вид

$$\begin{aligned} \Omega(\xi, z) &= \Gamma(\xi, z) + iH(\xi, z) = -\frac{1}{\sqrt{p(\xi)p(z)}} K_0(kr) + \\ &+ i \int_{z_0}^z p(z) \left[\left(\frac{K_0(kr)}{\sqrt{p(\xi)p(z)}} \right)_y dx - \left(\frac{K_0(kr)}{\sqrt{p(\xi)p(z)}} \right)_x dy \right]. \end{aligned} \quad (141)$$

Рассмотренные в этом примере p -аналитические функции $f(z) = u + iv$ представляют существенный интерес, так как вещественные $\hat{u}$ и мнимые $\hat{v}$ части соответствующих функций третьего класса $\hat{f}(z) = \hat{u} + i\hat{v} = \sqrt{p}u + i\frac{v}{\sqrt{p}}$ удовлетворяют соответственно уравнению Гельмгольца

$$\Delta \hat{u} - k^2 \hat{u} = 0 \quad (142)$$

и уравнению

$$\Delta \hat{v} - (k^2 - \Delta \ln p) \hat{v} = 0. \quad (142')$$

В частности, в случае «логарифмически-гармонической» характеристики $p = e^{\alpha x + \beta y}$, где α и β — вещественные постоянные, $\hat{u}$ и $\hat{v}$ удовлетворяют одному и тому же уравнению Гельмгольца (142) при $k^2 = \frac{1}{4}(\alpha^2 + \beta^2)$.

Пример 3. Пусть $p = x$. Уравнение (104'') в этом случае принимает вид

$$L_{\xi\eta}(u) = \frac{\partial}{\partial \xi}(\xi u_{\xi}) + \frac{\partial}{\partial \eta}(\xi u_{\eta}) = 0. \quad (143)$$

Интерпретируем ξ и η как координаты плоскости — меридионального сечения в пространственной системе координат ξ, η, ζ (рис. 2). Будем считать, что на окружности L в плоскости $\eta = y = \text{const}$

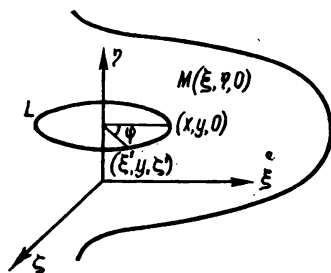


Рис. 2.

радиуса x с центром в точке $(0, y, 0)$ равномерно распределены заряды электричества с постоянной плотностью ρ . Каждый элемент длины дуги $x d\varphi$ будет создавать в точке $M(\xi, \eta, 0)$ потенциал, равный

$$\frac{\rho x d\varphi}{\sqrt{(\xi - \xi')^2 + (\eta - y)^2 + \zeta'^2}},$$

$$\xi'^2 + \zeta'^2 = x^2, \quad \xi' = x \cos \varphi,$$

$$\zeta' = x \sin \varphi.$$

Наложение таких потенциалов, взятых по всей окружности L , образует осесимметричное относительно оси η потенциальное поле, потенциальная функция которого $u(\xi, \eta, x, y)$ удовлетворяет уравнению (143). Имеем

$$u(\xi, \eta, x, y) = \int_0^{2\pi} \frac{\rho x d\varphi}{\sqrt{(\xi - \xi')^2 + (\eta - y)^2 + \zeta'^2}}.$$

Учитывая, что

$$(\xi - \xi')^2 + (\eta - y)^2 + \zeta'^2 = \xi^2 + x^2 + (\eta - y)^2 - 2\xi x \cos \varphi =$$

$$= (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + 4\xi x \sin^2 \frac{\varphi}{2} = r^2 + 4\xi x \sin^2 \frac{\varphi}{2},$$

$$r^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2,$$

получаем

$$u(\xi, \eta, x, y) = \rho x \int_0^{2\pi} \left(r^2 + 4\xi x \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} d\varphi =$$

$$= 2\rho x \int_0^{\pi} \left(r^2 + 4\xi x \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} d\varphi.$$

Переходя к новой переменной интегриации $\theta = \frac{\pi - \varphi}{2}$, получаем

$$u(\xi, \eta, x, y) = 4\rho x \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r^2 + 4\xi x - 4\xi x \sin^2 \theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta, \quad (143')$$

или

$$u(\xi, \eta, x, y) = 4\rho x (r^2 + 4\xi x)^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \mu^2 \sin^2 \theta}},$$

где

$$\mu^2 = \frac{4\xi x}{r^2 + 4\xi x}, \quad 0 < \mu^2 \leq 1.$$

Известно, что для полного эллиптического интеграла первого рода справедливо равенство [71, стр. 308]

$$K(\mu) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \mu^2 \sin^2 \theta}} = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \mu^2\right), \quad |\arg(1 \pm \mu)| < \pi,$$

где $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ — гипергеометрическая функция от z и параметров α, β, γ ,

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1!\gamma} z + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\gamma(\gamma+1)} z^2 + \\ + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{3!\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} z^3 + \dots$$

В силу известного свойства гипергеометрических функций [71, стр. 306] можно написать

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, z\right) = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2} + m\right)}{(m!)^2} \times \\ \times \left[2\psi(m+1) - 2\psi\left(m + \frac{1}{2}\right) - \ln(1-z)\right] (1-z)^m,$$

где $\psi(z)$ — логарифмическая производная функции $\Gamma(z)$, $|z-1| < 1$, $|\arg(1-z)| < \pi$. Отсюда видим, что при $z=1$ функция

$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \mu^2\right)$ имеет особенность вида $-\frac{1}{\pi} \ln(1-z)$, а функция

$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \mu^2\right)$ — особенность вида

$$-\frac{1}{\pi} \ln(1 - \mu^2) = -\frac{1}{\pi} \ln\left(1 - \frac{4\xi x}{r^2 + 4\xi x}\right) = -\frac{2}{\pi} \ln r + \\ + \frac{1}{\pi} \ln(r^2 + 4\xi x).$$

Замечая теперь, что

$$u(\xi, \eta, x, y) = \frac{4\rho x}{\sqrt{r^2 + 4\xi x}} K(\mu) = \frac{4\rho x}{\sqrt{r^2 + 4\xi x}} \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \mu^2\right) = \\ = 2\rho \sqrt{\frac{x}{\xi}} \frac{2\sqrt{x\xi}}{\sqrt{r^2 + 4\xi x}} \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \mu^2\right),$$

и полагая $\rho = \frac{1}{2x}$, получаем правильное фундаментальное решение уравнения (143) в виде

$$\Gamma(\xi, z) = -\frac{\mu}{\sqrt{x\xi}} \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \mu^2\right) = -\frac{\mu}{\sqrt{x\xi}} K(\mu). \quad (143'')$$

Правильное сопряженное ядро $\Omega(\xi, z)$ в данном случае в соответствии с (121) запишется в виде

$$\Omega(\xi, z) = \Gamma(\xi, z) + iH(\xi, z) = -\frac{\mu}{\sqrt{x\xi}} \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \mu^2\right) + \\ + i \int_{z_0}^z x \left\{ \left(\frac{\mu}{\sqrt{x\xi}} \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \mu^2\right) \right)_y dx - \right. \\ \left. - \left(\frac{\mu}{\sqrt{x\xi}} \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \mu^2\right) \right)_x dy \right\}. \quad (143''')$$

В случае $\rho = x$ p -аналитические функции $f(z) = u + iv$ ($z = x + iy$, $x > 0$) описывают пространственные осесимметричные потенциальные поля (u — потенциальная функция, v — функция тока, y — ось симметрии, x — расстояние от оси симметрии), что, в частности, свидетельствует о вполне определенной их важности.

Пусть теперь $\rho = x^k$ ($k = \text{const} > 0$). Уравнение (104'') в этом случае принимает вид

$$L(u) = \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi^k u_\xi) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\xi^k u_\eta) = 0. \quad (144)$$

По аналогии с интегралом (143') будем искать решение уравнения (144) в виде (см., например, [26])

$$u(\xi, \eta, x, y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\theta) (r^2 + 4x\xi - 4x\xi \sin^2 \theta)^{-\frac{k}{2}} d\theta, \quad (144')$$

где $\varphi(\theta)$ — некоторая функция от θ , остальные обозначения имеют тот же смысл, что и в интеграле (143'). Дифференцируя правую часть равенства (144') по ξ и η под знаком интеграла и интегрируя полученные интегралы по частям, находим

$$L(u) = x^{k-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r^2 + 4x\xi - 4x\xi \sin^2 \theta)^{-\frac{k}{2}-1} \left[-k^2 \varphi(\theta) (\xi - x + \right.$$

$$+ 2x \cos^2 \theta - 2\xi k \varphi(\theta) + k(k+2)\xi \varphi(\theta) + kx \varphi(\theta) \cos 2\theta + \\ + \frac{kx}{2} \varphi'(\theta) \sin 2\theta \Big] d\theta.$$

Таким образом, для того чтобы интеграл (144') удовлетворял уравнению (144), достаточно, чтобы функция $\varphi(\theta)$ удовлетворяла уравнению

$$2\varphi(\theta)(1-k)\cos 2\theta + \varphi'(\theta)\sin 2\theta = 0.$$

Отсюда находим $\varphi(\theta) = C \sin^{k-1} 2\theta$, где C — постоянная. Подставляя это в (144'), получаем

$$u(\xi, \eta, x, y) = C(r^2 + 4x\xi)^{-\frac{k}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{k-1} 2\theta}{(1 - \mu^2 \sin^2 \theta)^{\frac{k}{2}}} d\theta.$$

Отсюда, используя равенство

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2\lambda-1} \theta \cos^{2\nu-1} \theta d\theta}{(1 - \mu^2 \sin^2 \theta)^\delta} = \frac{B(\lambda, \nu)}{2} F(\delta, \lambda, \lambda + \nu, \mu^2),$$

$$B(\lambda, \nu) = \frac{\Gamma(\lambda) \Gamma(\nu)}{\Gamma(\lambda + \nu)}, \quad \operatorname{Re} \lambda > 0, \quad \operatorname{Re} \nu > 0$$

(см., например, [72, стр. 403]), можем написать

$$u(\xi, \eta, x, y) = \frac{C}{(r^2 + 4x\xi)^{\frac{k}{2}}} \cdot \frac{B\left(\frac{k}{2}, \frac{k}{2}\right)}{2} F\left(\frac{k}{2}, \frac{k}{2}, k, \mu^2\right).$$

Учитывая теперь выражение для гипергеометрической функции $F(\alpha, \beta, \alpha + \beta, z)$ вида [72]

$$F(\alpha, \beta, \alpha + \beta, z) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma^2(\alpha) \Gamma^2(\beta)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + m) \Gamma(\beta + m)}{m!^2} [2\psi(1 + m) - \\ - \psi(\alpha + m) - \psi(\beta + m) - \ln(1 - z)] (1 - z)^m,$$

где $\psi(z)$ — логарифмическая производная функции $\Gamma(z)$, $|z - 1| < 1$, $|\arg(1 - z)| < \pi$, $\alpha \neq 0, -1, -2, \dots$, $\beta \neq 0, -1, -2, \dots$, подбираем постоянную C так, чтобы в точке $\xi = x$, $\eta = y$ функция $u(\xi, \eta, x, y)$ имела особенность вида $\frac{1}{x^k} \ln r$. Получаем $C = -2^k$.

Искомое правильное фундаментальное решение уравнения (144) запишется в виде

$$\Gamma(\zeta, z) = -\frac{\mu^k}{(x\xi)^{\frac{k}{2}}} \frac{\Gamma^2\left(\frac{k}{2}\right)}{2\Gamma(k)} F\left(\frac{k}{2}, \frac{k}{2}, k, \mu^2\right). \quad (144'')$$

Правильное сопряженное ядро $\Omega(\xi, z)$, соответствующее характеристике $p = x^k$, определяется равенством (121) при условии, что $p = x^k$, $q = 0$, $\Gamma(\xi, z)$ — правильное фундаментальное решение (144").

§ 5. СВОЙСТВО ЕДИНСТВЕННОСТИ И (p, q) -АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ (p, q) -АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Приведем прежде всего теорему Т. Карлемана в том виде, в каком она была установлена им [38, 39].

Теорема 1. (Т. Карлемана). *Всякое решение в области G в плоскости $z = x + iy$ системы уравнений (51), где $A = \alpha + i\beta$, $B = \gamma + i\delta$ — заданные непрерывные в G функции от $z = x + iy$, имеющее в области G нуль бесконечного порядка или точку накопления нулей, тождественно равно нулю в области G .*

При этом под решением данной системы уравнений в области G понимается функция комплексного переменного $\Phi(z) = \varphi + i\psi$, вещественная и мнимая части которой, как функции от x и y , удовлетворяют условиям: а) φ и ψ непрерывны в G ; б) $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial \psi}{\partial x}$, $\frac{\partial \psi}{\partial y}$ существуют и непрерывны в $G - l$, где l — множество точек области G , составленное из отдельных точек и точек конечного числа спрямляемых дуг; в) $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial \psi}{\partial x}$, $\frac{\partial \psi}{\partial y}$ ограничены в $G - l$; г) $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial \psi}{\partial x}$, $\frac{\partial \psi}{\partial y}$ удовлетворяют данной системе уравнений (51) в $G - l$.

Для наших целей несколько видоизменим формулировку теоремы Т. Карлемана.

Теорема 2. *Пусть $\Phi(z) = \varphi + i\psi$ — однозначная, обобщенная аналитическая функция четвертого класса в области G с выброшенной точкой z_0 , причем ее параметры A и B непрерывны и ограничены в $G - z_0$. Тогда функция $\Phi(z)$, если для нее точка z_0 является предельным нулем бесконечного порядка¹⁰ или точкой накопления нулей при условии, что она (или $\Phi(z)(z - z_0)^\alpha$, $\alpha = \text{const} < 1$) остается ограниченной при подходе к z_0 , тождественно равна нулю в области G .*

В самом деле, по условию функция $\Phi(z) = \varphi + i\psi$ в $G - z_0$ непрерывно дифференцируема и удовлетворяет системе уравнений (51). Не ограничивая общности, будем считать $z_0 = 0$ и введем следующие обозначения: T — круг радиуса R с центром в точке $z_0 = 0$, S — его граница, e — круг достаточно малого радиуса ρ с центром в точке $z_0 = 0$, γ — его граница. Рассмотрим последовательность функций

$$\Phi_n(z) = \frac{\Phi(z)}{g_n(z)},$$

¹⁰ Это значит, что $\lim \Phi(z)(z - z_0)^{-n} = 0$, где n — любое целое положительное число.

где $g_n(z)$ определяется одним из равенств: а) если z_0 — нуль бесконечного порядка,

$$g_n(z) = z^n, \quad n = 1, 2, \dots;$$

б) если z_0 — точка накопления нулей,

$$g_n(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

Здесь $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ — нули функции $\Phi(z)$ такие, что $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n =$

∞ . Очевидно, что $\Phi_n(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\Phi_n}{dz} = A\Phi_n(z) + B \frac{\bar{g}_n(z)}{g_n(z)} \bar{\Phi}_n(z),$$

и поэтому в любой точке $z = x + iy$, лежащей в кольце $\rho < |z| < R$, справедливо равенство

$$\begin{aligned} \Phi_n(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{\Phi_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\Phi_n(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \\ &- \frac{1}{\pi} \iint_{T-e} \frac{A\Phi_n(\zeta) + B \frac{\bar{g}_n(\zeta)}{g_n(\zeta)} \bar{\Phi}_n(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta, \quad \zeta = \xi + i\eta. \end{aligned}$$

Учитывая, что при $z \rightarrow 0$ $\Phi_n(z) \rightarrow 0$ в случае «а» и $|\Phi_n(z)(z - z_0)^\alpha| < M$ ($M = \text{const}$) в случае «б», получаем при $0 < |z| < R$

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{\Phi_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{\pi} \iint_T \frac{A\Phi_n(\zeta) + B \frac{\bar{g}_n(\zeta)}{g_n(\zeta)} \bar{\Phi}_n(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta,$$

и в частности

$$|\Phi_n(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{|\Phi_n(\zeta)|}{|\zeta - z|} |d\zeta| + \frac{1}{\pi} \iint_T \frac{(|A| + |B|) |\Phi_n(\zeta)| d\xi d\eta}{|\zeta - z|}.$$

Интегрируя это неравенство по кругу $|z| < R$, находим

$$\begin{aligned} \int_{|z| < R} |\Phi_n(z)| dx dy &\leq \frac{1}{2\pi} \int_S \left[|\Phi_n(\zeta)| \int_{|z| < R} \frac{dx dy}{|\zeta - z|} \right] |d\zeta| + \\ &+ \frac{1}{\pi} \iint_T \left[(|A| + |B|) |\Phi_n(\zeta)| \int_{|z| < R} \frac{dx dy}{|\zeta - z|} \right] d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Так как

$$\int_{|z| < R} \frac{dx dy}{|\zeta - z|} \leq \int_{|z - \zeta| < 2R} \frac{dx dy}{|z - \zeta|} = \int_0^{2\pi} \int_0^{2R} dr d\varphi = 4\pi R,$$

то

$$\int_{|z| < R} |\Phi_n(z)| dx dy \leq 2R \int_S |\Phi_n(\zeta)| |d\zeta| + 4MR \iint_T |\Phi_n(\zeta)| d\xi d\eta,$$

где $M = \max_{|z| < R} (|A| + |B|)$. Считая, что $4MR < 1$, получаем

$$\int_{|z| < R} |\Phi_n(z)| dx dy \leq \frac{2R}{1-4MR} \int_S |\Phi_n(z)| |dz|. \quad (145)$$

Рассмотрим теперь отдельно каждый из случаев «а» и «б». В случае «а» предположим, что в некоторой точке z_1 , лежащей в круге $|z| \leq \frac{R}{2}$, $\Phi(z_1) \neq 0$. Тогда найдется в этом круге некоторая область T' с площадью $\sigma > 0$, в которой $|\Phi(z)| \geq K > 0$. Поэтому

$$\int_{|z| < R} |\Phi_n(z)| dx dy \geq \int_{T'} \frac{|\Phi(z)|}{|z|^n} dx dy \geq K \int_{T'} \frac{dx dy}{|z|^n} \geq \frac{K\sigma}{\left(\frac{R}{2}\right)^n},$$

и из (145) получаем

$$\frac{K\sigma}{\left(\frac{R}{2}\right)^n} \leq \frac{2R}{1-4MR} \cdot \frac{1}{R^n} \int_S |\Phi(z)| |dz|.$$

Здесь n — любое целое положительное число, поэтому функция $\Phi(z)$ в области $0 < |z| \leq \frac{R}{2}$ не может быть отличной от нуля.

В случае «б» предположим, что в некоторой точке z_1 , лежащей в круге $|z| < \rho \leq \frac{R}{5}$, $\Phi(z_1) \neq 0$. Тогда найдется в круге $|z| < \rho$ область T' с площадью $\sigma > 0$ такая, что $|\Phi(z)| \geq K > 0$ в T' . Учитывая это, получаем

$$\int_{|z| < R} \frac{|\Phi(z)|}{|g_n(z)|} dx dy \geq \int_{T'} \frac{|\Phi(z)|}{|g_n(z)|} dx dy \geq \frac{1}{(2\rho)^n} \int_{T'} |\Phi(z)| dx dy \geq \frac{K\sigma}{(2\rho)^n},$$

на основании чего из (145) находим

$$\frac{K\sigma}{(2\rho)^n} \leq \frac{2R}{1-4MR} \cdot \frac{1}{(R-\rho)^n} \int_S |\Phi(z)| |dz|.$$

Но это неравенство при достаточно большом n противоречиво, поэтому равенство $\Phi(z_1) = 0$ невозможно. Теорема доказана.

Теорема 3. Если две обобщенные аналитические функции четвертого (или третьего) класса в области G принимают одинаковые значения на множестве точек, имеющем предельную точку z_0 внутри области G , то они тождественно равны друг другу в области G .

В самом деле, разность $\Phi(z)$ указанных функций четвертого (или третьего) класса удовлетворяет условиям теоремы 2 с параметрами A и B , непрерывными в точке z_0 , и обращается в нуль в точке z_0 . Следовательно, она тождественно равна нулю в некотором круге с центром в точке z_0 . Взяв теперь какую-либо точку z_1 этого круга и рассуждая точно так же, приходим к выводу, что $\Phi(z) \equiv 0$ в некотором круге с центром в точке z_1 . Продолжая этот процесс, устанавливаем, что $\Phi(z) \equiv 0$ в области G .

Теорема 4. Если две (p, q) -аналитические функции в области G с непрерывно дифференцируемыми характеристиками p и q принимают одинаковые значения на множестве точек, имеющем предельную точку внутри области G , то они тождественно равны друг другу в области G .

Справедливость утверждений этой теоремы следует из теоремы 3, если учесть, что (p, q) -аналитической функции $f(z) = u + iv$, в силу (51), (51'), соответствует функция четвертого класса

$$\Phi(z) = \varphi + i\psi = \sigma u + iv = \rho u + i(v + qu)$$

с параметрами $A = B = \frac{1}{2p} \frac{d\sigma}{dz}$.

Теорема 5. Если (p, q) -производные $\frac{\hat{d}_{p,q}f_1(z)}{dz}$ и $\frac{\hat{d}_{p,q}f_2(z)}{dz}$ двух функций $f_1(z) = u_1 + iv_1$ и $f_2(z) = u_2 + iv_2$, (p, q) -аналитических в области G с непрерывно дифференцируемыми в G характеристиками p и q , принимают одинаковые значения на множестве точек, имеющем предельную точку внутри области G , то во всех точках области G

$$\frac{\hat{d}_{p,q}f_1(z)}{dz} = \frac{\hat{d}_{p,q}f_2(z)}{dz}, \quad f_1(z) = f_2(z) + \text{const.}$$

В самом деле, в силу теоремы 2' § 3, (p, q) -производные $\frac{\hat{d}_{p,q}f_1(z)}{dz}$ и $\frac{\hat{d}_{p,q}f_2(z)}{dz}$ являются обобщенными аналитическими функциями четвертого класса с комплексными параметрами $A = \frac{1}{2p} \frac{\hat{d}\sigma}{dz}$, $B = -\frac{1}{2p} \frac{\hat{d}\sigma}{dz}$. В силу теоремы 3, $\frac{\hat{d}_{p,q}f_1(z)}{dz} = \frac{\hat{d}_{p,q}f_2(z)}{dz}$ в области G . Следовательно, на основании (66') § 3 $\rho u_x + qu_y + v_y \equiv 0$, $v_x + qu_x - \rho u_y \equiv 0$, где $u = u_1 - u_2$, $v = v_1 - v_2$. С помощью последних равенств в сочетании с уравнениями (p, q) -аналитических функций

$$\rho u_x - qu_y - v_y = 0, \quad qu_x + \rho u_y + v_x = 0$$

или равенств (67') находим

$$u_x = 0, \quad v_x = 0, \quad u_y = 0, \quad v_y = 0,$$

т. е.

$$f(z) = f_1(z) - f_2(z) = \text{const.}$$

Пусть G_1 и G_2 — две области, лежащие в области G , в которой заданы регулярные характеристики $p = p(z)$ и $q = q(z)$. Пусть g — некоторая область, являющаяся общей частью областей G_1 и G_2 ; в области G_1 дана (p, q) -аналитическая функция $f_1(z) = u_1 + iv_1$, в области G_2 — (p, q) -аналитическая функция $f_2(z) = u_2 + iv_2$. Тогда, если в области g выполняется равенство $f_1(z) = f_2(z)$, то функцию $f_2(z)$ будем называть (p, q) -аналитическим продолжением

функции $f_1(z)$ в область G_2 , функцию $f_1(z)$ — (p, q) -аналитическим продолжением функции $f_2(z)$ в область G_1 . Очевидно, что такое (p, q) -аналитическое продолжение может быть только единственным.

Теорема 6 (принцип (p, q) -аналитического продолжения по непрерывности). Пусть G_1 и G_2 — две области, примыкающие друг к другу вдоль спрямляемой кусочно-монотонной кривой l , p и q — регулярные характеристики, определенные в области G , содержащей G_1 и G_2 (рис. 3). Тогда, если $f_1(z)$ и $f_2(z)$ — функции, (p, q) -аналитические в G_1 и соответственно в G_2 , причем при подходе к l изнутри

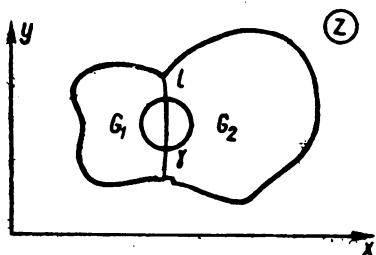


Рис. 3.

G_1 и изнутри G_2 $f_1(z)$ и соответственно $f_2(z)$ равномерно стремятся к своим непрерывным вдоль l предельным значениям и эти предельные значения одинаковы, то $f_2(z)$ является (p, q) -аналитическим продолжением $f_1(z)$ в область G_2 , $f_1(z)$ — (p, q) -аналитическим продолжением $f_2(z)$ в область G_1 .

В самом деле, пусть g_1 и g_2 — области, лежащие соответственно в G_1 и G_2 и примыкающие друг к другу вдоль части l_1 кривой l , γ_1 — граница g_1 , γ_2 — граница g_2 , γ — граница области g , составленной из точек g_1 , g_2 и l_1 . Пользуясь обобщенным интегралом типа Коши в соответствии с обобщенной формулой Коши, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} f_1(\zeta) d_{p,q}\Omega(\zeta, z) &= \begin{cases} f_1(z), & z \in g_1, \\ 0, & z \in g_2, \end{cases} \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} f_2(\zeta) d_{p,q}\Omega(\zeta, z) &= \begin{cases} 0, & z \in g_1, \\ f_2(z), & z \in g_2. \end{cases} \end{aligned}$$

Поэтому для любой точки, принадлежащей g_1 или g_2 , можем написать

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) d_{p,q}\Omega(\zeta, z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in g_1, \\ f_2(z), & z \in g_2, \end{cases} \quad (146)$$

где

$$f(\zeta) = \begin{cases} f_1(\zeta), & \zeta \in \gamma_1 - l_1, \\ f_2(\zeta), & \zeta \in \gamma_2 - l_1. \end{cases}$$

Но левая часть равенства (146), как обобщенный интеграл типа Коши, представляет собой функцию, (p, q) -аналитическую в g . Эта функция в g_1 совпадает с $f_1(z)$, в g_2 — с $f_2(z)$. В силу этого и согласно определению $f_2(z)$ является (p, q) -аналитическим продолжением $f_1(z)$ в область g_2 и, следовательно, в область G_2 . Теорема доказана.

Теорема 7 (принцип симметрии (p, q) -аналитического продолжения). Пусть G_1 и G_2 — области в плоскости $z = x + iy$, симметричные относительно дуги окружности l , вдоль которой они примыкают друг к другу, $p = p(z)$ и $q = q(z)$ — регулярные характерис-

тики в области, составленной из точек G_1 , G_2 и l , причем в точках, симметричных относительно l , $p(z)$ принимает одинаковые значения, а $q(z)$ — значения, противоположные по знаку. Тогда, если функция $f_1(z) = u_1 + iv_1$, (p, q) -аналитическая в области G_1 , при подходе к l изнутри равномерно стремится к своим непрерывным вдоль l предельным значениям и эти предельные значения вещественные, то (p, q) -аналитическое продолжение $f_2(z) = u_2 + iv_2$ функции $f_1(z)$ в область G_2 существует и чтобы получить это продолжение, достаточно потребовать, чтобы в точках, симметричных относительно l , вещественные части $f_1(z)$ и $f_2(z)$ были одинаковы, а их мнимые части — противоположны по знаку.

В самом деле, не ограничивая общности, можем считать, что l совпадает с отрезком вещественной оси, G_1 — область в верхней полуплоскости, G_2 — область в нижней полуплоскости $z = x + iy$. В G_1 дано

$$pu_{1x} - qu_{1y} - v_{1y} = 0, \quad qu_{1x} + pu_{1y} + v_{1x} = 0. \quad (146')$$

Учитывая, что в точках, симметричных относительно l , выполняются равенства

$$u_{1x}|_z = u_{2x}|_{\bar{z}}, \quad u_{1y}|_z = -u_{2y}|_{\bar{z}}, \quad v_{1x}|_z = -v_{2x}|_{\bar{z}}, \quad v_{1y}|_z = v_{2y}|_{\bar{z}}$$

при $z \in G_2$, из (146') получаем

$$pu_{2x} - qu_{2y} - v_{2y} = 0, \quad qu_{2x} + pu_{2y} + v_{2x} = 0.$$

Это значит, что функция $f_2(z) = u_2 + iv_2$, принимающая в точках, симметричных относительно l , значения комплексно-сопряженные со значениями функции $f_1(z) = u_1 + iv_1$ в G_1 , является (p, q) -аналитической в G_2 и при подходе к l изнутри области G_2 равномерно стремится к своим предельным значениям, которые, в силу их вещественности, совпадают с предельными значениями функции $f_1(z)$ при подходе к l изнутри области G_1 . Таким образом, функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ удовлетворяют условиям теоремы 6 и, следовательно, $f_2(z)$ является (p, q) -аналитическим продолжением $f_1(z)$ в область G_2 . Теорема доказана.

§ 6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА p -АНАЛИТИЧЕСКИХ И (p, q) -АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Пусть $f(z) = u + iv$ — функция, (p, q) -аналитическая в замкнутой односвязной области $D + C$, с данными характеристиками $p = p(z)$, $q = q(z)$. Как всегда, если не оговорено обратное, будем считать, что в рассматриваемой области $p(z) > 0$. Положим $p_0 = p(z_0)$, $q_0 = q(z_0)$, где z_0 — любая фиксированная точка замкнутой области $D + C$. Для случая постоянных характеристик p_0 и q_0 можно в соответствии с (111) и (111') взять сопряженные ядра

в виде ¹¹

$$\Omega(\zeta, z) = \Gamma(\zeta, z) + iH(\zeta, z) = \frac{1}{\rho_0} \ln r + i \left(\operatorname{arctg} \frac{\eta - y}{\xi - x} + \frac{q_0^*}{\rho_0^*} \ln r \right),$$

$$\tilde{\Omega}(\zeta, z) = \tilde{\Gamma}(\zeta, z) + i\tilde{H}(\zeta, z) = \frac{1}{\rho_0} \ln r + i \left(\operatorname{arctg} \frac{\eta - y}{\xi - x} + \frac{q_0}{\rho_0} \ln r \right).$$

Подставляя эти результаты в (112), получаем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C u(\zeta) d\tilde{\Omega}(\zeta, z) + iv(\zeta) d\Omega(\zeta, z) - \\ - \frac{1}{\pi} \iint_D \left[\frac{\rho_0 \mu_\xi - q_0 \mu_\eta - v_\eta}{2} \Omega_\xi(\zeta, z) + \frac{q_0 \mu_\xi + \rho_0 \mu_\eta + v_\xi}{2} \Omega_\eta(\zeta, z) \right] d\xi d\eta.$$

Полагая теперь $z_0 = z$, находим

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C u(\zeta) \tilde{\Omega}^0(\zeta, z) + iv(\zeta) d\Omega^0(\zeta, z) - \\ - \frac{1}{\pi} \iint_D \left[\frac{p(z) \mu_\xi - q(z) \mu_\eta - v_\eta}{2} \Omega_\xi^0(\zeta, z) + \right. \\ \left. + \frac{q(z) \mu_\xi + p(z) \mu_\eta + v_\xi}{2} \Omega_\eta^0(\zeta, z) \right] d\xi d\eta, \quad (147)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Omega^0(\zeta, z) &= \Gamma^0(\zeta, z) + iH^0(\zeta, z) = \frac{1}{p(z)} \ln r + \\ &+ i \left(\operatorname{arctg} \frac{\eta - y}{\xi - x} + \frac{q^*(z) \ln r}{p^*(z)} \right), \\ \tilde{\Omega}^0(\zeta, z) &= \tilde{\Gamma}^0(\zeta, z) + i\tilde{H}^0(\zeta, z) = \frac{1}{p^*(z)} \ln r + \\ &+ i \left(\operatorname{arctg} \frac{\eta - y}{\xi - x} + \frac{q(z) \ln r}{p(z)} \right). \end{aligned} \right\} \quad (147')$$

Поскольку $f(z) = u + iv - (p, q)$ -аналитическая функция в $D + C$, равенство (147) можем записать в виде

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = f_1(z) + \Psi(z), \quad (148)$$

где

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C u(\zeta) d\tilde{\Omega}^0(\zeta, z) + iv(\zeta, z) d\Omega^0(\zeta, z), \quad (148')$$

¹¹ В справедливости этого можно также убедиться с помощью непосредственной проверки.

$$\begin{aligned}\Psi(z) &= R(x, y) + iS(x, y) = \\ &= \frac{1}{\pi} \iint_D \left[\frac{(\rho(\zeta) - \rho(z)) u_\xi - (q(\zeta) - q(z)) u_\eta}{2} \Omega_\xi^0(\zeta, z) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(q(\zeta) - q(z)) u_\xi + (\rho(\zeta) - \rho(z)) u_\eta}{2} \Omega_\eta^0(\zeta, z) \right] d\xi d\eta. \quad (148'')\end{aligned}$$

Учитывая (147'), замечаем, что дифференциальные свойства функции $f_1(z)$ в области D точно такие же, как и дифференциальные свойства характеристик ρ и q , так как контурные интегралы по переменной ζ правой части равенства (148') можно дифференцировать по z под знаком интеграла сколько угодно раз.

Таким образом, исследование дифференциальных свойств (ρ, q) -аналитической функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ полностью сводится к исследованию дифференциальных свойств функции $\Psi(z)$, определенной равенством (148'').

Лемма 1. Пусть $D(\zeta, z)$ — вещественная функция, непрерывная по обеим точкам $\zeta = \xi + i\eta$ и $z = x + iy$, принадлежащим замкнутой области $D + C$, при $\zeta \neq z$ и удовлетворяющая условию

$$|D(\zeta, z)| < \frac{A}{|\zeta - z|^2}, \quad (149)$$

где A — постоянная, не зависящая от ζ и z . Пусть $\rho(\zeta)$ — вещественная функция от ζ , правильно непрерывная с показателем δ ($0 < \delta \leq 1$) в $D + C$, $\sigma(\zeta)$ — вещественная функция от ζ , непрерывная и ограниченная в D . Тогда двойной интеграл

$$Q(z) = \iint_D [\rho(\zeta) - \rho(z)] D(\zeta, z) \sigma(\zeta) d\xi d\eta \quad (150)$$

будет функцией от z , непрерывной в $D + C$.

В самом деле, пусть e_z — круг радиуса ρ_0 с центром в точке $z \in D + C$ или его общая часть с $D + C$. Очевидно, что при достаточно малом ρ_0 интеграл

$$\int_{e_z} [\rho(\zeta) - \rho(z)] D(\zeta, z) \sigma(\zeta) d\xi d\eta$$

будет меньше наперед заданного числа ε , независимо от точки $z \in D + C$. Имеем

$$\begin{aligned}Q(z') - Q(z) &= \iint_{D - e_z - e_{z'}} \{ [\rho(\zeta) - \rho(z')] D(\zeta, z') - [\rho(\zeta) - \\ &\quad - \rho(z)] D(\zeta, z) \} \sigma(\zeta) d\xi d\eta + \iint_{e_z} [\rho(\zeta) - \rho(z')] D(\zeta, z') \sigma(\zeta) d\xi d\eta - \\ &\quad - \iint_{e_z} [\rho(\zeta) - \rho(z)] D(\zeta, z) \sigma(\zeta) d\xi d\eta + \iint_{e_{z'}} [\rho(\zeta) - \rho(z')] \times \\ &\quad \times D(\zeta, z') \sigma(\zeta) d\xi d\eta - \iint_{e_{z'}} [\rho(\zeta) - \rho(z)] D(\zeta, z) \sigma(\zeta) d\xi d\eta, \quad (150')\end{aligned}$$

где $\gamma = e_z - e_z e_{z'}$, $\gamma' = e_{z'} - e_z e_{z'}$, $e_z e_{z'}$ — общая часть кругов e_z и $e_{z'}$ (рис. 4). Второй и третий интегралы правой части равенства (150') сколь угодно малы при достаточно малом ρ_0 . Зафиксировав ρ_0 , можем считать точку z' настолько близкой к точке z , что четвертый и пятый интегралы, в силу (149), будут меньше наперед заданной величины. Теперь, учитывая, что функция $[\rho(\xi) - \rho(z)] D(\xi, z)$ непрерывна по z равномерно относительно точки ξ , лежащей вне

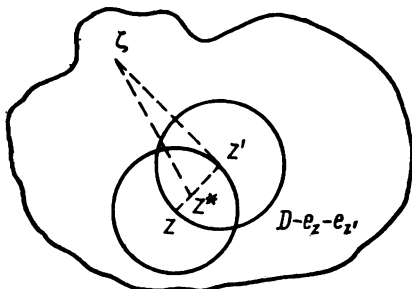


Рис. 4.

фиксированной окрестности точки z , приходим к выводу, что первый интеграл правой части равенства (150') будет тоже сколь угодно малым, если точка z' достаточно близка к точке z . Лемма доказана.

Замечание. Из приведенных выкладок видно, что если $\rho(\xi)$ и $\sigma(\xi)$ зависят от какого-либо параметра μ , причем правильная непрерывность $\rho(\xi)$ и ограниченность $\sigma(\xi)$ носят равномерный

характер относительно параметра μ , изменяющегося в некоторой области T , то двойной интеграл (150) непрерывен по z в $D + C$ равномерно относительно параметра μ , изменяющегося в области T .

Лемма 2. Пусть $D(\xi, z)$ — вещественная функция от $\xi = \xi + i\eta$ и $z = x + iy$, вместе со своими производными $D_x(\xi, z)$ и $D_y(\xi, z)$ непрерывная по обеим точкам z и ξ , принадлежащим замкнутой области $D + C$, при $\xi \neq z$ и удовлетворяющая условиям

$$|D(\xi, z)| < \frac{A}{|\xi - z|^2}, \quad |D_x(\xi, z)|, |D_y(\xi, z)| < \frac{A_1}{|\xi - z|^3}, \quad (149')$$

где A и A_1 — постоянные, не зависящие от ξ и z . Пусть $\rho(\xi)$ — вещественная функция от ξ , правильно непрерывная с показателем δ ($0 < \delta \leq 1$) в $D + C$, $\sigma(\xi)$ — вещественная функция от ξ , непрерывная и ограниченная в D . Тогда двойной интеграл (150) будет функцией от z , правильно непрерывной в $D + C$ с показателем δ' , сколь угодно близким к δ .

В самом деле, поступая так же, как и при доказательстве леммы 1, рассмотрим каждый из интегралов правой части равенства (150').

1. Имеем

$$\begin{aligned} |J_1| &= \left| \iint_{D - e_z - e_{z'}} \{[\rho(\xi) - \rho(z')] D(\xi, z') - \right. \\ &\quad \left. - [\rho(\xi) - \rho(z)] D(\xi, z)\} \sigma(\xi) d\xi d\eta \right| = \left| \iint_{D - e_z - e_{z'}} \{[\rho(\xi) - \right. \\ &\quad \left. - \rho(z')] [D(\xi, z') - D(\xi, z)] - [\rho(z') - \rho(z)] D(\xi, z)\} \rho(\xi) d\xi d\eta \right| \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left| \int_{D-e_z-e_{z'}} \int [\rho(\xi) - \rho(z')] |D(\xi, z') - D(\xi, z)| \sigma(\xi) d\xi d\eta \right| + \\
&\quad + \left| \int_{D-e_z-e_{z'}} \int [\rho(z') - \rho(z)] D(\xi, z) \sigma(\xi) d\xi d\eta \right| \leq \\
&\leq KM \int_{D-e_z-e_{z'}} \int |\xi - z'|^\delta |D(\xi, z') - D(\xi, z)| d\xi d\eta + \\
&\quad + KM \int_{D-e_z-e_{z'}} \int |z' - z|^\delta |D(\xi, z)| d\xi d\eta,
\end{aligned}$$

где K — постоянная правильной непрерывности функции $\rho(\xi)$ (т. е. определяющаяся условием $|\rho(\xi') - \rho(\xi)| \leq K|\xi' - \xi|^\delta$), M — постоянная, ограничивающая $|\sigma(\xi)|$ в области D . В силу того что при $\xi \subset D - e_z - e_{z'}$ $D(\xi, z)$, как функция от z , в $e_z + e_{z'}$ имеет непрерывные производные по x и y ,

$$D(\xi, z') - D(\xi, z) = D_x(\xi, z)|_{z=z'} \Delta x + D_y(\xi, z)|_{z=z'} \Delta y,$$

где $z^* = x^* + iy^*$ — некоторая точка, лежащая на прямой, соединяющей точки z и z' . Поэтому можно написать

$$|D(\xi, z') - D(\xi, z)| < \frac{A}{|\xi - z^*|^\beta} |z' - z|.$$

На основании свойств треугольника с вершинами в точках z' , z^* , ξ (см. рис. 4) $|\xi - z'| < |z - z^*| + |\xi - z^*|$, и если условиться в дальнейшем считать $|z' - z| = \rho_0$, то $|\xi - z^*| > \frac{\rho_0}{2} > \frac{|z - z^*|}{2}$.

Поэтому $|\xi - z'| < 3|\xi - z^*|$ и $|D(\xi, z') - D(\xi, z)| < \frac{27A_1}{|\xi - z'|^\beta} |z' - z|$.

Учитывая это, получаем

$$\begin{aligned}
|J_1| &\leq 27A_1KM \int_{D-e_z-e_{z'}} \int |\xi - z'|^\delta \frac{|z' - z|}{|\xi - z'|^\beta} d\xi d\eta + \\
&\quad + AMK \int_{D-e_z-e_{z'}} \int |z' - z|^\delta \frac{1}{|\xi - z|^\beta} d\xi d\eta.
\end{aligned}$$

Но при $\xi \subset D - e_z - e_{z'}$ $|z' - z| < |\xi - z|$, $|z' - z| < |\xi - z'|$, поэтому

$$\begin{aligned}
|J_1| &\leq 27A_1KM |z' - z|^{\delta'} \int_{D-e_z-e_{z'}} \int \frac{d\xi d\eta}{|\xi - z'|^{2-(\delta-\delta')}} + \\
&\quad + AMK |z' - z|^{\delta'} \int_{D-e_z-e_{z'}} \int \frac{d\xi d\eta}{|\xi - z|^{2-(\delta-\delta')}}.
\end{aligned}$$

Следовательно, каково бы ни было $\delta' < \delta$, найдется постоянная K_1 такая, что $|J_1| < K_1 |z' - z|^{\delta'}$.

2. Имеем

$$|J_2| = \left| \int_{e_z'} [\rho(\xi) - \rho(z')] D(\xi, z') \sigma(\xi) d\xi d\eta \right| \leqslant \\ \leqslant KMA \int_{e_z'} \int \frac{|\xi - z'|^\delta}{|\xi - z'|^2} d\xi d\eta \leqslant KMA \int_0^{2\rho_0} \int_0^{2\pi} \frac{dr d\varphi}{r^{1-\delta}} = KMA 2\pi \frac{1}{\delta} |z' - z|^\delta.$$

3. Точно так же получаем

$$|J_3| \leqslant KMA 2\pi \frac{1}{\delta} |z' - z|^\delta.$$

4. Имеем

$$|J_4| = \left| \int_{\gamma} [\rho(\xi) - \rho(z')] D(\xi, z') \sigma(\xi) d\xi d\eta \right| \leqslant \\ \leqslant KMA \int_{\gamma} \int \frac{|\xi - z'|^\delta}{|\xi - z'|^2} d\xi d\eta \leqslant KMA \int_0^{2\rho_0} \int_0^{2\pi} \frac{dr d\varphi}{r^{1-\delta}} = KMA 2\pi \frac{2^\delta}{\delta} |z' - z|^\delta.$$

5. Точно так же находим

$$|J_5| = \left| \int_{\gamma} [\rho(\xi) - \rho(z)] D(\xi, z) \sigma(\xi) d\xi d\eta \right| \leqslant KMA 2\pi \frac{2^\delta}{\delta} |z' - z|^\delta.$$

Учитывая все эти оценки, приходим к выводу, что при любом δ' , сколь угодно близком к δ , найдется постоянная K' , не зависящая от точек z и z' , принадлежащих $D + C$, такая, что

$$|Q(z') - Q(z)| < K' |z' - z|^\delta.$$

Лемма доказана.

Замечание. Из приведенных выкладок видно, что если в условиях доказанной леммы предположить, что $\rho(\xi)$ и $\sigma(\xi)$ зависят от какого-либо параметра μ , причем условие правильной непрерывности $\rho(\xi)$ и условие ограниченности $\sigma(\xi)$ носят равномерный характер относительно параметра μ , изменяющегося в некоторой области T , то двойной интеграл (150) будет правильно непрерывным по z в $D + C$ равномерно относительно параметра μ , изменяющегося в области T .

Перейдем теперь непосредственно к вопросу о зависимости дифференциальных свойств (p, q) -аналитических функций от дифференциальных свойств характеристик p и q . Как отмечалось выше, этот вопрос сводится к исследованию дифференциальных свойств функций, определенных равенством (148").

Из рассмотрения (148") и (147') следует, что функция $\Psi(z)$, определенная равенством (148"), представляет собой линейную комбинацию с комплексными коэффициентами, зависящими от z , интегралов вида

$$Q^0(z) = \int_D \int [\rho(\xi) - \rho(z)] D^0(\xi, z) \sigma(\xi) d\xi d\eta, \quad (151)$$

где $\rho(\zeta) = p(\zeta)$ или $\rho(\zeta) = q(\zeta)$, $\sigma(\zeta) = u_{\xi}(\zeta)$ или $\sigma(\zeta) = u_{\eta}(\zeta)$, $D^0(\zeta, z) = G_{\xi}^0(\zeta, z) = \frac{\partial \ln r}{\partial \xi}$ или $D^0(\zeta, z) = G_{\eta}^0(\zeta, z) = \frac{\partial \ln r}{\partial \eta}$, причем коэффициенты этой линейной комбинации сами являются линейными комбинациями с постоянными коэффициентами функций от z вида $\frac{1}{p(z)}$, $\frac{q^*(z)}{p^*(z)}$, $\frac{1}{p^*(z)}$, $\frac{q(z)}{p(z)}$. Пусть, как и ранее, $f(z) = u + iv$ — функция, (p, q) -аналитическая в замкнутой односвязной области $D + C$.

Теорема 1. Если характеристики $p(z)$ и $q(z)$ в $D + C$ правильно непрерывны с показателем δ , то частные производные (p, q) -аналитической в $D + C$ функции $f(z)$ по x и y правильно непрерывны внутри D с показателем δ' , сколь угодно близким к δ .

В самом деле, при высказанных предположениях о $p(z)$ и $q(z)$, в силу теоремы о дифференцировании равномерно сходящихся интегралов (§ 1) по формулам (36), получаем

$$\left. \begin{aligned} Q_x^0(z) &= \iint_D [\rho(\zeta) - \rho(z)] D_x^0(\zeta, z) \sigma(\zeta) d\xi d\eta, \\ Q_y^0(z) &= \iint_D [\rho(\zeta) - \rho(z)] D_y^0(\zeta, z) \sigma(\zeta) d\xi d\eta. \end{aligned} \right\} \quad (151')$$

На основании леммы 2 правые части равенств (151') правильно непрерывны в $D + C$ с показателем δ' , сколь угодно близким к δ . Учитывая (148), убеждаемся в справедливости утверждений теоремы.

Теорема 2. Если в $D + C$ характеристики $p(z)$ и $q(z)$ непрерывны вместе с их частными производными по x и y первого порядка, причем указанные производные первого порядка правильно непрерывны в $D + C$ с показателем δ , то (p, q) -аналитическая в $D + C$ функция $f(z)$ непрерывно дифференцируема в D два раза. При этом частные производные по x и y второго порядка правильно непрерывны внутри D с показателем δ' , сколь угодно близким к δ .

В самом деле, на основании теоремы 1 производные функции $f(z)$ по x и y первого порядка правильно непрерывны в D с показателем, сколь угодно близким к единице. Далее, в силу (151') можем считать, что функция $\Psi(z)$, определенная равенством (148'), представима в $D + C$ в виде линейной комбинации интегралов вида

$$J(z) = \iint_D [\rho(\zeta) - \rho(z)] D(\zeta, z) \sigma(\zeta) d\xi d\eta, \quad (152)$$

где $\rho(\zeta) = p(\zeta)$, или $\rho(\zeta) = q(\zeta)$, $\sigma(\zeta) = u_{\xi}(\zeta)$, или $\sigma(\zeta) = u_{\eta}(\zeta)$, $D(\zeta, z) = G_{\xi\xi}^0(\zeta, z)$, или $D(\zeta, z) = G_{\xi\eta}^0(\zeta, z)$, или $D(\zeta, z) = G_{\eta\eta}^0(\zeta, z)$, причем коэффициенты этих линейных комбинаций являются функциями от z с такими же дифференциальными свойствами, как и у характеристик $p(z)$ и $q(z)$. Покажем, что интегралы вида (152) имеют внутри D правильно непрерывные производные по x и y с показателем δ' , сколь угодно близким к δ .

Рассмотрим вспомогательный интеграл

$$j(z) = \int_D [\rho(\zeta) - \rho(z)] D(\zeta, z) d\bar{\zeta} d\eta. \quad (153)$$

Считая для определенности $D(\zeta, z) = G_{\xi\xi}(\zeta, z)$, записываем

$$\begin{aligned} j(z) &= \int_D \int \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} ([\rho(\zeta) - \rho(z)] G_{\xi\xi}) - \frac{\partial \rho(\zeta)}{\partial \xi} G_{\xi\xi} \right\} d\bar{\zeta} d\eta = \\ &= \int_C [\rho(\zeta) - \rho(z)] G_{\xi\xi} d\eta - \int_D \rho_{\xi}(\zeta) G_{\xi\xi}(\zeta, z) d\bar{\zeta} d\eta. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что частные производные интеграла $j(z)$ по x и y в области D существуют и правильно непрерывны внутри D с показателем δ' , сколь угодно близким к δ . Например,

$$\begin{aligned} j_x(z) &= \int_C [\rho(\zeta) - \rho(z)] G_{\xi x} d\bar{\zeta} d\eta - \rho_x(z) \frac{\partial}{\partial x} \int_C G(\zeta, z) d\eta - \\ &- \int_D [\rho_{\xi}(\zeta) - \rho_x(z)] G_{\xi x}(\zeta, z) d\bar{\zeta} d\eta. \end{aligned} \quad (153')$$

Таким образом, интегралы (152) и (153) удовлетворяют условиям теоремы о дифференцировании равномерно сходящихся интегралов и по формулам (36) (§ 1)

$$\left. \begin{aligned} J_x(z) &= \sigma(z) j_x(z) + \int_D [\sigma(\zeta) - \sigma(z)] \frac{\partial}{\partial \xi} ([\rho(\zeta) - \\ &- \rho(z)] D(\zeta, z)) d\bar{\zeta} d\eta, \\ J_y(z) &= \sigma(z) j_y(z) + \int_D [\sigma(\zeta) - \sigma(z)] \frac{\partial}{\partial \eta} ([\rho(\zeta) - \\ &- \rho(z)] D(\zeta, z)) d\bar{\zeta} d\eta. \end{aligned} \right\} \quad (152')$$

В силу теоремы 2, правые части этих равенств правильно непрерывны внутри D с показателем δ' , сколь угодно близким к δ . Следовательно, в силу (152), (153), (152'), (153') и (148) частные производные функции $f(z)$ по x и y второго порядка в области D представляют собой суммы линейных комбинаций контурных интегралов и линейных комбинаций интегралов вида

$$J_1(z) = \int_D [\sigma(\zeta) - \sigma(z)] D_1(\zeta, z) d\bar{\zeta} d\eta, \quad (154)$$

$$J_1^*(z) = \int_D [\rho_1(\zeta) - \rho_1(z)] D(\zeta, z) d\bar{\zeta} d\eta, \quad (154')$$

где $\rho_1(\zeta) = \rho_{\xi}(\zeta)$ или $\rho_1(\zeta) = \rho_{\eta}(\zeta)$, а $\sigma(\zeta)$, $\rho(\zeta)$, $D(\zeta, z)$ имеют тот же смысл, что и в (152),

$$D_1(\zeta, z) = \frac{\partial}{\partial \xi} ([\rho(\zeta) - \rho(z)] D(\zeta, z)), \quad \frac{\partial}{\partial \eta} ([\rho(\zeta) - \rho(z)] D(\zeta, z)),$$

причем дифференциальные свойства коэффициентов этих линейных комбинаций такие же, как и у характеристик $p(z)$ и $q(z)$. Интегралы (154) и (154') удовлетворяют условиям леммы 2 и поэтому правильно непрерывны в $D + C$ с показателем δ' , сколь угодно близким к δ , это же самое относится к частным производным функции $f(z)$ по x и y второго порядка внутри D . Теорема доказана.

Теорема 3. Если в $D + C$ характеристики $p(z)$ и $q(z)$ непрерывны вместе с их частными производными по x и y до второго порядка, причем указанные производные второго порядка правильно непрерывны в $D + C$ с показателем δ , то (p, q) -аналитическая в $D + C$ функция $f(z)$ непрерывно дифференцируема в D три раза. При этом частные производные по x и y третьего порядка правильно непрерывны внутри D с показателем δ' , сколь угодно близким к δ .

Для доказательства теоремы достаточно установить, что частные производные по x и y первого порядка интегралов (154) и (154') правильно непрерывны внутри D с показателем δ' , сколь угодно близким к δ . Интегрируя по частям, убеждаемся, что интегралы $J_1(z)$ и $J_1^*(z)$ представляются в виде сумм контурных интегралов, обладающих интересующим нас свойством, и двойных интегралов вида

$$j_1(z) = \int_D \int [\rho(\xi) - \rho(z)] D(\xi, z) \sigma_1(\xi) d\xi d\eta, \quad (155)$$

$$j_1^*(z) = \int_D \int \rho_2(\xi) D^0(\xi, z) d\xi d\eta, \quad (155')$$

где $\sigma_1(\xi) = \sigma_{\xi\xi}(\xi)$, $\sigma_\eta(\xi)$ или $u_{\xi\xi}$, $u_{\xi\eta}$, $u_{\eta\eta}$; $\rho_2(\xi) = \rho_{1\xi}(\xi)$, $\rho_{1\eta}(\eta)$ или $\rho_{\xi\xi}(\xi)$, $\rho_{\xi\eta}(\xi)$, $\rho_{\eta\eta}(\xi)$; $D(\xi, z)$ и $D^0(\xi, z)$ имеют тот же смысл, что и в (151), (152). Но производные интеграла $j_1(z)$ находятся так же, как и производные интеграла (152), и определяются правыми частями равенств (152') при единственном условии, что $\sigma(\xi)$ заменяется на $\sigma_1(\xi)$. В силу леммы 2 частные производные по x и y интеграла $j_1(z)$ внутри D правильно непрерывны с показателем δ' , сколь угодно близким к δ . Производные по x и y интеграла $j_1^*(z)$ представляются в виде суммы контурных интегралов, умноженных на $\rho_2(z)$, и двойных интегралов вида

$$\int_D \int [\rho_2(\xi) - \rho_2(z)] D(\xi, z) d\xi d\eta,$$

правильно непрерывных в $D + C$ с показателем δ' , сколь угодно близким к δ . Следовательно, можем сказать, что частные производные функции $f(z)$ по x и y третьего порядка в области D представляются в виде сумм линейных комбинаций контурных интегралов и линейных комбинаций двойных интегралов вида

$$J_2(z) = \int_D \int [\sigma_1(\xi) - \sigma_1(z)] D_1(\xi, z) d\xi d\eta, \quad (156)$$

$$J_2^*(z) = \int_D \int [\rho_2(\xi) - \rho_2(z)] D(\xi, z) d\xi d\eta, \quad (156')$$

где $\sigma_1(\zeta)$, $\rho_2(\zeta)$, $D(\zeta, z)$, $D_1(\zeta, z)$ имеют тот же смысл, что и в (152), (154), (155), (155'). Коэффициенты этих линейных комбинаций имеют такие же дифференциальные свойства, как и характеристики $p(z)$ и $q(z)$. Замечая, что интегралы (156), (156') удовлетворяют условиям леммы 2, убеждаемся в справедливости утверждений теоремы.

Применяя к интегралам (156), (156') те же рассуждения, что и к интегралам (154), (154'), и повторяя их, убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

Теорема 4. Если в $D + C$ характеристики $p(z)$ и $q(z)$ вместе с их частными производными по x и y до n -го порядка непрерывны, причем указанные производные n -го порядка правильно непрерывны в $D + C$ с показателем δ , то (p, q) -аналитическая в $D + C$ функция $f(z)$ непрерывно дифференцируема в D $n + 1$ раз. При этом частные производные по x и y $(n + 1)$ -го порядка правильно непрерывны внутри D с показателем δ' , сколь угодно близким к δ .

Согласно известной теореме Пикара, всякое трижды непрерывно дифференцируемое решение линейного эллиптического дифференциального уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными x и y является аналитической функцией от x и y , если коэффициенты этого уравнения — аналитические функции от x и y [73—76]. Учитывая это, приходим к следующей теореме.

Теорема 5. Если в $D + C$ характеристики $p(z)$ и $q(z)$ — аналитические функции от x и y , то (p, q) -аналитическая в $D + C$ функция $f(z)$ является аналитической в D функцией от x и y .

Применим теперь полученные результаты для решения вопроса об интегральных представлениях частных производных (p, q) -аналитических функций.

Правильное сопряженное ядро $\Omega(\zeta, z) = \Gamma(\zeta, z) + iH(\zeta, z)$ по определению представляет собой $(p(z), q(z))$ -аналитическую функцию от $z = x + iy$, зависящую от параметра $\zeta = \xi + i\eta$, непрерывную при $z \neq \zeta$ по обоим переменным z и ζ вместе со своими производными $\Omega_{\bar{\zeta}}(\zeta, z)$, $\Omega_{\eta}(\zeta, z)$, $\Omega_{\xi x}(\zeta, z)$, $\Omega_{\xi y}(\zeta, z)$, $\Omega_{\eta x}(\zeta, z)$, $\Omega_{\eta y}(\zeta, z)$. В силу равенств (124), (125) такими же свойствами обладает вспомогательное правильное сопряженное ядро $\tilde{\Omega}(\zeta, z)$, умноженное на $-i$. На основании этого из полученных выше результатов и замечания к лемме 2 следует справедливость следующей теоремы.

Теорема 6. Если в области G характеристики $p(z)$ и $q(z)$ имеют непрерывные частные производные по x и y до n -го порядка, причем указанные производные n -го порядка правильно непрерывны в G с показателем δ , $\Omega(\zeta, z)$ и $\tilde{\Omega}(\zeta, z)$ — правильные сопряженные ядра в области G , то $\Omega_{\bar{\zeta}}(\zeta, z)$, $\Omega_{\eta}(\zeta, z)$, $\tilde{\Omega}_{\bar{\zeta}}(\zeta, z)$, $\tilde{\Omega}_{\eta}(\zeta, z)$, как функции от z , в области G при $z \neq \zeta$ имеют непрерывные частные производные по x и y до $(n + 1)$ -го порядка. При этом указанные производные $(n + 1)$ -го порядка правильно непрерывны в G с показателем δ' , сколь угодно близким к δ . Непрерывность по переменной z всех про-

производных до n -го порядка и правильная непрерывность производных $(n + 1)$ -го порядка равномерны относительно переменной ζ , изменяющейся вне области изменения переменной z .

Следствие. Пусть характеристики $p(z)$ и $q(z)$ удовлетворяют условиям теоремы, замкнутая область $D + C$ лежит внутри G , $f(z)$ — функция, (p, q) -аналитическая в $D + C$ или (p, q) -аналитическая в D и непрерывная изнутри на контуре C (если контур C кусочно-монотонный), интеграл

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\zeta) d_{p,q}\Omega(\zeta, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C u(\zeta) d\tilde{\Omega}(\zeta, z) + iv(\zeta) d\Omega(\zeta, z) \quad (157)$$

является представлением функции $f(z)$ в области D по обобщенной формуле Коши с правильными сопряженными ядрами. Тогда частные производные функции $f(z)$ по x и y до $(n+1)$ -го порядка в области D могут быть получены с помощью дифференцирования обобщенного интеграла Коши правой части равенства (157) под знаком интеграла:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(z)}{\partial x} &= \frac{1}{2\pi i} \int_C u(\zeta) d\tilde{\Omega}_x(\zeta, z) + iv(\zeta) d\Omega_x(\zeta, z) = \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_C (\sigma u(\zeta) + iv(\zeta)) \frac{\hat{d}}{d\bar{\zeta}} \Omega_x(\zeta, z) d\zeta - (\bar{\sigma} u(\zeta) - \\
&- iv(\zeta)) \frac{\hat{d}}{d\bar{\zeta}} \Omega_x(\zeta, z) d\bar{\zeta}, \\
\frac{\partial f(z)}{\partial y} &= \frac{1}{2\pi i} \int_C u(\zeta) d\tilde{\Omega}_y(\zeta, z) + iv(\zeta) d\Omega_y(\zeta, z) = \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_C (\sigma u(\zeta) + iv(\zeta)) \frac{\hat{d}}{d\bar{\zeta}} \Omega_y(\zeta, z) d\zeta - (\bar{\sigma} u(\zeta) - \\
&- iv(\zeta)) \frac{\hat{d}}{d\bar{\zeta}} \Omega_y(\zeta, z) d\bar{\zeta}, \\
&\dots\dots\dots \\
&\dots\dots\dots \\
\frac{\partial^{n+1}f(z)}{\partial y^{n+1}} &= \frac{1}{2\pi i} \int_C u(\zeta) d \frac{\partial^{n+1}\tilde{\Omega}(\zeta, z)}{\partial y^{n+1}} + iv(\zeta) d \frac{\partial^{n+1}\Omega(\zeta, z)}{\partial y^{n+1}} = \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_C (\sigma u(\zeta) + iv(\zeta)) \frac{\hat{d}}{d\bar{\zeta}} \frac{\partial^{n+1}\Omega(\zeta, z)}{\partial y^{n+1}} d\zeta - \\
&- (\bar{\sigma} u(\zeta) - iv(\zeta)) \frac{\hat{d}}{d\bar{\zeta}} \frac{\partial^{n+1}\Omega(\zeta, z)}{\partial y^{n+1}} d\bar{\zeta}.
\end{aligned}$$

Точно так же в этом случае с помощью дифференцирования под знаком обобщенного интеграла Коши можно получить (p, q) -производные (p, q) -аналитической функции $f(z)$ и ее производные по сопряженной переменной до $(n + 1)$ -го порядка.

§ 7. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА p -АНАЛИТИЧЕСКИХ И (p, q) -АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Покажем [2], что топологические свойства p -аналитических и (p, q) -аналитических функций точно такие же, как и топологические свойства аналитических функций одного комплексного переменного.

Теорема 1 (о сохранении области). *Всякая (p, q) -аналитическая функция $w = f(z) = u + iv$, отличная от тождественной постоянной, с характеристиками $p(z)$ и $q(z)$ вместе с их частными производными, правильно непрерывными в области ее определения G в плоскости $z = x + iy$, преобразует область G в область в плоскости функции $w = u + iv$.*

В самом деле, якобиан $J(z) = u_x v_y - u_y v_x$ функции $w = f(z) = u + iv$ имеет вид

$$J(z) = \begin{vmatrix} u_x & -qu_x - pu_y \\ u_y & pu_x - qu_y \end{vmatrix} = p(u_x^2 + u_y^2),$$

и, следовательно, нули этого якобиана совпадают с нулями (p, q) -производной функции $f(z)$

$$\frac{\hat{d}_{p,q} f(z)}{dz} = \frac{pu_x + qu_y + v_y}{2} + i \frac{v_x + qu_x - pu_y}{2} = p(u_x - iu_y).$$

Но $\frac{\hat{d}_{p,q} f(z)}{dz}$, в силу теоремы 2' § 3, является обобщенной аналитической функцией четвертого класса с параметрами

$$A = \frac{1}{2p} \frac{\hat{d}\sigma}{dz}, \quad B = -\frac{1}{2p} \frac{\hat{d}\sigma}{dz}, \quad \sigma = p + iq.$$

Следовательно, множество ее нулей представляет собой множество изолированных точек. Это же самое на основании сказанного выше относится к нулям якобиана $J(z)$.

Пусть z_0 — точка области G , e — ее окрестность, γ — граница e . Если $J(z_0) > 0$, то образом e в плоскости w является однолистная окрестность точки $w_0 = f(z_0)$. Это следует из хорошо известной теоремы о существовании неявных функций. Пусть $\hat{J}(z_0) = 0$. Берем окрестность e в виде круга с центром в точке z_0 настолько малой, что в $e + \gamma$ при $z \neq z_0$ выполняются такие условия: а) $J(z) > 0$, б) $f(z) \neq w_0$. Условию «б» можно удовлетворить, так как для (p, q) -аналитических функций множество A -точек, т. е. точек, в которых $f(z) = A$ (A — любое конечное число), представляет собой множество изолированных точек, как и множество 0-точек (нуль-

точек). Последнее вытекает из того, что постоянная A всегда является (p, q) -аналитической функцией при любых характеристиках p и q . Обозначим через γ' любой замкнутый контур, охватывающий точку z_0 и содержащийся в e , а через $[\arg(f(z) - \omega_0)]_{\gamma'}$ — приращение $\arg(f(z) - \omega_0)$ при обходе γ' в положительном направлении. Применяя метод, указанный в работе [77], покажем, что

$$[\arg(f(z) - \omega_0)]_{\gamma'} = 2\pi n, \quad (158)$$

где n — целое положительное число, не зависящее от γ' .

В самом деле, для всякой точки z^* , достаточной близкой к точке z_0 , найдется замкнутый контур γ^* , охватывающий точку z_0 , такой, что

$$[\arg(f(z) - f(z^*))]_{\gamma} = [\arg(f(z) - f(z^*))]_{-\gamma^* + \gamma} > 0.$$

Выберем точку z^* так, чтобы при $z \in \gamma$ выполнялись условия $f(z) \neq f(z^*)$, $|f(z) - f(z^*)| > |f(z^*) - \omega_0|$. Тогда, в силу однозначности функции $f(z)$,

$$[\arg(f(z) - f(z^*))]_{\gamma} = 2\pi n,$$

$$\begin{aligned} [\arg(f(z) - \omega_0)]_{\gamma} &= [\arg(f(z) - f(z^*))]_{\gamma} = \left[1 + \frac{f(z) - \omega_0}{f(z) - f(z^*)} \right]_{\gamma} = \\ &= [\arg(f(z) - f(z^*))]_{\gamma} = 2\pi n. \end{aligned}$$

Но функция $w = f(z)$ в замкнутой области, ограниченной кривыми γ и γ' , не принимает значение ω_0 , и, следовательно, $[\arg(f(z) - \omega_0)]_{-\gamma' + \gamma} = 0$, т. е. равенство (158) справедливо. Из (158) вытекает, что функция от z , определенная равенством $\omega = \varphi(z) = \alpha + i\beta = (f(z) - \omega_0)^{\frac{1}{n}}$, однозначна и непрерывна в $e + \gamma$. Далее, в $e + \gamma$ при $z \neq z_0$ производные этой функции непрерывны и ее якобиан

$$j(z) = \alpha_x \beta_y - \alpha_y \beta_x = \frac{1}{n^2} |f(z) - \omega_0|^{2\left(\frac{1}{n}-1\right)} J(z)$$

положителен.

Пусть E — образ e в плоскости ω . В силу того что образ γ в плоскости ω не содержит точку $\omega = 0$, найдется достаточно малый круг $|\omega| < \varepsilon$ такой, что для всякой точки ω_1 , принадлежащей этому кругу, $[\arg(\varphi(z) - \omega_1)]_{\gamma} = 2\pi$. Записав это равенство в виде

$$[\arg(\varphi(z) - \omega_1)]_{\gamma} = \sum_{k=1}^n [\arg(\varphi(z) - \omega_1)]_{\gamma_k},$$

где γ_k — замкнутые кривые, разбивающие e на q областей и такие, что на этих кривых $\varphi(z) \neq \omega_1$, убеждаемся, что существует, причем единственная, точка z_1 , принадлежащая e , такая, что $\varphi(z_1) = \omega_1$. Это значит, что множество E , включая и точку $\omega = 0$, состоит из внутренних точек, т. е. представляет собой однолистную окрестность точки $\omega = 0$. Следовательно, образом e в плоскости $\omega = u + iv$ будет n -листная окрестность точки $\omega_0 = f(z_0)$. Учитывая

теперь, что, в силу непрерывности функции $f(z)$, любые две точки образа G в плоскости $w = u + iv$ можно соединить непрерывной кривой, состоящей из точек этого образа, заключаем, что образом области G будет вполне определенная область в плоскости $w = u + iv$ ¹².

Замечание. Далеко не для всякой эллиптической системы уравнений может быть справедливой теорема о сохранении области. В этом отношении (p, q) -аналитические функции и вообще решения эллиптических систем уравнений вида (44) при $A_1 = A_2 = B_1 = B_2 = 0$ (§ 2) выгодно отличаются от решений других эллиптических систем уравнений. Например, для такой простой системы, как $u_x - v_y = 1$, $v_x + u_y = 0$, теорема о сохранении области несправедлива, так как в качестве ее решения можно взять $u = x$, $v = 0$. Несправедлива эта теорема также для обобщенных аналитических функций третьего и четвертого классов, о чем свидетельствует, например, уравнение $\frac{d\hat{f}}{dz} = i\bar{f}$, в качестве решения которого можно взять

$$f(z) = u + iv = e^{i(\bar{z}-z)} = e^{2y}.$$

Чтобы выяснить вопрос о необходимых и достаточных условиях для того, чтобы (p, q) -аналитическая функция преобразовывала однолистную окрестность в однолистную, нам понадобится установить некоторые свойства отображений, осуществляемых произвольными непрерывно дифференцируемыми функциями комплексного переменного с якобианом, отличным от нуля. Один из результатов в этом направлении получен Тейхмюллером [56]: если непрерывно дифференцируемая функция $\omega = \omega(z) = \alpha + i\beta$ с якобианом $\alpha_x\beta_y - \alpha_y\beta_x$, не обращающимся в нуль, отображает плоскость z (не расширенную) на плоскость ω (не расширенную) и для коэффициента растяжений этой функции $K(z)$ выполняется неравенство

$$K(z) < c(r), \quad \int_0^\infty (c(r) - 1) \frac{dr}{r} < \infty, \quad r = |z|,$$

то существует постоянная $\gamma > 0$ такая, что $\lim_{z \rightarrow \infty} \left| \frac{\omega(z)}{z} \right| = \gamma$. Отдельные результаты в этом направлении, получающиеся при помощи квазиконформных отображений [51, 53, 56, 81], можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 2 (о непрерывно дифференцируемых отображениях с ограниченным искажением). Пусть функция $\omega = f(z) = u + iv$,

¹² В начале теорема о сохранении области была доказана нами для p -аналитических функций [2], затем — для решений эллиптических систем вида $au_x + bu_y - v_y = 0$, $du_x + cu_y + v_x = 0$, коэффициенты которых правильно непрерывны вместе с их частными производными по x и y [5]. Некоторое ослабление ограничений, накладываемых на коэффициенты a, b, c, d , было достигнуто в работах И. И. Данилюка и Б. В. Боярского [78—80].

непрерывная и однолистная в замкнутом кольце $r_0 \leq |z| \leq 1$ ($0 < r_0 < 1$), удовлетворяет следующим условиям: а) при $|z| = 1$ $|f(z)| = 1$, при $r_0 < |z| < 1$ $|f(z)| < 1$ и $f(z) \neq 0$; б) при $r_0 < |z| < 1$ функция $f(z)$ непрерывно дифференцируема и ее коэффициент растяжений $K(z)$ ограничен некоторой постоянной $\gamma \neq \infty$. Тогда справедливы такие утверждения.

А. При $r_0 < r < 1$ ($r = |z|$)

$$\sigma(r) \leq \pi r^{\frac{2}{\gamma}}, \quad (159)$$

$$|f(z)| < \pi \sqrt[\gamma]{\frac{1}{2} \frac{1}{V|\ln|z||}}, \quad (159')$$

где $\sigma(r)$ — площадь области в плоскости w , ограниченной кривой L_r , которая является образом окружности $|z| = r$.

Б. Если $r_0 = 0$, то $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$ существует и равен нулю. Если при этом положить $f(0) = 0$, то

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leq \pi \sqrt[\gamma]{\frac{c}{2} \frac{1}{V|\ln|z_2 - z_1||}}, \quad (159'')$$

где z_1 и z_2 — любые точки замкнутого круга $|z| \leq 1$, c — постоянная, не зависящая от z_1 и z_2 .

В. Если $r_0 = 0$, $\gamma = 1 + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), $f(1) = 1$ и якобиан J функции $f(z)$ в области $0 < |z| < 1$ положителен, то $|f(z) - z| \leq \eta(\varepsilon)$, где $\eta(\varepsilon)$ — некоторая функция такая, что $\eta(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Доказательство. А. В самом деле,

$$d\sigma(r) = d \left[\pi - \int_r^1 \int_0^{2\pi} \Lambda \lambda r dr d\varphi \right] \geq \frac{1}{\gamma} \frac{dr}{r} \int_0^{2\pi} (r\Lambda)^2 d\varphi,$$

где $\Lambda = \Lambda(re^{i\varphi})$, $\lambda = \lambda(re^{i\varphi})$ — максимальное и минимальное растяжения функции $f(z)$ в точке $z = re^{i\varphi}$. В силу неравенства Буняковского — Шварца

$$d\sigma(r) \geq \frac{1}{2\pi\gamma} \frac{dr}{r} L^2(r),$$

где $L(r)$ — длина кривой L_r . Отсюда, если учесть изопериметрическое свойство окружности ($L^2(r) \geq 4\pi\sigma(r)$) и неравенство $L(r) > 2m(r)$, где $m(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$,

$$d\sigma(\rho) \geq \frac{2}{\gamma} \sigma(\rho) \frac{d\rho}{\rho}, \quad d\sigma(\rho) \geq \frac{2}{\pi\gamma} m^2(\rho) \frac{d\rho}{\rho}.$$

Интегрируя от $\rho = r$ до $\rho = 1$ и учитывая, что $m(\rho) > m(r)$, получаем

$$\ln \frac{\pi}{\sigma(r)} \geq \frac{2}{\gamma} \ln \frac{1}{r}, \quad \pi \geq \pi - \sigma(r) \geq m^2(r) \frac{2}{\pi\gamma} \ln \frac{1}{r}.$$

Эти неравенства совпадают с неравенствами (159), (159').

Б. При $r_0 = 0$ из (159') следует, что $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$ существует и равен нулю. Для доказательства неравенства (159'') рассмотрим в круге $|z| < 2$ функцию

$$\omega^* = \omega^*(z) = \begin{cases} \chi[f(z)], & |z| \leq 1, \\ \chi\left[\frac{1}{\bar{f}\left(\frac{1}{z}\right)}\right], & 1 < |z| \leq 2, \end{cases}$$

где $\chi(\omega)$ — функция, осуществляющая конформное отображение области в плоскости ω , ограниченной кривой $\omega = \frac{1}{\bar{f}\left(\frac{1}{z}\right)} \Big|_{|z|=2}$, на

круг $|\omega^*| < 2$, $\chi(0) = 0$. Положим

$$Z = Z(z) = 2 \frac{z - z_1}{4 - \bar{z}_1 z}, \quad W = 2 \frac{\omega^* - \omega^*(z_1)}{4 - \bar{\omega}^*(z_1) \omega^*}$$

и будем считать, что W — функция от Z : $W = W(Z)$. Очевидно, что $W(0) = 0$ и коэффициент растяжений функции $W(Z)$ в области $0 < |Z| < 1$ меньше или равен γ . Далее, функция $W(Z)$ непрерывно дифференцируема по X и Y ($X + iY = Z$) в области $|Z| < 1$, за исключением, может быть, точки $Z(0)$ и точек окружности, являющейся образом окружности $|z| = 1$. Но последнее обстоятельство, как легко видеть, не является препятствием для применения к функции $W(Z)$ неравенств (159) и (159'). В силу (159') в начале координат

$$|\Delta W| \leq \pi \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \frac{1}{\sqrt{|\ln |\Delta Z||}},$$

где ΔW и ΔZ — приращения соответственно W и Z . Но в силу свойств конформных отображений при $|\omega| \leq 1$

$$\left| \frac{\Delta W}{\Delta \omega} \right| > \frac{1}{c}, \quad c = \text{const} \neq \infty,$$

при $|z_2| \leq 1$

$$\left| \frac{\Delta Z}{\Delta z} \right| \leq \max_{|z| \leq 1} \left| \frac{dZ}{dz} \right| \leq \frac{8}{9} < 1.$$

Используя эти оценки и предыдущее неравенство, получаем неравенство (159'').

В. Пусть C — произвольный спрямляемый замкнутый контур в круге $|z| < 1$, D — ограниченная им область. По формуле (7)

$$\begin{aligned} \left| \int_C f(z) dz \right| &= \left| 2i \iint_D \frac{\hat{d}f(z)}{\bar{dz}} dx dy \right| \leq 2 \iint_D \frac{\Lambda - \lambda}{2} dx dy = \\ &= \iint_D \frac{K(z) - 1}{\sqrt{K(z)}} \sqrt{J} dx dy \leq \varepsilon \sqrt{\pi \iint_D J dx dy} = \varepsilon \pi. \end{aligned}$$

В силу (159'') семейство функций $\{f(z)\}$ равномерно непрерывно в замкнутом круге $|z| \leq 1$. При этом на основании полученного

неравенства для всякой предельной при $\varepsilon \rightarrow 0$ функции $f_0(z)$ справедливо равенство

$$\int_C f_0(z) dz = 0,$$

т. е. по теореме Морера $f_0(z)$ является аналитической функцией от z . Так как $J > 0$, то семейство обратных функций $\{f^{-1}(w)\}$ равномерно непрерывно в замкнутом круге $|w| \leq 1$. Поэтому функция $f_0(z)$ осуществляет однолистное конформное отображение единичного круга самого на себя, и так как $f_0(0) = 0$, $f_0(1) = 1$, то $f_0(z) \equiv z$. Вспоминая о равностепенной непрерывности семейства функций $\{f(z)\}$, приходим к выводу, что $f(z)$ равномерно стремится к z при $\varepsilon \rightarrow 0$. Теорема доказана.

Замечание. Вместо неравенств (159') и (159''), из которых следует равностепенная непрерывность семейства функций $\{f(z)\}$, можно было бы получить более строгие неравенства, но для этого пришлось бы пользоваться менее очевидными свойствами конформных отображений.

Для решения поставленного выше вопроса о сохранении однолистности окрестности докажем [2, 5] следующую лемму.

Лемма (о растяжениях). Пусть функция $\omega = \omega(z) = \alpha + i\beta$, $\omega(0) = 0$ ($z = x + iy$), осуществляет взаимно однозначное и непрерывное отображение круга $|z| < 1$ на круг $|\omega| < 1$. Пусть в области $0 < |z| < 1$ α и β имеют непрерывные производные по x и y и якобиан $\alpha_x \beta_y - \alpha_y \beta_x$ отличен от нуля. Тогда справедливы такие утверждения.

A¹³. Если коэффициент растяжений $K(z)$ ($z \neq 0$) функции $\omega(z)$ стремится к единице при $z \rightarrow 0$, то $K(0) = 1$.

Б. Если $K(z)$ ($z \neq 0$) удовлетворяет условию $K(z) - 1 < M|z|^\gamma$, где M и γ — положительные постоянные, то существуют положительные постоянные A и B такие, что в области $0 < |z| < 1$ выполняются неравенства

$$A \leq \left| \frac{\omega(z)}{z} \right| \leq B. \quad (159''')$$

Доказательство. А. Покажем, что из условия $\lim_{z \rightarrow 0} K(z) = 1$ следует $K(0) = 1$. Допустим, что существует последовательность окружностей $|z| = r_k$, $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = 0$, для которой

$$\frac{a_k}{b_k} > q = \text{const} > 1, \quad a_k = \max_{|z|=r_k} |\omega(z)|, \quad b_k = \min_{|z|=r_k} |\omega(z)|.$$

Рассмотрим функции

$$\omega_k(z) = \frac{1}{b_k} \omega(r_k n z), \quad b_k^* = \min_{|z|=r_k n} |\omega(z)|,$$

где k — такие целые положительные числа, что $r_k n < 1$, n — такое положительное число, что для всякого однолистного конформного

¹³ Обратное неверно; для функции $\omega(z) = \bar{z}z^2$ $K(0) = 1$, $\lim_{z \rightarrow 0} K(z) = 2$.

отображения $f_k(z)$, $f_k(0) = 0$, $f_k(1) = \omega_k(1)$, круга $|z| < 1$ на область D_k , являющуюся подобным расширением образа круга $|z| = r_k n$ в плоскости ω с коэффициентом подобия $\frac{1}{b_k}$, справедливо неравенство

$$\max_{|z|=\frac{1}{n}} |f_k(z)| \leq (q - \varepsilon) \min_{|z|=\frac{1}{n}} |f_k(z)|,$$

где ε — малое положительное число. При этом число n ни от r_k ни от $f_k(z)$ не зависит, так как функции $f_k(z)$, в силу их аналитичности, однолиственности и нормировки ($f_k(0) = 0$, $f_k(1) = \omega_k(1)$), образуют множество функций, равностепенно непрерывных в круге $|z| < 1$. Положим $\zeta_k = \zeta_k(z) = f_k^{-1}[\omega_k(z)]$. Функция $\zeta_k(z)$ осуществляет взаимно однозначное непрерывное отображение замкнутого круга $|z| \leq 1$ на замкнутый круг $|\zeta_k| \leq 1$, $\zeta_k(0) = 0$, $\zeta_k(1) = 1$. Коэффициент растяжений $K_k(z)$ этой функции в области $0 < |z| < 1$ совпадает с $K(r_k n z)$ и, следовательно, равномерно стремится к единице при $k \rightarrow \infty$. Поэтому функции $\zeta_k(z)$ ($k = 1, 2, \dots$), в силу теоремы о непрерывно дифференцируемых отображениях, равностепенно непрерывны в замкнутом круге $|z| \leq 1$, и из последовательности этих функций можно выбрать подпоследовательность (обозначим ее опять через $\zeta_k(z)$), равномерно сходящуюся в замкнутом круге $|z| \leq 1$ к функции $\zeta(z) \equiv z$. Выбрав k так, чтобы

$$|f_k(z) - f_k(\zeta_k(z))|_{|z|=\frac{1}{n}} = |f_k(z) - \omega_k(z)|_{|z|=\frac{1}{n}} \leq \frac{\varepsilon}{n(1+q)},$$

получаем

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{\max_{|z|=r_k} |\omega(z)|}{\min_{|z|=r_k} |\omega(z)|} = \frac{\max_{|z|=\frac{1}{n}} |\omega_k(z)|}{\min_{|z|=\frac{1}{n}} |\omega_k(z)|} \leq \frac{\max_{|z|=\frac{1}{n}} |f_k(z)| + \frac{\varepsilon}{n(1+q)}}{\min_{|z|=\frac{1}{n}} |f_k(z)| - \frac{\varepsilon}{n(1+q)}}.$$

Так как область D_k содержит единичный круг, то, в силу известного принципа Линделефа, $\min_{|z|=\frac{1}{n}} |f_k(z)| > \frac{1}{n}$ и, следовательно, $\frac{a_k}{b_k} \leq$

$\leq q$. Но это противоречит строгому неравенству $\frac{a_k}{b_k} > q$, и, следовательно, $K(0) = 1$.

Б. Пусть $\sigma(r)$ — площадь образа круга $|z| < r$ в плоскости ω . Так же как и ранее, находим

$$d\sigma(r) \geq \frac{dr L^2(r)}{2\pi r Q(r)},$$

где $Q(r) = \max_{|z|=r} K(z)$, $L(r)$ — длина образа окружности $|z| = r$ в плоскости ω . Учитывая неравенства

$$L^2(r) \geq 4\pi\sigma(r), \quad K(z) - 1 \leq M|z|^v,$$

получаем

$$d\sigma(r) \geq \frac{2\sigma(r) dr}{r(1+Mr^\gamma)}.$$

Отсюда, интегрируя от r до единицы, находим

$$\ln \sigma(r) \Big|_r^1 \geq 2 \int_r^1 \left[\frac{1}{r} - \frac{Mr^{\gamma-1}}{1+Mr^\gamma} \right] dr,$$

или

$$\sigma(r) \leq \pi r^2 \left(\frac{1+M}{1+Mr^\gamma} \right)^{\frac{2}{\gamma}}.$$

Так как $K(0) = 1$, то

$$\sqrt{\sigma(r)} \geq \sqrt{\pi} \min_{|z|=r} |\omega(z)| \geq C \sqrt{\pi} \max_{|z|=r} |\omega(z)|, \quad C = \text{const} > 0.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{r} \max_{|z|=r} |\omega(z)| \leq \frac{1}{C} \left(\frac{1+M}{1+Mr^\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \leq B.$$

Чтобы получить неравенство $\left| \frac{\omega(z)}{z} \right| \geq A$, обозначим через $\sigma(\rho)$ площадь образа круга $|\omega| < \rho$ в плоскости $z = \psi(\omega)$. Как и в предыдущем случае,

$$d\sigma(\rho) = \rho d\rho \int_0^{2\pi} \Lambda_1^2(\rho e^{i\theta}) \frac{d\theta}{K(z)} \geq \frac{d\rho}{\rho K(z_1)} \int_0^{2\pi} \rho^2 \Lambda_1^2(\rho e^{i\theta}) d\theta,$$

где $\Lambda_1(\rho e^{i\theta})$ — максимальное растяжение в точке $\omega = \rho e^{i\theta}$, $K(z_1)$ — наибольшее значение $K(z)$ на окружности $|\omega| = \rho$. Поскольку $K(z) \leq 1 + M|z|^\gamma$,

$$(1 + M|z_1|^\gamma) d\sigma(\rho) \geq \frac{d\rho}{\rho} \int_0^{2\pi} \rho^2 \Lambda_1^2(\rho e^{i\theta}) d\theta,$$

или

$$(1 + M \max_{|\omega|=\rho} |\psi(\omega)|^\gamma) \frac{d\sigma(\rho)}{\sigma(\rho)} \geq \frac{2d\rho}{\rho}.$$

Отсюда, в силу того что $K(0) = 1$,

$$(1 + M_1 \min_{|\omega|=\rho} |\psi(\omega)|^\gamma) \frac{d\sigma(\rho)}{\sigma(\rho)} \geq \frac{2d\rho}{\rho}, \quad M_1 = \text{const},$$

или

$$(1 + M_2 [\sigma(\rho)]^{\frac{\gamma}{2}}) \frac{d\sigma(\rho)}{\sigma(\rho)} \geq \frac{2d\rho}{\rho}, \quad M_2 = \text{const}.$$

Интегрируя это неравенство от ρ до единицы и учитывая, что $K(0) = 1$, получаем

$$\frac{\rho}{\max_{|\omega|=\rho} |\psi(\omega)|} \geq \frac{1}{M_3} e^{-E(\rho)} \geq A > 0, \quad E(\rho) = \frac{M_2}{2} \int_\rho^1 \frac{d\sigma(\rho)}{[\sigma(\rho)]^{-\frac{\gamma}{2}}},$$

$$A, M_3 = \text{const},$$

или, что то же самое (в силу взаимной однозначности отображения $z = \psi(\omega)$),

$$\frac{1}{r} \min_{|z|=r} |\omega(z)| \geq A > 0.$$

Лемма доказана ¹⁴.

Замечание. Для функции $\omega(z) = \frac{z}{1 - \ln z \bar{z}}$

$$\lim_{z \rightarrow 0} K(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\left| \frac{\widehat{d\omega}}{dz} \right| + \left| \frac{\widehat{d\omega}}{d\bar{z}} \right|}{\left| \frac{\widehat{d\omega}}{dz} \right| - \left| \frac{\widehat{d\omega}}{d\bar{z}} \right|} = 1$$

и все условия леммы о растяжениях выполнены, кроме неравенства $K(z) - 1 < M|z|^\nu$, следовательно, только этим можно объяснить тот факт, что для данной функции $\lim_{z \rightarrow 0} \left| \frac{\omega(z)}{z} \right| = 0$.

Отметим, что система уравнений (p, q) -аналитических функций $f(z) = u + iv$ (55) при помощи неособых аффинных преобразований

$$\xi = x - x_0, \quad \eta = y - y_0,$$

$$\varphi = p_0 u, \quad \psi = v - q_0 u,$$

где $p_0 = p(z_0)$, $q_0 = q(z_0)$, переходит в систему

$$\left. \begin{aligned} \varphi_\xi - \psi_\eta &= \frac{p_0 - p}{p_0} \varphi_\xi + \frac{q_0 - q}{p_0} \varphi_\eta, \\ \varphi_\xi + \varphi_\eta &= -\frac{q_0 - q}{p_0} \varphi_\xi + \frac{p_0 - p}{p_0} \varphi_\eta, \end{aligned} \right\} \quad (160)$$

вырождающуюся в точке $\zeta = \xi + i\eta = 0$, соответствующей точке z_0 , в условия Коши — Римана. В этом нетрудно убедиться с помощью непосредственной проверки.

Теорема 3 (о сохранении однолистной окрестности). Для того чтобы (p, q) -аналитическая функция $f(z) = u + iv$ с характеристиками p или q , имеющими правильно непрерывные частные производные по x и y , преобразовывала однолистную окрестность точки $z_0 = x_0 + iy_0$ в однолистную окрестность точки $\omega_0 = f(z_0)$, необходимо и достаточно, чтобы ее (p, q) -производная $\frac{\hat{d}_{p,q} f(z)}{dz}$ в точке z_0 отличалась от нуля.

В самом деле, в силу того что нули (p, q) -производной (p, q) -аналитической функции $f(z) = u + iv$ и нули ее якобиана $J = u_x v_y - v_x u_y = p(u_x^2 + u_y^2)$ совпадают, достаточно показать, что если однолистная окрестность точки z_0 переходит в однолистную окрестность точки $\omega_0 = f(z_0)$, то частные производные u_x, u_y, v_x, v_y не могут одновременно обратиться в нуль в точке z_0 . Перейдем

¹⁴ Лемма может быть обобщена и уточнена.

от плоскостей $z = x + iy$ и $w = f(z) = u + iv$ соответственно к плоскостям $\zeta = \xi + i\eta$ и $\omega = \Phi(z) = \varphi + i\psi$. При этом условия (p, q) -аналитичности (55) перейдут в систему уравнений (160), которую можно записать в виде

$$\frac{\widehat{d\Phi}}{d\bar{\zeta}} (1 - A) = A \frac{\widehat{d\Phi}}{d\bar{\zeta}}, \quad (160')$$

где

$$A = \frac{p_0 - p}{2p_0} - i \frac{q_0 - q}{2p_0}.$$

В силу формул (11) и (16) коэффициент растяжений

$$K(\zeta) = \frac{\left| \frac{\widehat{d\Phi}}{d\bar{\zeta}} \right| + \left| \frac{\widehat{d\Phi}}{d\bar{\zeta}} \right|}{\left| \frac{\widehat{d\Phi}}{d\bar{\zeta}} \right| - \left| \frac{\widehat{d\Phi}}{d\bar{\zeta}} \right|}.$$

Отсюда на основании (160')

$$K(\zeta) = \frac{1 + \left| \frac{A}{1-A} \right|}{1 - \left| \frac{A}{1-A} \right|},$$

и, следовательно, $K(\zeta)$ стремится к единице при $\zeta \rightarrow 0$. Существенно, что

$$K(\zeta) - 1 < M |\zeta|, \quad M = \text{const}$$

Поэтому на основании леммы о растяжениях, частные производные $\varphi_{\xi}, \varphi_{\eta}, \psi_{\xi}, \psi_{\eta}$ не могут одновременно обратиться в нуль в точке $\zeta = 0$. Следовательно, u_x, u_y, v_x, v_y не обращаются в нуль одновременно в точке z_0 . А это означает, что $J(z_0) \neq 0$, $\frac{\widehat{d_{p,q}f(z)}}{dz} \Big|_{z=z_0} \neq 0$.

Теорема доказана.

Теорема 4 (о соответствии границ). Пусть $w = f(z) = u + iv$ — функция, (p, q) -аналитическая в области D в плоскости $z = x + iy$ с характеристиками $p(z)$ и $q(z)$, удовлетворяющими в области D условиям

$$0 < t \leq p(z) \leq M, \quad |q(z)| \leq M, \quad (161)$$

где M и t — постоянные. Пусть D^* — область в плоскости $w = u + iv$, в которую преобразуется область D при помощи функции $f(z) = u + iv$. Тогда, если все граничные точки C и C^* областей соответственно D и D^* достижимы, то функция $w = f(z)$ и её обратная функция $z = f^{-1}(w)$ равномерно непрерывны в замкнутых областях соответственно $D + C$ и $D^* + C^*$ и описывают взаимно однозначное и непрерывное соответствие между точками этих замкнутых областей.

В самом деле, коэффициент растяжений $K(z) = \frac{\Lambda(z)}{\lambda(z)}$ имеет вид

$$K(z) = \frac{|1+p-iq|+|1-p+iq|}{|1+p-iq|-|1-p+iq|},$$

и, следовательно, в силу (161), коэффициент $K(z)$ ограничен в области D :

$$1 \leq K(z) \leq N = \text{const} < \infty.$$

Пусть все точки C и C^* достижимы. Предположим, что утверждения теоремы неверны, т. е. функция $w = f(z)$ не будет равномерно непрерывной в области D . Это значит, что в области D найдется два жордановых полуинтервала Γ_1 и Γ_2 , определяющих одну и ту же граничную точку P (рис. 5), таких, что расстояние между их образами в области D^* будет превышать фиксированное положительное число. Расстояние измеряется вдоль кратчайших кривых, составленных из точек области D^* . Поэтому можем положить

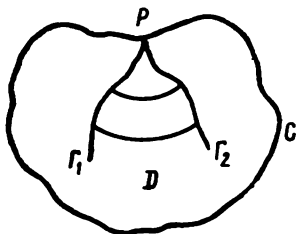


Рис. 5.

$$0 < \beta \leq \int_{\theta_{1r}}^{\theta_{2r}} \left| \frac{df(z)}{ds} \right| r d\theta,$$

где θ_{1r} и θ_{2r} — аргументы точек пересечения Γ_1 и Γ_2 с окружностью радиуса r с центром в точке P , $\frac{df(z)}{ds}$ — производная функции $f(z)$ в направлении указанной дуги окружности (см. рис. 5). Из последнего неравенства находим

$$\frac{\beta^2}{r} \leq r \left(\int_{\theta_{1r}}^{\theta_{2r}} \left| \frac{df(z)}{ds} \right| d\theta \right)^2 \leq 2\pi r \int_{\theta_{1r}}^{\theta_{2r}} \left| \frac{df(z)}{ds} \right| d\theta.$$

Интегрируя обе части этого неравенства в пределах от ε до некоторого R , получаем

$$\beta^2 \ln \frac{R}{\varepsilon} \leq 2\pi \int_{\theta_{1r}}^{\theta_{2r}} d\theta \int_{\varepsilon}^R \left| \frac{df(z)}{ds} \right|^2 r dr.$$

Отсюда

$$\beta^2 \ln \frac{R}{\varepsilon} \leq 2\pi \int_{\theta_{1r}}^{\theta_{2r}} d\theta \int_{\varepsilon}^R \Lambda^2(z) r dr,$$

или

$$\beta^2 \ln \frac{R}{\varepsilon} \leq 2\pi N \int_{\theta_{1r}}^{\theta_{2r}} d\theta \int_{\varepsilon}^R \Lambda(z) \lambda(z) r dr = 2\pi NS,$$

где S — верхняя грань площади областей, содержащихся в D . При $\varepsilon \rightarrow 0$ приходим к противоречию. Это значит, что функция

$w = f(z)$ равномерно непрерывна в D и каждую достижимую точку, принадлежащую C , переводит в соответствующую единственную достижимую точку, принадлежащую C^* . Точно такой же результат получается для функции $z = f^{-1}(w)$, только области D и D^* меняются ролями. Теорема доказана.

Следствие. Если область D представляет собой круг $|z| < 1$, то, для того чтобы функция $w = f(z)$ устанавливала взаимно однозначное и непрерывное соответствие между точками замкнутых областей $|z| \leq 1$ и $D^* + C^*$, необходимо и достаточно, чтобы граница C^* области D^* была жордановой кривой.

В математической физике, и в частности в механике сплошных сред, часто встречаются краевые задачи для (p, q) -аналитических функций для областей, ограниченных двумя линиями тока, т. е. линиями, на которых $v = \text{const}$, и двумя потенциальными линиями, на которых $u = \text{const}$. Схема такой области G указана на рис. 6, где краевые условия имеют вид: на потенциальных линиях

$$u|_{AB} = 0, \quad u|_{DC} = H = \text{const} > 0,$$

на линиях тока

$$v|_{AD} = c = \text{const}, \quad v|_{BC} = c + Q = \text{const} > c.$$

Основной интерес при решении такого рода задач часто представляют вопросы о поведении $\nabla u = u_x + iu_y$ на границе области, о взаимосвязи постоянных H и Q и о поведении потенциальных линий $u = \text{const}$ и линий тока $v = \text{const}$ внутри области G . Установленные нами топологические свойства (p, q) -аналитических функций, теорема о сохранении области и теорема о соответствии границ позволяют сразу же получить некоторые качественные результаты, относящиеся к этим вопросам. Ограничимся здесь только формулировкой основных результатов в виде так называемых вариационно-топологических теорем сравнения. Более подробно эти результаты рассмотрены при решении задач прикладного характера из механики сплошных сред с помощью так называемого метода мажорантных областей.

Пусть $w = f(z) = u + iv$ — комплексный потенциал, соответствующий области G , т. е. (p, q) -аналитическая в G функция от $z = x + iy$, удовлетворяющая указанным выше краевым условиям, $L = AB + DC + AD + BC$, $L' = AB + DC$ (см. рис. 6). Пусть, далее, $G_1 \subset G$ — область, получающаяся из G при вариации ее граничных потенциальных линий и линий тока; $w_1 = f_1(z) = u_1 + iv_1$ — комплексный потенциал, соответствующий области

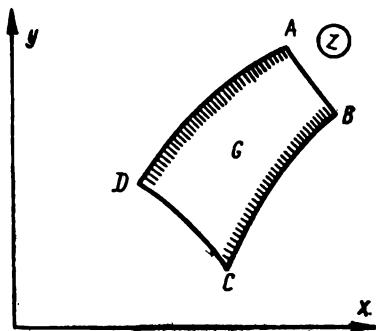


Рис. 6.

G_1 , и вообще все величины, взятые с единицей в индексе снизу, относятся к области G_1 . При замене области G областью G_1 значение потенциальной функции u на линии наименьшего потенциала AB и ей соответствующей потенциальной линии условимся все время считать равным нулю, а под соответствующими линиями тока будем понимать линии $v(x, y) = v_1(x, y) = \text{const}$. При замене области G областью G_1 за счет изменения краевых условий смещением одной из точек A, B, C, D вдоль границы G или за счет вдавливания одной из граничных потенциальных линий и линий тока, но при неизменных точках их раздела и при неизменном значении H справедливы следующие теоремы.

Теорема 5. При уменьшении потенциальной линии а) $Q_1 < Q$; б) $|\nabla u_1| > |\nabla u|$ на неизменной части уменьшаемой потенциальной линии и вблизи ее конца на неизменной линии тока, $|\nabla u_1| < |\nabla u|$ на неизменной части увеличиваемой линии тока, на неизменной потенциальной линии и вблизи ее конца на неизменной линии тока; в) в $G_1 + L_1 - L'_1 L'$ $u_1 > u$, если уменьшается потенциальная линия наименьшего потенциала, и $u_1 < u$, если уменьшается потенциальная линия наибольшего потенциала; г) линии тока в $G_1 + L_1$ отодвигаются от увеличенной линии тока, если последнюю считать соответствующей самой себе.

Теорема 6. При вдавливании потенциальной линии а) $Q_1 > Q$; б) $|\nabla u_1| > |\nabla u|$ на неизменной потенциальной линии и вблизи ее концов на линиях тока, $|\nabla u_1| < |\nabla u|$ на неизменной части вдавливаемой потенциальной линии и вблизи ее концов на линиях тока; в) в $G_1 + L_1 - L'_1 L'$ $u_1 > u$, если вдавливается потенциальная линия наибольшего потенциала, и $u_1 < u$, если вдавливается потенциальная линия наименьшего потенциала.

Теорема 7. При вдавливании линии тока а) $Q_1 < Q$; б) $|\nabla u_1| < |\nabla u|$ на неизменной части вдавливаемой линии тока и на одной из потенциальных линий, кроме того, на другой потенциальной линии или $|\nabla u_1| < |\nabla u|$, или $|\nabla u_1| < |\nabla u|$ вблизи ее конца, примыкающего к вдавливаемой линии тока, и $|\nabla u_1| > |\nabla u|$ вблизи другого ее конца, причем на неизменной линии тока в первом случае $|\nabla u_1| < |\nabla u|$ вблизи концов и $|\nabla u_1| > |\nabla u|$ вне концов, а во втором — $|\nabla u_1| < |\nabla u|$ вблизи конца ее, примыкающего к потенциальной линии, на которой $|\nabla u_1| < |\nabla u|$ и $|\nabla u_1| > |\nabla u|$ вблизи другого ее конца; в) на неизменной части вдавливаемой линии тока $u_1 > u$ со стороны линии наибольшего потенциала и $u_1 < u$ со стороны линии наименьшего потенциала; г) линии тока в $G_1 + L_1$ отодвигаются от вдавленной линии тока, если последнюю считать соответствующей самой себе.

При этих же условиях, но при неизменном значении Q справедливы, соответственно, следующие теоремы.

Теорема 5а. При уменьшении потенциальной линии а) $H_1 > H$; б) $|\nabla u_1| > |\nabla u|$ на неизменной части уменьшаемой потенциальной линии, на неизменной линии тока и вблизи ее конца на

неизменной потенциальной линии, $|\nabla u_1| < |\nabla u|$ на неизменной части увеличиваемой линии тока и вблизи ее конца на неизменной потенциальной линии; в) $u_1 > u$ в $G_1 + L_1$ вне неизменной части уменьшаемой потенциальной линии, если уменьшается потенциальная линия наименьшего потенциала, если же уменьшается потенциальная линия наибольшего потенциала, то $u_1 > u$ на неизменной ее части и на неизменной линии тока и $u_1 < u$ на неизменной части увеличиваемой линии тока; г) линии тока в $G_1 + L'$ отодвигаются от увеличенной линии тока, если последнюю считать соответствующей самой себе.

Теорема 6а. При вдавливании потенциальной линии а) $H_1 < H$; б) $|\nabla u_1| < |\nabla u|$ на неизменной части вдавливаемой потенциальной линии и на одной из линий тока, кроме того, на другой линии тока или $|\nabla u_1| < |\nabla u|$, или $|\nabla u_1| < |\nabla u|$ вблизи ее конца, примыкающего к вдавливаемой потенциальной линии, и $|\nabla u_1| > |\nabla u|$ вблизи другого ее конца, причем на неизменной потенциальной линии в первом случае $|\nabla u_1| < |\nabla u|$ вблизи концов и $|\nabla u_1| > |\nabla u|$ вне ее концов, а во втором — $|\nabla u_1| < |\nabla u|$ вблизи конца ее, примыкающего к линии тока, на которой $|\nabla u_1| < |\nabla u|$ и $|\nabla u_1| > |\nabla u|$ вблизи другого ее конца; в) $u_1 < u$ в $G_1 + L_1$ вне неизменной части вдавливаемой потенциальной линии, если вдавливается линия наименьшего потенциала, если же вдавливается линия наибольшего потенциала, то $u_1 < u$ на неизменной ее части, на одной из линий тока и на другой линии тока вблизи ее конца, примыкающего к вдавливаемой потенциальной линии.

Теорема 7а. При вдавливании линии тока а) $H_1 > H$; б) $|\nabla u_1| > |\nabla u|$ на неизменной линии тока и вблизи ее концов на потенциальных линиях, $|\nabla u_1| < |\nabla u|$ на неизменной части вдавливаемой линии тока и вблизи ее концов на потенциальных линиях; в) $u_1 > u$ на неизменной линии тока, а на неизменной части вдавливаемой линии тока $u_1 > u$ и со стороны потенциальной линии наибольшего потенциала и $u_1 < u$ со стороны линии наименьшего потенциала; г) линии тока в $G_1 + L'$ отодвигаются от вдавленной линии тока, если последнюю считать соответствующей самой себе.

§ 8. ОБЩИЕ СВОЙСТВА РЯДОВ И ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ p -АНАЛИТИЧЕСКИХ И (p, q) -АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Теорема 1 (аналог теоремы Вейерштрасса о равномерно сходящихся рядах аналитических функций). Пусть $p(z)$ и $q(z)$ — регулярные характеристики в некоторой области G в плоскости $z = x + iy$, имеющие непрерывные частные производные по x и y до n -го порядка, причем последние производные n -го порядка правильно непрерывны в G , D — односвязная область, содержащаяся внутри G и ограниченная спрямляемым кусочно-монотонным контуром C .

¹⁵ Это означает, что для данных характеристик $p(z)$ и $q(z)$ в области G существуют правильные сопряженные ядра $\Omega(\zeta, z)$ и $\bar{\Omega}(\zeta, z)$.

Пусть дан ряд

$$f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_k(z) + \dots, \quad f_k(z) = u_k + iv_k, \quad (162)$$

составленный из функций, (p, q) -аналитических в D и непрерывных в замкнутой области $D + C$. Если этот ряд равномерно сходится на C , то

а) он равномерно сходится в замкнутой области $D + C$;

б) сумма этого ряда $f(z)$ есть функция, (p, q) -аналитическая в D и непрерывная в $D + C$;

в) данный ряд в области D можно почленно дифференцировать по x и y $n + 1$ раз, при этом ряды, составленные из производных членов данного ряда, равномерно сходятся внутри области D (т. е. во всякой замкнутой области, содержащейся в D) и суммы их равны соответствующим производным функции $f(z)$.

Прежде всего на основании принципа максимума модуля (p, q) -аналитических функций заключаем, что из равномерной сходимости на C следует равномерная сходимость и непрерывность суммы ряда $f(z)$ в $D + C$. Пусть теперь $\Omega(\zeta, z)$ и $\tilde{\Omega}(\zeta, z)$ — правильные сопряженные ядра, соответствующие данным характеристикам $p(z)$ и $q(z)$ в области G . Подставляем в (162) вместо переменной z переменную ζ и каждый член ряда (162) представляем в виде суммы вещественной и мнимой частей, $u_k(\zeta)$ умножаем на $\frac{1}{2\pi i} d\tilde{\Omega}(\zeta, z)$, $iv_k(\zeta)$ — на $\frac{1}{2\pi i} d\Omega(\zeta, z)$. Равномерная сходимость ряда при $\zeta \subset C$ не нарушается. Интегрируя по C , получаем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(\zeta) d_{p,q}\Omega(\zeta, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_C f_k(\zeta) d_{p,q}\Omega(\zeta, z).$$

Но в силу обобщенной формулы Коши для (p, q) -аналитических функций

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f_k(\zeta) d_{p,q}\Omega(\zeta, z) = f_k(z), \quad k = 1, 2, \dots,$$

и, следовательно, сумма ряда (162) в области D представима в виде обобщенного интеграла типа Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\zeta) d_{p,q}\Omega(\zeta, z).$$

Отсюда следует, что $f(z)$ есть функция, (p, q) -аналитическая в D и имеющая в этой области непрерывные производные по x и y до $(n + 1)$ -го порядка, причем последние производные $(n + 1)$ -го порядка внутри D правильно непрерывны (§ 6). Члены ряда (162) также обладают последним свойством, т. е. имеют в области D непрерывные производные по x и y до $(n + 1)$ -го порядка, причем производные $(n + 1)$ -го порядка правильно непрерывны внутри D .

Заменяя теперь $d\tilde{\Omega}(\zeta, z)$ и $d\Omega(\zeta, z)$ на

$$d \frac{\partial^m}{\partial x^i \partial y^j} \tilde{\Omega}(\zeta, z), \quad d \frac{\partial^m}{\partial x^i \partial y^j} \Omega(\zeta, z), \quad i + j = m \leq n + 1,$$

приходим к равенству

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_C u(\zeta) d \frac{\partial^m}{\partial x^i \partial y^j} \tilde{\Omega}(\zeta, z) + i v(\zeta) d \frac{\partial^m}{\partial x^i \partial y^j} \Omega(\zeta, z) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_C u_k(\zeta) d \frac{\partial^m}{\partial x^i \partial y^j} \tilde{\Omega}(\zeta, z) + i v_k(\zeta) d \frac{\partial^m}{\partial x^i \partial y^j} \Omega(\zeta, z). \end{aligned}$$

Ряд в правой части этого равенства равномерно сходится во всякой замкнутой области, лежащей в D , так как ряды $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(\zeta)$ и $\sum_{k=1}^{\infty} v_k(\zeta)$ равномерно сходятся на C , а

$$d \frac{\partial^m}{\partial x^i \partial y^j} \tilde{\Omega}(\zeta, z), \quad d \frac{\partial^m}{\partial x^i \partial y^j} \Omega(\zeta, z)$$

непрерывны по ζ на C равномерно относительно точки z , принадлежащей той или иной замкнутой области, содержащейся в D . С другой стороны, последнее равенство, в силу правила дифференцирования интеграла типа Коши (p, q) -аналитических функций (§ 6), можно записать в виде

$$\frac{\partial^m f(z)}{\partial x^i \partial y^j} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^m f_k(z)}{\partial x^i \partial y^j}.$$

Теорема доказана.

Как известно, множество функций той или иной природы, определенных в какой-либо области T , называется компактным в этой области, если из всякой его бесконечной последовательности можно выбрать подпоследовательность, равномерно сходящуюся к предельной функции во всякой наперед заданной замкнутой области, содержащейся в области T . Говорят, что данное множество функций той или иной природы, определенных в области T , образует равномерно ограниченное в T множество функций, если существует положительная постоянная M такая, что каждая из функций данного множества по абсолютной величине не превышает M .

Теорема 2 (о компактности равномерно ограниченного множества (p, q) -аналитических функций). Пусть характеристики $p(z)$ и $q(z)$ регулярны в односвязной области D и дано множество E функций, (p, q) -аналитических в области D . Если это множество функций равномерно ограничено в области D , то оно компактно в этой области.

В самом деле, пусть D' — область, лежащая вместе со своей границей C' в области D , C'' — спрямляемый контур, лежащий внутри D и содержащий внутри $D' + C'$, z_1 и z_2 — любые точки,

принадлежащие $D' + C'$, $\Omega(\zeta, z)$ и $\tilde{\Omega}(\zeta, z)$ — правильные сопряженные ядра, соответствующие данным характеристикам $p(z)$ и $q(z)$ в области D . Для всякой функции $f(z) \in E$

$$f(z_1) - f(z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C''} f(\zeta) [d_{p,q}\Omega(\zeta, z_1) - d_{p,q}\Omega(\zeta, z_2)] \ll \\ \ll \frac{M}{2\pi} \int_{C''} |d_{p,q}\Omega(\zeta, z_1) - d_{p,q}\Omega(\zeta, z_2)|.$$

Правую часть этого неравенства можно сделать меньшей наперед заданного числа ε , как только $|z_1 - z_2| < \delta$, где δ — число, не зависящее от функции $f(z)$, важно только, что $f(z) \in E$. Это означает, что данное множество функций E равностепенно непрерывно в $D' + C'$. Отсюда, в силу теоремы Арцела, заключаем, что из всякого бесконечного множества функций, принадлежащих E , можно выбрать подпоследовательность, равномерно сходящуюся в $D' + C'$. Теорема доказана.

§ 9. КЛАССИФИКАЦИЯ И ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОСОБЫХ ТОЧЕК p -АНАЛИТИЧЕСКИХ И (p, q) -АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Под окрестностью точки z_0 нерасширенной комплексной плоскости $z = x + iy$ условимся понимать множество точек $0 < |z - z_0| < \varepsilon$, где ε — сколь угодно малое число, под окрестностью точки $z_0 = \infty$ — множество точек $R < |z| < \infty$, где R — сколь угодно большое число. Пусть $\omega(z) = \alpha + i\beta$ — функция комплексного переменного $z = x + iy$ общего вида в соответствии с определением, данным в § 1.

Следуя работе [3], точку z_0 расширенной плоскости $z = x + iy$, в окрестности которой однозначная функция $\omega(z) = \alpha + i\beta$ комплексного переменного $z = x + iy$ определена и непрерывна, будем называть устранимой особой точкой, если $\lim_{z \rightarrow z_0} \omega(z)$ существует и конечен; полюсом, если $\lim_{z \rightarrow z_0} \omega(z)$ существует и равен бесконечности; существенно особой точкой, если $\lim_{z \rightarrow z_0} \omega(z)$ не существует, или, что то же самое, зависит от способа стремления точки z к точке z_0 . Например, точка $z_0 = 0$ будет устранимой особой точкой для функции $\omega(z) = 2x + iy$ при $z \neq 0$ и $\omega(z) = 1$ при $z = 0$; полюсом для функций $\omega(z) = (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{4}}$, $\omega(z) = \frac{1}{z}$, $\omega(z) = \ln|z|$; существенно особой точкой для функции $\omega(z) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + i$.

В работе [3] впервые был поставлен и решен вопрос о классификации особых точек функций, определенных системой уравнений (51). Установлена следующая лемма.

Лемма 1 (об особых точках). Пусть функция $\Phi(z) = \varphi + i\psi$ комплексного переменного $z = x + iy$, в окрестности точки $z_0 \neq \infty$ однозначная и непрерывная вместе со своими частными производными по x и y первого порядка, удовлетворяет системе уравнений (51), где A и B — однозначные функции от z , непрерывные и ограниченные в окрестности точки z_0 .

А. Если для некоторого целого числа n ($n \geq 0$ или $n < 0$) в окрестности точки z_0 справедливо неравенство

$$|\Phi(z)(z - z_0)^n| < \frac{M}{|z - z_0|^{1-\delta}},$$

где M и δ — положительные постоянные, то точка z_0 является устранимой особой точкой функции $\chi(z) = \Phi(z)(z - z_0)^n$ и

$$|\chi(z) - \chi(z_0)| < M' |z - z_0|^{1-\delta'}, \quad M' = \text{const}, \quad (162')$$

где δ' — сколь угодно малое положительное число.

Б. Если точка z_0 — существенно особая точка функции $\Phi(z)$, то в окрестности этой точки функция $\Phi(z)$ принимает значения, сколь угодно близкие к любому конечному или равному бесконечности комплексному числу C .

В. Если z_0 — точка накопления нулей функции $\Phi(z)$, не равной тождественно нулю, то точка z_0 является существенно особой точкой функции $\Phi(z)$ и при всяком целом положительном числе n

$$\lim_{r \rightarrow 0} \max_{|z - z_0| = r} |\Phi(z)(z - z_0)^n| = \infty.$$

Содержание этой леммы, как видим, сводится к тому, что классификация и общие свойства особых точек функций, определенных системой уравнений (51), по существу остаются такими же, как и для аналитических функций одного комплексного переменного. Например, нули и полюсы функций, определенных системой уравнений (51), могут быть только целочисленного порядка, при этом справедлива теорема Сохоцкого — Вейерштрасса о поведении функции в окрестности существенно особой точки. К такому же выводу, но при несколько более общих предположениях о коэффициентах A и B системы уравнений (51) пришли, как отмечалось во введении, Л. Берс [37, 36, 44]¹⁶ и И. Н. Векуа [40, 41].

Приведем доказательство сформулированной леммы об особых точках.

А. Функция $\chi(z) = \Phi(z)(z - z_0)^n$ в силу (53) удовлетворяет уравнению

$$\frac{\widehat{d}\chi}{dz} = A\chi + B \frac{(z - z_0)^n}{(z - z_0)^n} \bar{\chi}$$

¹⁶ Формулируя результаты по классификации особых точек функций, определенных системой уравнений (51) в виде теорем, Л. Берс [37, стр. 22—23, 173] указывает, что эти теоремы впервые были установлены Г. Н. Положим [2, 3].

и в соответствии с формулой (9) в окрестности e точки z_0 , $|z - z_0| < \rho$, при $z \neq z_0$ представима в виде

$$\chi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\chi(\xi) d\xi}{\xi - z} - \frac{1}{\pi} \iint_e \frac{A(\xi) \chi(\xi) + B(\xi) \left(\frac{\xi - z_0}{\xi - \bar{z}_0} \right)^n \bar{\chi}(\xi)}{\xi - z} d\xi d\eta, \quad (162'')$$

где γ — граница e . Последний интеграл правой части равенства (162'') в силу ограниченности A и B мажорируется величиной

$$N \iint_e \frac{1}{|\xi - z| |\xi - \bar{z}_0|^\alpha} d\xi d\eta, \quad N = \text{const}, \quad \alpha = 1 - \delta,$$

ограниченной в окрестности точки z_0 . Поэтому указанный интеграл, в силу леммы о двойном интеграле (§ 1), является функцией от z , правильно непрерывной в круге $|z - z_0| < \rho$ с показателем, сколь угодно близким к единице. Отсюда, в частности, следует, что функция $\chi(z)$, определенная равенством (162''), удовлетворяет неравенству (162').

Б. Ясно, что если z_0 — существенно особая точка для $\Phi(z)$, то $\Phi(z)$ принимает при подходе к точке z_0 значения, сколь угодно близкие к бесконечности, так как в противном случае точка z_0 была бы устранимой особой точкой для $\Phi(z)$. Пусть теперь $C \neq \infty$ и $\Phi(z)$ в окрестности точки z_0 не принимает значение C . Введем новую функцию $\omega(z)$, полагая $\omega = \frac{1}{\Phi - C}$ или $\Phi = \frac{1}{\omega} + C$. Функция $\omega(z)$ не обращается в бесконечность в окрестности точки z_0 и удовлетворяет уравнению

$$\frac{\hat{d}\omega}{d\bar{z}} = -A(1 + C\omega)\omega - B\left(\frac{\omega}{\bar{\omega}} + \bar{C}\omega\right)\omega.$$

Предположив, что функция $\omega(z)$ ограничена при подходе к точке z_0 , по формуле (9) в окрестности e точки z_0 при $z \neq z_0$ получаем

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega(\xi) d\xi}{\xi - z} - \frac{1}{\pi} \iint_e \frac{-A(\xi)(1 + C\omega(\xi))\omega(\xi) - B(\xi)\left(\frac{\omega(\xi)}{\bar{\omega}(\xi)} + \bar{C}\omega(\xi)\right)\omega(\xi)}{\xi - z} d\xi d\eta. \quad (162''')$$

Если предположить, что $|\omega(z)| < M = \text{const}$, т. е. $\Phi(z)$ не принимает значений, сколь угодно близких к C , то в силу леммы о двойном интеграле (§ 1) предел при $z \rightarrow z_0$ функции $\omega(z)$, определенной равенством (162'''), существует и отличен от бесконечности. Но если $\lim_{z \rightarrow z_0} \omega(z) \neq 0$, то z_0 — устранимая особая точка функции $\Phi(z)$, если $\lim_{z \rightarrow z_0} \omega(z) = 0$, то z_0 — полюс функции $\Phi(z)$. Это против-

речит условиям леммы, и, значит, найдется последовательность точек $z_1, z_2, \dots, z_k, \dots$, сходящаяся в точке z_0 , такая, что $\lim_{z_k \rightarrow z_0} \Phi(z_k) = C$.

В. Если бы функция $\Phi(z)$ была ограниченной в окрестности точки z_0 , то по теореме 2 § 5 она тождественно равнялась бы нулю. Поэтому функция $\Phi(z)$ при подходе к точке z_0 кроме предельного значения нуль имеет другое предельное значение, отличное от нуля. А это, в соответствии с определением, означает, что z_0 — существенно особая точка для $\Phi(z)$. Далее, если бы при каком-нибудь значении n выражение $\Phi(z)(z - z_0)^n$ оставалось ограниченным при подходе к точке z_0 , то точка z_0 была бы полюсом или устранимой особой точкой для $\chi(z) = \Phi(z)(z - z_0)^n$. Поскольку z_0 — предельная точка нулей функции $\Phi(z)$, это означало бы, что $\chi(z) \equiv 0$ и, следовательно, $\Phi(z) \equiv 0$. Поэтому

$$\lim_{r \rightarrow 0} \max_{|z - z_0| = r} |\Phi(z)(z - z_0)^n| = \infty.$$

Лемма об особых точках доказана.

Если на комплексные параметры A и B наложить несколько большие ограничения по сравнению с леммой об особых точках, то можно довольно просто получить сравнительно простое соотношение, связывающее обобщенные аналитические функции четвертого класса с аналитическими функциями. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $\Phi(z) = \varphi + i\psi$ — обобщенная аналитическая функция от z четвертого класса, однозначная в односвязной области D с выброшенными точками $z_1, z_2, \dots, z_n$, комплексные параметры A и B правильно непрерывны в D . Тогда в области D выполняется равенство

$$\Phi(z) = e^{S(z)} \omega(z), \quad (163)$$

где $\omega(z)$ — функция, аналитическая в области D с выброшенными точками $z_1, z_2, \dots, z_n$,

$$S(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_D \frac{A(\zeta) + B(\zeta) \frac{\overline{\Phi}(\zeta)}{\Phi(\zeta)}}{\zeta - z} d\xi d\eta, \quad \zeta = \xi + i\eta. \quad (163')$$

В самом деле, уравнение (53) можно записать в виде

$$\frac{\widehat{d} \ln \Phi}{d\bar{z}} = A + B \frac{\overline{\Phi}}{\Phi},$$

или

$$\frac{\widehat{d} \ln \overline{\Phi}}{dz} = \overline{A} + \overline{B} \frac{\Phi}{\overline{\Phi}}. \quad (163'')$$

Равенство (163'') означает, что $\ln \overline{\Phi}$ представляет собой одну из о-первообразных функции $\overline{A}(\zeta) + \overline{B} \frac{\Phi}{\overline{\Phi}}$. Пусть D' — область,

полученная из D путем отбрасывания достаточно малых кружочков радиуса ρ с центрами в точках $z_1, z_2, \dots, z_n, z_{n+1}, \dots, z_{k_0}$, в которых $\Phi(z)$ имеет изолированные особые точки или нули. На основании теоремы об о-первообразной правильно непрерывной функции (§ 1) можем сказать, что о-первообразная функции $\bar{A} + \bar{B} \frac{\Phi}{\Phi}$ в области D' существует и может быть записана в виде

$$\bar{S}_\rho(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{D'} \frac{\bar{A}(\zeta) + \bar{B}(\zeta) \frac{\Phi(\zeta)}{\Phi(\zeta)}}{\bar{\zeta} - \bar{z}} d\bar{\zeta} d\eta.$$

Поэтому в области D' $\frac{\hat{d}}{dz} |\ln \bar{\Phi} - \bar{S}_\rho(z)| = 0$, или

$$\ln \Phi(z) - S_\rho(z) = \ln \omega_\rho(z), \quad (163'')$$

где $\omega_\rho(z)$ — функция от z , аналитическая в D' , причем вполне определенная, так как в левой части равенства (163'') все величины заданы. Пусть $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k, \dots$ — последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю. Из равенства

$$\ln \omega_{\rho_k}(z) - \ln \omega_{\rho_m}(z) = S_{\rho_m}(z) - S_{\rho_k}(z)$$

следует равномерная сходимость последовательности $\ln \omega_{\rho_k}(z)$ внутри области D^* , полученной из D отбрасыванием точек $z_1, z_2, \dots, z_{k_0}$. Пределная функция $\ln \omega(z)$ является аналитической в области D^* , и равенство (163''') в пределе принимает вид

$$\ln F(z) - S(z) = \ln \omega(z),$$

где $S(z)$ определяется равенством (163'). Теорема доказана.

Замечание. Из леммы о двойном интеграле (§ 1) следует, что при высказанных в условиях теоремы предположениях о параметрах A и B функция $\Phi(z)$ правильно непрерывна в $D + C$ (C — граница D) с показателем, сколь угодно близким к единице.

Отметим, что формулу (163) можно было бы получить как следствие общего решения уравнения

$$\frac{\hat{d}w}{dz} = A(z)w,$$

имеющего вид

$$w(z) = \omega(z) e^{-\frac{1}{\pi} \iint_D \frac{A(\zeta)}{\bar{\zeta} - \bar{z}} d\bar{\zeta} d\eta},$$

где $\omega(z)$ — любая аналитическая функция. Эта формула была получена Н. Теодореску [82, 83] для случая ограниченной измеримой функции $A(z)$.

Равенство (163) будем называть в дальнейшем формулой преобразования подобия¹⁷. В силу высказанного выше замечания в равенстве (163) «коэффициент подобия» $e^{S(z)}$ представляет собой функцию, правильно непрерывную в $D + C$, с показателем, сколь угодно близким к единице, и нигде в $D + C$ не обращается в нуль. Вне $D + C$ коэффициент подобия является аналитической функцией от z , стремящейся к единице при $z \rightarrow \infty$.

Из формулы преобразования подобия (163) видно, что особые точки функций четвертого класса $\Phi(z)$ могут быть только такими же, как и особые точки соответствующих им аналитических функций $\omega(z)$. Главные части функций $\Phi(z)$ в особых точках будут отличаться от главных частей аналитических функций $\omega(z)$ только вполне определенными множителями, равными соответствующим коэффициентам подобия. Из формулы (163) непосредственно и очень просто получаются все утверждения леммы I об особых точках при дополнительном предположении, что комплексные параметры A и B правильно непрерывны в области, содержащей данную точку z_0 .

Заметим, что все полученные здесь результаты по особым точкам функций четвертого класса автоматически переносятся на (p, q) -производные (p, q) -аналитических функций, так как эти (p, q) -производные (см. § 3) являются функциями третьего класса с комплексными параметрами

$$A = \frac{1}{2p} \frac{\widehat{d}\sigma}{dz}, \quad B = -\frac{1}{2p} \frac{\widehat{d}\sigma}{dz}.$$

Перейдем теперь к вопросу о классификации и к изучению общих свойств особых точек однозначных p -аналитических и (p, q) -аналитических функций.

Пусть D , как и ранее, — односвязная область в плоскости $z = x + iy$, D^* — область, получающаяся из D выбрасыванием конечного числа отдельных точек $z_1, z_2, \dots, z_n$. Пусть $f(z) = u + iv$ — функция, p -аналитическая и однозначная в области D^* , $z_1, z_2, \dots, z_n$ — ее особые точки однозначного характера; характеристика $p = p(z)$ правильно непрерывно дифференцируема в области D (это означает, что частные производные $p_x(z)$ и $p_y(z)$ правильно непрерывны в D). На основании (57) данной функции $f(z) = u + iv$ можно поставить в соответствие однозначно определенную в области D^* функцию $F(z) = U + iV$ третьего класса

$$F(z) = U + iV = \sqrt[p]{p(z)} u + i \frac{v}{\sqrt[p]{p(z)}} \quad (164)$$

¹⁷ Равенство (163) Л. Берс [37] называет принципом подобия, И. Н. Векуа [41] — представлением первого рода, или формулой взаимности для обобщенных аналитических функций. При вполне определенных предположениях о параметрах A и B ими было установлено, что для всякой функции $\omega(z)$, аналитической и однозначной в области D с выброшенными точками $z_1, z_2, \dots, z_n$, существует функция, определенная системой уравнений (51), представляемая в виде (163), где $\hat{S}(z)$ находится по формуле (163') и обладает теми же свойствами, что и в условиях теоремы 1.

с комплексным параметром

$$\mu = r + is = \frac{1}{2} \frac{\widehat{d} \ln p}{dz}. \quad (164')$$

В силу формулы преобразования подобия (163) можно написать

$$\sqrt{p}u + i \frac{v}{\sqrt{p}} = e^{S_1(z)} \omega(z) \quad (164'')$$

или

$$f(z) = u + iv = \frac{1}{\sqrt{p(z)}} \operatorname{Re} [e^{S_1(z)} \omega(z)] + i \sqrt{p(z)} \operatorname{Im} [e^{S_1(z)} \omega(z)], \quad (165)$$

где

$$S_1(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_D \frac{1}{2} \frac{\widehat{d} \ln p(\zeta)}{d\bar{\zeta}} \frac{p(\zeta)u(\zeta) - iv(\zeta)}{p(\zeta)u(\zeta) + iv(\zeta)} \frac{d\zeta d\eta}{\zeta - z}. \quad (165')$$

Пусть теперь $f(z) = u + iv$ — функция, (p, q) -аналитическая и однозначная в области D^* , $z_1, z_2, \dots, z_n$ — ее особые точки одно-значного характера в области D , $p(z)$ и $q(z)$ — характеристики, правильно непрерывно дифференцируемые в области D . На основании (59') данной функции $f(z) = u + iv$ можно поставить в соответствие однозначно определенную в области D^* функцию $\Phi(z) = \varphi + i\psi$ четвертого класса

$$\Phi(z) = \varphi + i\psi = pu + i(v + qu) \quad (166)$$

с комплексными параметрами

$$A = B = \frac{1}{2p} \frac{\widehat{d}\sigma}{dz}, \quad \sigma = p + iq. \quad (166')$$

В силу формулы преобразования подобия (163) можем написать

$$pu + i(v + qu) = e^{S(z)} \omega(z) \quad (166'')$$

или

$$f(z) = u + iv = \frac{1}{p(z)} \operatorname{Re} [e^{S(z)} \omega(z)] + \\ + i \left(\operatorname{Im} [e^{S(z)} \omega(z)] + \frac{q(z)}{p(z)} \operatorname{Re} [e^{S(z)} \omega(z)] \right), \quad (167)$$

где

$$S(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_D \frac{\widehat{d}\sigma(\zeta)}{d\bar{\zeta}} \frac{u(\zeta)}{\sigma(\zeta)u(\zeta) + iv(\zeta)} \frac{d\zeta d\eta}{\zeta - z}. \quad (167')$$

Равенство (167) условимся называть формулой преобразования подобия для (p, q) -аналитических функций, а $e^{S(z)}$, как и ранее, — коэффициентом подобия. Коэффициент подобия $e^{S(z)}$ (p, q) -аналитических функций обладает такими же свойствами, как и коэффициент подобия функций четвертого класса.

Будем говорить, что характеристики $p(z)$ и $q(z)$ удовлетворяют условию «а» в окрестности точки $z_0 \neq \infty$, если их частные производные по x и y в этой окрестности непрерывны и ограничены по абсо-

лютной величине и пределы $\lim_{z \rightarrow z_0} p(z)$, $\lim_{z \rightarrow z_0} q(z)$ существуют, причем $\lim_{z \rightarrow z_0} p(z) > 0$; условию «β» в некоторой области, содержащей точку $z_0 \neq \infty$, если их частные производные по x и y правильно непрерывны в этой области. В окрестности точки $z_0 = \infty$ условие «α» будем считать удовлетворяющимся, если $p(z)$ и $q(z)$ удовлетворяют ему в окрестности точки $\zeta = \xi + i\eta = 0$, как функции от $\zeta = \frac{1}{z}$. Аналогично, условие «β» при $z = \infty$ будем считать удовлетворяющимся, если $p(z)$ и $q(z)$ удовлетворяют ему в какой-либо области, содержащей точку $\zeta = 0$, как функции от $\zeta = \frac{1}{z}$.

Теорема 2 (аналог теоремы Сохоцкого — Вейерштрасса о существовании особой точки). *Однозначная (p, q) -аналитическая функция в окрестности изолированной существенно особой точки, в которой ее характеристики удовлетворяют условию «α», принимает значения, сколь угодно близкие ко всякому наперед заданному конечному или бесконечному числу C .*

Справедливость утверждений этой теоремы непосредственно вытекает из леммы 1 об особых точках и из равенства (166).

Теорема 3 (об устранимой особой точке). *Пусть однозначная (p, q) -аналитическая функция $f(z) = u + iv$ в окрестности изолированной особой точки $z_0 \neq \infty$ ограничена по модулю или растет, но так, что $|f(z)(z - z_0)^\alpha| < M = \text{const} \neq \infty$ ($\alpha = \text{const} < 1$). Тогда а) точка z_0 будет устранимой особой точкой функции $f(z)$, если $p(z)$ и $q(z)$ в окрестности точки z_0 удовлетворяют условию «α»; б) точка z_0 будет точкой (p, q) -аналитичности функции $f(z)$, если $p(z)$ и $q(z)$ в некоторой области, содержащей точку z_0 , удовлетворяют условию «β» и если положено $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.*

В самом деле, утверждение «а» вытекает из леммы 1 и из равенств (164) и (166). Чтобы убедиться в справедливости утверждения «б», достаточно показать, что если положить $\hat{f}(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$, то опре-

деленная таким образом функция в области e , содержащей точку z_0 , будет непрерывно дифференцируемой и, следовательно, (p, q) -аналитической. В § 2 было показано, что всякой (p, q) -аналитической функции $f(z) = u + iv$ соответствует функция четвертого класса $\Phi(z) = \varphi + i\psi = pu + i(v + qu)$ с комплексными параметра-

ми $A = B = \frac{1}{2p} \frac{\hat{d}\sigma}{dz}$. Это значит, что

$$\frac{\hat{d}\Phi}{dz} = \frac{1}{2p} \frac{\hat{d}\sigma}{dz} (\Phi(z) + \overline{\Phi}(z)).$$

С помощью формулы (9) в точках области e находим

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Phi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{\pi} \iint_{\gamma} \frac{1}{2p(\zeta)} \frac{\hat{d}\sigma(\zeta)}{d\zeta} \frac{(\Phi(\zeta) + \overline{\Phi}(\zeta))}{\zeta - z} d\xi d\eta.$$

На основании того что $\frac{d\sigma(\zeta)}{d\bar{\zeta}}$ — функция, правильно непрерывная в e по теореме об о-первообразной, заключаем, что $\Phi(z)$ имеет непрерывные частные производные по x и y в области e (включая и точку z_0). Из равенства $\Phi(z) = pu + i(v + qu)$ следует, что таким же свойством обладает функция $f(z) = u + iv$. Теорема доказана.

Теорема 4 (аналог теоремы Лиувилля). Пусть характеристики $p(z)$ и $q(z)$ правильно непрерывно дифференцируемы во всякой конечной части плоскости $z = x + iy$, а в точке $z_0 = \infty$ удовлетворяют условию « α ». Тогда, если функция $f(z) = u + iv$ (p, q)-аналитическая во всякой конечной части плоскости $z = x + iy$, при подходе к бесконечности ограничена по абсолютной величине, она тождественно равна постоянной.

В самом деле, учитывая, что в окрестности точки $z_0 = \infty$ $p(z)$ и $q(z)$ удовлетворяют условию « α », в силу теоремы 3, приходим к выводу, что предел $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ существует и равен конечному числу. Это, в частности, означает, что пределы $\lim_{z \rightarrow \infty} u(z)$ и $\lim_{z \rightarrow \infty} v(z)$ существуют и равны некоторым конечным числам α и β .

Но при условиях сформулированной теоремы ($p(z)$ и $q(z)$ правильно непрерывно дифференцируемы) справедлива теорема о сохранении области, и, следовательно, $u(z)$ и $v(z)$ не принимают своих наибольших и наименьших значений в области (p, q)-аналитичности функции $f(z)$. Другими словами, в данном случае для модуля (p, q)-аналитической функции и для ее вещественной и мнимой частей справедлив принцип максимума. Из принципа максимума для $u(z)$ следует, что в конечной части плоскости $u(z)$ не может быть меньше α и не может быть больше α , следовательно, $u(z) \equiv \alpha$. Убеждаемся также, что $v(z) \equiv \beta$ и, следовательно, $f(z) \equiv \text{const}$. Теорема доказана.

Замечание. Из доказательства видно, что существенным в условиях теоремы является выполнение условия « α » в окрестности точки $z_0 = \infty$. В остальном утверждения теоремы остаются справедливыми во всех случаях, когда выполняется принцип максимума модуля (p, q)-аналитической функции или принцип максимума для ее вещественной и мнимой частей.

Теорема 5 (о полюсах). Если точка $z_0 \neq \infty$ является полюсом (p, q)-аналитической функции $f(z) = u + iv$ с характеристиками $p(z)$ и $q(z)$, удовлетворяющими условию « α » в окрестности точки z_0 , то существуют целое положительное число n , называемое порядком этого полюса, и положительные постоянные C_1 и C_2 такие, что в окрестности точки z_0 выполняются неравенства

$$C_1 < |f(z)(z - z_0)^n| < C_2, \quad (168)$$

причем предел $\lim_{z \rightarrow z_0} [pu + i(v + qu)](z - z_0)^n$ существует и отличен от нуля и от бесконечности.

В самом деле, пусть D — область, содержащая точку z_0 . При высказанных предположениях о характеристиках $p(z)$ и $q(z)$ коэффициент подобия в силу (166) является функцией, правильно непрерывной в $D + C$ (C — граница D), и, следовательно, функция $\omega(z)$ должна иметь полюс в точке z_0 вполне определенного порядка n (как функция, аналитическая и однозначная в окрестности точки z_0). Поэтому утверждения теоремы справедливы.

Теорема 6 (обобщение леммы Шварца). Пусть $f(z) = u + iv$ — функция, p -аналитическая в круге $|z| < 1$, имеющая в точке $z_0 = 0$ нуль n -го порядка и удовлетворяющая в этом круге неравенству

$$|f(z)| < M = \text{const.} \quad (169)$$

Тогда в этом же круге будет справедливо неравенство

$$|f(z)| < K_0 M |z|^n, \quad (169')$$

где K_0 — постоянная, зависящая только от характеристики p и не зависящая от функций $f(z)$,

$$K_0 = \max_{|z| < 1} \left(p, \frac{1}{p} \right) e^{\max_{|z| < 1} \frac{1}{\pi} \iint_{|\xi| < 1} \left| \frac{\hat{d} \ln p}{d\xi} \right| \frac{d\xi d\eta}{|\xi - z|}}. \quad (169'')$$

В самом деле, из формулы преобразования подобия для p -аналитических функций (165) получаем

$$|f(z)|^2 \leq p_1 |e^{2S_1(z)}| |\omega(z)|^2 \leq p_1 |e^{2S_1(z)}| |z|^{2n} m^2,$$

где

$$p_1 = \max_{|z| < 1} \left(p, \frac{1}{p} \right), \quad m = \max_{|z| < 1} |\omega(z)|.$$

Из равенства (164'') при $|z| < 1$ находим

$$m^2 \leq e^{2\Phi} p_1 M^2, \quad \Phi = \max_{|z| < 1} |S(z)|,$$

и, следовательно,

$$|f(z)|^2 \leq |z|^{2n} p_1^2 e^{4\Phi} M^2.$$

Теорема доказана.

Очевидно, что таким же способом можно получить обобщение леммы Шварца на случай (p, q) -аналитических функций, если для этого воспользоваться формулой преобразования подобия для (p, q) -аналитических функций (167).

Отметим, что известный в классической теории аналитических функций принцип аргумента [59] и вытекающие из него следствия (в частности, теорема Руше) без каких-либо изменений распространяются на p -аналитические и (p, q) -аналитические функции, если p и q удовлетворяют вполне определенным условиям дифференцируемости, например в рассматриваемой области правильно непрерывно дифференцируемы¹⁸.

¹⁸ Аналогичный результат для функций, определенных системой уравнений (51), получен И. Н. Векуа [41]. Но только здесь речь может идти об уравнении $\Phi(z) = 0$, а не об уравнениях $\Phi(z) = a$, где a — любая постоянная, так как при $a \neq 0$ функция $\Phi(z)$ — a может не принадлежать данному классу функций, определенных системой уравнений (51).

§ 10. ТЕОРИЯ ВЫЧЕТОВ
 p -АНАЛИТИЧЕСКИХ И (p, q) -АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Теорема 1 (о главных частях p -аналитических функций). Пусть $f(z) = u + iv$ — p -аналитическая функция, имеющая в точке $z_0 \neq \infty$, в окрестности которой $p(z)$ удовлетворяет условию «а», полюс n -го порядка. Тогда в окрестности точки z_0 она представима в виде ¹⁹

$$f(z) = u + iv = \frac{1}{p(z)} \sum_{k=1}^n \frac{A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta}{r^k} + \\ + i \sum_{k=1}^n \frac{B_k \cos k\theta - A_k \sin k\theta}{r^k} + R(z) \quad (170)$$

или

$$\Phi(z) = pu + iv = \sum_{k=1}^n \frac{A_k + iB_k}{(z - z_0)^k} + R^*(z), \quad (170')$$

где $r = |z - z_0|$, $\theta = \arg(z - z_0)$,

$$A_k + iB_k = e^{S(z)} (\alpha_k + i\beta_k), \quad (170'')$$

α_k, β_k ($k = 1, 2, \dots, n$) — вещественные постоянные, $\alpha_n^2 + \beta_n^2 \neq 0$, $e^{S(z)}$ — коэффициент подобия данной p -аналитической функции, определяющийся равенством (167') при $q = 0$, $R(z)$ и $R^*(z)$ — функции, правильно непрерывные в некоторой области, содержащей точку z_0 ,

$$\left. \begin{aligned} R(z) &= \frac{1}{p(z)} \operatorname{Re} [e^{S(z)} g(z)] + \operatorname{Im} [e^{S(z)} g(z)], \\ R^*(z) &= e^{S(z)} g(z), \end{aligned} \right\} \quad (170''')$$

$g(z)$ — функция, голоморфная в точке z_0 .

Доказательство теоремы получается непосредственно из формулы (167), если учесть, что при высказанных предположениях о характеристике $p(z)$ функция $\omega(z)$ должна иметь в точке z_0 полюс n -го порядка и представляется в виде

$$\omega(z) = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k + i\beta_k}{(z - z_0)^k} + g(z),$$

или

$$\omega(z) = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k \cos k\theta + \beta_k \sin k\theta}{r^k} + i \sum_{k=1}^n \frac{\beta_k \cos k\theta - \alpha_k \sin k\theta}{r^k} + g(z),$$

где $g(z)$ — голоморфная часть функции $\omega(z)$ в окрестности точки z_0 .

¹⁹ Заметим, что если z_0 — существенно особая точка функции $f(z)$, то равенства (170) и (170') остаются справедливыми, только суммы в правых частях этих равенств нужно брать не от $k = 1$ до n , а от $k = 1$ до $k = \infty$.

Замечание. В частности, при $n = 1$, т. е. в случае полюса первого порядка, p -аналитическая функция представима в виде

$$f(z) = u + iv = \frac{1}{p(z)} \frac{A_1^0 \cos \theta + B_1^0 \sin \theta}{r} + \\ + i \frac{B_1^0 \cos \theta - A_1^0 \sin \theta}{r} + R_0(z)$$

или

$$\Phi(z) = pu + iv = \frac{A_1^0 + iB_1^0}{z - z_0} + R_0^*(z),$$

где $R_0(z)$ и $R_0^*(z)$ — функции от z , правильно непрерывные в окрестности точки z_0 и такие, что при некотором числе α ($0 < \alpha < 1$) $R_0(z)(z - z_0)^\alpha$ и $R_0^*(z)(z - z_0)^\alpha$ стремятся к нулю, если $z \rightarrow z_0$,

$$A_1^0 + iB_1^0 = (A_1 + iB_1)_{z=z_0} = e^{S(z_0)} (\alpha_1 + i\beta_1).$$

Последнее вытекает из того, что коэффициент подобия $e^{S(z)}$ в некоторой области, содержащей точку z_0 , является правильно непрерывной функцией от z с показателем, сколь угодно близким к единице.

Сумму всех слагаемых правой части равенства (170), кроме $R(z)$, будем называть главной частью p -аналитической функции $f(z) = u + iv$ в окрестности точки z_0 , являющейся особой точкой однозначного характера, полюсом при $n \neq \infty$ и существенно особой точкой при $n = \infty$, $R(z)$ будем называть правильной или регулярной частью функции $f(z)$ в этой окрестности точки z_0 .

Допустим, что для p -аналитической функции $f(z) = u + iv$ тем или иным способом получено представление вида (170) в окрестности особой точки $z_0 \neq \infty$ однозначного характера, причем A_k , B_k и $R(z)$ не обязательно определяются равенствами (170''), (170'''), а удовлетворяют следующим условиям: A_k и B_k — функции от z , непрерывные в области, содержащей точку z_0 , $R(z)$ — функция, непрерывная в окрестности точки z_0 и такая, что при некотором числе α ($0 < \alpha < 1$) $R(z)(z - z_0)^\alpha$ стремится к нулю, если $z \rightarrow z_0$. Всякое такое представление будем называть разложением p -аналитической функции $f(z)$ в окрестности особой точки однозначного характера $z_0 \neq \infty$. Сумму всех членов этого разложения, кроме $R(z)$, будем называть, как и в предыдущем случае, главной частью p -аналитической функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 , $A_k + iB_k$ — коэффициентами разложения главной части $f(z)$ в окрестности точки z_0 .

Теорема 1'. Пусть две однозначные p -аналитические функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ в точке $z_0 \neq \infty$, в окрестности которой $p(z)$ удовлетворяет условию « α », имеют одинаковые главные части или такие, что разности k -х коэффициентов разложений их главных частей по модулю не превышают $Mr^{k-1+\varepsilon}$ или разность самих главных частей по модулю не превышает $Mr^{-1+\varepsilon}$, где M и ε — положительные числа. Тогда для разности этих функций $f(z) = f_1(z) - f_2(z)$

точка z_0 будет устранимой особой точкой и, если положить $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ и считать, что $p(z)$ в какой-либо области, содержащей z_0 , удовлетворяет условию «β», — точкой p -аналитичности функции $f(z)$.

В силу того что функция $f(z) = f_1(z) - f_2(z)$ при подходе к точке z_0 может иметь порядок роста только меньше единицы, вторая часть теоремы, как и первая, является следствием теоремы 3 об устранимой особой точке (§ 9).

Теорема 2 (о главных частях (p, q) -аналитических функций). Пусть $f(z) = u + iv$ — (p, q) -аналитическая функция, имеющая в точке z_0 , в окрестности которой $p(z)$ и $q(z)$ удовлетворяют условию «α», полюс n -го порядка. Тогда в окрестности точки z_0 функция $f(z)$ представима в виде

$$f(z) = u + iv = \frac{1}{p(z)} \sum_{k=1}^n \frac{A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta}{r^k} + \\ + i \left(\sum_{k=1}^n \frac{B_k \cos k\theta - A_k \sin k\theta}{r^k} - \frac{q(z)}{p(z)} \sum_{k=1}^n \frac{A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta}{r^k} \right) + R(z) \quad (171)$$

или

$$\Phi(z) = pu + i(v + qu) = \sum_{k=1}^n \frac{A_k + B_k}{(z - z_0)^k} + R^*(z), \quad (171')$$

где $r = |z - z_0|$, $\theta = \arg(z - z_0)$,

$$A_k + iB_k = e^{S(z)}(\alpha_k + i\beta_k), \quad (172)$$

α_k, β_k ($k = 1, 2, \dots, n$) — вещественные постоянные, $\alpha_n^2 + \beta_n^2 \neq 0$, коэффициент подобия данной (p, q) -аналитической функции $e^{S(z)}$ определяется равенством (167') при условии, что D — область, содержащая точку z_0 , $R(z)$ и $R^*(z)$ — функции, правильно непрерывные в D ,

$$R(z) = \frac{1}{p(z)} \operatorname{Re} [e^{S(z)} g(z)] + i \left(\operatorname{Im} [e^{S(z)} g(z)] - \right. \\ \left. - \frac{q(z)}{p(z)} \operatorname{Re} [e^{S(z)} q(z)] \right), \quad (172')$$

$$R^*(z) = e^{S(z)} g(z), \quad (172'')$$

где $g(z)$ — функция, голоморфная в точке z_0 (регулярная часть ряда Лорана в окрестности точки z_0 функции $\omega(z)$)²⁰.

В самом деле, при сделанном предположении о $p(z)$ и $q(z)$ функция $S(z)$, определенная равенством (167'), правильно непрерывна в некоторой области D , содержащей точку z_0 . Поэтому,

²⁰ Заметим, что формулы (171) и (171') остаются справедливыми и в том случае, когда точка z_0 является существенно особой точкой функции $f(z)$, в этом случае суммы в правых частях равенств следует брать не от $k = 1$ до $k = n$, а от $k = 1$ до $k = \infty$.

учитывая формулу преобразования подобия (166") или (167), заключаем, что функция $\omega(z)$ имеет в точке z_0 полюс n -го порядка и представима в виде

$$\omega(z) = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k + i\beta_k}{(z-z_0)^k} + g(z),$$

где α_k, β_k — вещественные постоянные, $\alpha_n^2 + \beta_n^2 \neq 0$, $g(z)$ — функция, голоморфная в точке z_0 . Используя теперь (166") и учитывая, что

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \left[(a(z) + ib(z)) \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k + i\beta_k}{(z-z_0)^k} \right] = \\ &= \operatorname{Re} \left[(a(z) + ib(z)) \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k \cos k\theta + \beta_k \sin k\theta}{r^k} + \right. \\ & \quad \left. + i \frac{\beta_k \cos k\theta - \alpha_k \sin k\theta}{r^k} \right] = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{(a(z)\alpha_k - b(z)\beta_k) \cos k\theta + (a(z)\beta_k + b(z)\alpha_k) \sin k\theta}{r^k}, \\ & \operatorname{Im} \left[(a(z) + ib(z)) \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k + i\beta_k}{(z-z_0)^k} \right] = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{(b(z)\alpha_k + a(z)\beta_k) \cos k\theta - (-b(z)\beta_k + a(z)\alpha_k) \sin k\theta}{r^k}, \end{aligned}$$

где $a(z) + ib(z) = e^{S(z)}$, получаем равенство (171). Правильная непрерывность функции $R(z)$ в области, содержащей точку z_0 , следует из того, что таким свойством обладает функция $S(z)$, определенная равенством (167'). Из (166") непосредственно получаем также равенство (171').

Замечание. В частности, при $n = 1$, т. е. в случае полюса первого порядка, (p, q) -аналитическая функция $f(z)$ представима в виде

$$\begin{aligned} f(z) = u - iv &= \frac{1}{p(z)} \frac{A_1^0 \cos \theta + B_1^0 \sin \theta}{r} + \\ &+ i \left(\frac{B_1^0 \cos \theta - A_1^0 \sin \theta}{r} - \frac{q(z)}{p(z)} \frac{A_1^0 \cos \theta + B_1^0 \sin \theta}{r} \right) + R_0(z) \end{aligned} \quad (173)$$

или

$$\Phi(z) = pu + i(v + qu) = \frac{A_1^0 + iB_1^0}{z-z_0} + R_0^*(z), \quad (173')$$

где $R_0(z)$ и $R_0^*(z)$ — функции от z , правильно непрерывные в окрестности точки z_0 и такие, что при некотором числе α ($0 < \alpha < 1$) $R_0(z)(z - z_0)^\alpha$ и $R_0^*(z)(z - z_0)^\alpha$ стремятся к нулю, если $z \rightarrow z_0$,

$$A_1^0 + iB_1^0 = (A_1 + iB_1)_{z=z_0} = e^{S(z_0)}(\alpha_1 + i\beta_1).$$

Аналогично тому, как это мы делали в случае p -аналитических функций, всякое представление (p, q) -аналитической функции в окрестности особой точки однозначного характера $z_0 \neq \infty$ вида (171) при условии, что $A_k + iB_k$ — функции, непрерывные в области, содержащей z_0 , а $R(z)$ — функция, непрерывная в окрестности точки z_0 и такая, что при некотором числе α ($0 < \alpha < 1$) $R(z)(z - z_0)^\alpha \rightarrow 0$, если $z \rightarrow z_0$ ²¹, будем называть разложением (p, q) -аналитической функции в окрестности данной точки z_0 . Сумму всех членов этого разложения, кроме $R(z)$, будем называть главной частью (p, q) -аналитической функции в окрестности точки z_0 , $A_k + iB_k$ — коэффициентами разложения этой главной части (p, q) -аналитической функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 .

Теорема 2'. Пусть две однозначные (p, q) -аналитические функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ в точке $z_0 \neq \infty$, в окрестности которой $p(z)$ и $q(z)$ удовлетворяют условию « α », имеют одинаковые главные части или такие, что разности k -х коэффициентов разложений их главных частей по модулю не превышают $Mr^{k-1+\varepsilon}$ или разность самих главных частей по модулю не превышает $Mr^{-1+\varepsilon}$, где M и ε — положительные постоянные. Тогда для разности этих функций $f(z) = f_1(z) - f_2(z)$ точка z_0 будет устранимой особой точкой и, если положить $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ и считать, что $p(z)$ и $q(z)$ в какой-либо области, содержащей z_0 , удовлетворяют условию « β », — точкой (p, q) -аналитичности функции $f(z)$.

Справедливость этой теоремы следует из теоремы 3 об устранимой особой точке (§ 9), если учесть, что функция $f(z) = f_1(z) - f_2(z)$ при подходе к точке z_0 может иметь порядок роста только меньше единицы.

Перейдем теперь, следуя нашей работе [3], к построению теории вычетов p -аналитических и (p, q) -аналитических функций. Рассмотрим вначале p -аналитические функции.

Пусть $f(z) = u + iv$ — p -аналитическая функция, имеющая в точке $z_0 \neq \infty$, в окрестности которой $p(z)$ удовлетворяет условию « α », полюс первого порядка. Тогда, представив функцию $f(z)$ в виде (170), вычетом этой функции в точке z_0 назовем коэффициент

$$C_{-1} = A_1^0 + iB_1^0 = (A_1 + iB_1)_{z=z_0}, \quad (174)$$

где все обозначения имеют такой же смысл, как и в теореме 1. В случае полюса первого порядка, учитывая (170'), легко заметить,

²¹ Это значит, что A_k, B_k и $R(z)$ не обязательно должны определяться равенствами (172) и (172').

что справедлива следующая формула для вычисления вычета в точке z_0 :

$$C_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} (pu + iv)(z - z_0). \quad (175)$$

Будем говорить, что разложение p -аналитической функции $f(z)$ вида (170) в окрестности полюса n -го порядка ($n \geq 2$) или существенно особой точки $z_0 \neq \infty$ является каноническим разложением, если

$$A_k + iB_k = \sum_{j=0}^{k-1} (\alpha_k^j + i\beta_k^j)(\bar{z} - \bar{z}_0)^j, \quad k \geq 1, \quad (176)$$

где α_k^j и β_k^j — вещественные постоянные. Очевидно, что для того чтобы разложение вида (170), (170''), (170''') можно было преобразовать в каноническое разложение, достаточно, чтобы A_k и B_k в точке x_0, y_0 имели непрерывные производные по x и y до k -го порядка. При выполнении этих условий остаточный член разложения $R(z)$ является функцией, непрерывной в точке z_0 .

Вычетом p -аналитической функции $f(z)$ в точке $z_0 \neq \infty$, являющейся полюсом n -го порядка ($n > 1$) или существенно особой точкой, назовем число $C_{-1} = A_1^0 + iB_1^0$, определенное равенством (174) в предположении, что данное разложение в окрестности точки z_0 является каноническим разложением. Очевидно, что в случае $n = 1$ это определение вычета совпадает с приведенным выше определением вычета в полюсе первого порядка без предположения о том, что разложение вида (170) является каноническим разложением.

Подсчитаем вычет p -аналитической функции $f(z)$ в полюсе n -го порядка ($n \geq 2$). Взяв $A_k + iB_k$ ($k = 2, 3, \dots, n$) в виде (176), в силу (170'), получаем

$$(pu + iv)(z - z_0)^n = (A_n + iB_n) + (A_{n-1} + iB_{n-1})(z - z_0) + \dots \\ \dots + (A_1 + iB_1)(z - z_0)^{n-1} + R^*(z)(z - z_0)^n,$$

где $R^*(z)$ — функция, непрерывная в окрестности точки z_0 и имеющая при подходе к точке z_0 порядок роста только меньше единицы. Учитывая, что в правой части последнего равенства все слагаемые, кроме двух последних, являются многочленами от $z - z_0$ степени не выше $n - 2$, находим

$$\frac{\hat{d}^{n-1}}{dz^{n-1}} [(pu + iv)(z - z_0)^n] = (n-1)! (A_1^0 + iB_1^0) + \\ + \frac{\hat{d}^{n-1}}{dz^{n-1}} [R^*(z)(z - z_0)^n].$$

Отсюда видим, что если $R^*(z)$ имеет в точке x_0, y_0 непрерывные производные по x и y до $(n-1)$ -го порядка или при каждом операторном дифференцировании $R^*(z)$ порядок роста в окрестности точки z_0 увеличивается не больше чем на единицу, то вычет в

полюсы $z_0 \neq \infty$ n -го порядка вычисляется по формуле

$$C_{-1} = A_1^0 + iB_1^0 = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(n-1)!} \frac{\hat{d}^{n-1}}{dz^{n-1}} [(pu + iv)(z - z_0)^n]. \quad (177)$$

Рассмотрим теперь вопрос о вычислении вычета C_{-1} в точке $z_0 \neq \infty$ при помощи контурных интегралов по сопряженной переменной.

Пусть $Z = X + iY$ и $\tilde{Z} = \tilde{X} + i\tilde{Y}$ — сопряженные переменные, соответствующие данной характеристике p в области, содержащей точку z_0 , γ — окружность $|z - z_0| = r$ в указанной области. Интеграл по сопряженной переменной Z , деленный на $2\pi i$,

$$\begin{aligned} I_\gamma &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) d_p Z = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma u d\tilde{Z} + iv dZ = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (ru + iv) \frac{\hat{d}Z}{dz} dz - (ru - iv) \frac{\hat{d}\bar{Z}}{d\bar{z}} d\bar{z}. \end{aligned} \quad (178)$$

Учитывая (170), (170') и полагая $z = re^{i\theta}$, можно написать

$$\begin{aligned} I_\gamma &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \left(\frac{A_1 + iB_1}{re^{i\theta}} + R^*(z) \right) \frac{\hat{d}Z}{dz} ire^{i\theta} d\theta + \\ &+ \left(\frac{A_1 - iB_1}{re^{-i\theta}} + \bar{R}^*(z) \right) \frac{\hat{d}\bar{Z}}{d\bar{z}} ire^{-i\theta} d\theta. \end{aligned} \quad (179)$$

Отсюда в пределе при $r \rightarrow 0$ получаем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) d_p Z = (A_1 + iB_1)_{z_0} \frac{\hat{d}Z}{dz} \Big|_{z_0} + (A_1 - iB_1)_{z_0} \frac{\hat{d}\bar{Z}}{d\bar{z}} \Big|_{z_0}, \quad (180)$$

где $(A_1 + iB_1)_{z_0}$ — вычет функции $f(z)$ в точке z_0 .

Таким образом, приходим к теореме о вычетах p -аналитических функций с полюсами первого порядка.

Теорема 3 (о вычетах p -аналитических функций с простыми полюсами). Пусть Z и $\tilde{Z}$ — сопряженные переменные, соответствующие данной характеристике $p(z)$ в некоторой области, содержащей внутри односвязную область D , ограниченную спрямляемым контуром C . Тогда, если функция $f(z) = u + iv$ p -аналитическая в D , за исключением отдельных точек $z_1, z_2, \dots, z_m$, где она имеет полюсы первого порядка, и если она в точках контура C p -аналитическая или непрерывная изнутри (если контур C кусочно-монотонный), то выполняется равенство

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i} \int_C u d\tilde{Z} + iv dZ = \\ &= \sum_{s=1}^m \left((A_1 + iB_1)_s \frac{\hat{d}Z}{dz} \Big|_{z_s} + (A_1 - iB_1)_s \frac{\hat{d}\bar{Z}}{d\bar{z}} \Big|_{z_s} \right), \end{aligned} \quad (181)$$

где $(A_1 + iB_1)$, $(s = 1, 2, \dots, m)$ — вычеты функции $f(z)$ соответственно в точках $z_1, z_2, \dots, z_m$.

В самом деле, можем написать

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) d_p Z = \frac{1}{2\pi i} \sum_{s=0}^m \int_{C_s} f(z) d_p Z,$$

где C_s — окружности $|z - z_s| = r$, r — достаточно малое число. Применяя к интегралам по C_s равенство (180), получаем формулу (181). Теорема доказана.

Рассмотрим теперь интеграл по сопряженной переменной, деленный на $2\pi i$ (178), в предположении, что точка z_0 является для функции $f(z)$ полюсом n -го порядка ($n \geq 2$). При этом будем считать, что разложение (170) имеет канонический вид. Вместо (179) запишем

$$I_\gamma = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma (L + M + \eta(r)) d\theta, \quad (182)$$

где $\eta(r)$ — величина, стремящаяся к нулю при $r \rightarrow 0$,

$$L = \left(\frac{A_n + iB_n}{(z - z_0)^{n-1}} + \frac{A_{n-1} + iB_{n-1}}{(z - z_0)^{n-2}} + \dots + A_1 + iB_1 \right) \frac{\hat{d}Z}{dz}, \quad (182')$$

$$M = \left(\frac{A_n - iB_n}{(\bar{z} - \bar{z}_0)^{n-1}} + \frac{A_{n-1} - iB_{n-1}}{(\bar{z} - \bar{z}_0)^{n-2}} + \dots + A_1 - iB_1 \right) \frac{\hat{d}Z}{d\bar{z}}. \quad (182'')$$

Представляя $\frac{\hat{d}Z}{dz}$ и $\frac{\hat{d}Z}{d\bar{z}}$ в виде

$$\frac{\hat{d}Z}{dz} = a_1 + a_2(z - z_0) + \dots + a_n(z - z_0)^{n-1} + O(r^n),$$

$$\frac{\hat{d}Z}{d\bar{z}} = b_1 + b_2(\bar{z} - \bar{z}_0) + \dots + b_n(\bar{z} - \bar{z}_0)^{n-1} + O(r^n),$$

где $a_1, a_2, \dots, a_n$ — многочлены от $\bar{z} - \bar{z}_0$, $b_1, b_2, \dots, b_n$ — многочлены от $z - z_0$, можем написать

$$L = \sum_{k=1}^n \frac{A_k + iB_k}{(z - z_0)^{k-1}} \sum_{v=1}^n a_v (z - z_0)^{v-1} + O(r),$$

$$M = \sum_{k=1}^n \frac{A_k - iB_k}{(\bar{z} - \bar{z}_0)^{k-1}} \sum_{v=1}^n b_v (\bar{z} - \bar{z}_0)^{v-1} + O(r).$$

Отсюда находим

$$L = \sum_{k=1}^n (A_k + iB_k) a_k + \sum_{k > v} \frac{A_k + iB_k}{(z - z_0)^{k-v}} a_v + O(r),$$

$$M = \sum_{k=1}^n (A_k - iB_k) b_k + \sum_{k > v} \frac{(A_k - iB_k) b_v}{(\bar{z} - \bar{z}_0)^{k-v}} + O(r)$$

и из (182) в пределе при $z \rightarrow 0$ получаем

$$I_V = \sum_{k=1}^n (A_k + iB_k)_{z_0} a_k|_{z_0} + (A_k - iB_k)_{z_0} b_k|_{z_0}$$

или

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_V f(z) d_p Z = \\ & = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k-1)!} \left((A_k + iB_k)_{z_0} \frac{\hat{d}^k Z}{dz^k} \Big|_{z_0} + (A_k - iB_k)_{z_0} \frac{\hat{d}^k \bar{Z}}{d\bar{z}^k} \Big|_{z_0} \right). \end{aligned} \quad (183)$$

Таким образом, приходим к следующей теореме.

Теорема 4 (о вычетах p -аналитических функций с кратными полюсами). Пусть Z и $\bar{Z}$ — сопряженные переменные, соответствующие данной характеристике $p(z)$ в некоторой области, содержащей внутри односвязную область D , ограниченную спрямляемым контуром C . Пусть функция $f(z) = u + iv$ p -аналитическая в области D , за исключением отдельных точек $z_1, z_2, \dots, z_m$, где она имеет полюсы соответственно кратности $n_1, n_2, \dots, n_m$ (или существенно особые точки, когда соответствующие n_k равны бесконечности), и пусть в точках контура C функция $f(z)$ p -аналитическая или непрерывная изнутри (если контур C кусочно-монотонный). Тогда справедливо равенство

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_C u d\bar{Z} + iv dZ = \\ & = \sum_{s=1}^m \sum_{k=1}^{n_s} \frac{1}{(k-1)!} \left((A_k + iB_k)_s \frac{\hat{d}^k Z}{dz^k} \Big|_{z_s} + (A_k - iB_k)_s \frac{\hat{d}^k \bar{Z}}{d\bar{z}^k} \Big|_{z_s} \right), \end{aligned} \quad (184)$$

где $(A_k + iB_k)_s = (A_k + iB_k)_{z=z_s}$, $(A_1 + iB_1)_s$ — вычеты функции $f(z)$ в точках z_s ($s = 1, 2, \dots, m$).

Теорема доказывается точно так же, как и теорема 3, только вместо равенства (180) следует воспользоваться равенством (183). Например, в случае полюсов второго порядка формула (184) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_C u d\bar{Z} + iv dZ &= \sum_{s=1}^m \left((A_1 + iB_1)_s \frac{\hat{d}Z}{dz} \Big|_{z_s} + (A_1 - iB_1)_s \frac{\hat{d}\bar{Z}}{d\bar{z}} \Big|_{z_s} \right) + \\ &+ \sum_{s=1}^m \left((A_2 + iB_2)_s \frac{\hat{d}^2 Z}{dz^2} \Big|_{z_s} + (A_2 - iB_2)_s \frac{\hat{d}^2 \bar{Z}}{d\bar{z}^2} \Big|_{z_s} \right), \end{aligned} \quad (185)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_C u d\bar{Z} + iv dZ &= \sum_{s=1}^m (A_1 Z_x + B_1 Z_y)_{z_s} + \\ &+ \sum_{s=1}^m \left(A_2 \frac{Z_{xx} - Z_{yy}}{2} + B_2 Z_{xy} \right)_{z_s}. \end{aligned} \quad (185')$$

Перейдем теперь к рассмотрению (p, q) -аналитических функций. Пусть $f(z) = u + iv$ — (p, q) -аналитическая функция, имеющая в точке $z_0 \neq \infty$, в окрестности которой $p(z)$ и $q(z)$ удовлетворяют условию «а», полюс первого порядка. Тогда, представив функцию $f(z)$ в виде (171), вычетом этой функции в точке z_0 , как и в случае p -аналитических функций, назовем коэффициент

$$C_{-1} = A_1^0 + iB_1^0 = (A_1 + iB_1)_{z=z_0}, \quad (174')$$

где все обозначения такие же, как и в теореме 2. В случае полюса первого порядка, как видно из (171'), можем написать

$$C_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} [pu + i(v + qu)](z - z_0). \quad (175')$$

В случае полюса n -го порядка ($n \geq 1$) или существенно особой точки $z_0 \neq \infty$ точно так же, как и в случае p -аналитических функций, вводим понятие канонического разложения (p, q) -аналитической функции. Вычетом (p, q) -аналитической функции в полюсе n -го порядка ($n \geq 1$) или в существенно особой точке $z_0 \neq \infty$ является число $C_{-1} = A_1^0 + iB_1^0$, определенное равенством (174'), при условии, что данное разложение в окрестности точки z_0 каноническое. Для этого вычета в случае полюса n -го порядка ($n \geq 2$) при тех же предположениях относительно $R(z)$, что и в случае p -аналитических функций, находим

$$C_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(n-1)!} \frac{\hat{d}^{n-1}}{dz^{n-1}} [(su + iv)(z - z_0)^n]. \quad (177')$$

Заменяя в наших рассуждениях (178) интегралом

$$\begin{aligned} I_\gamma &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) d_{p,q}Z = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma u d\tilde{Z} + iv dZ = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (su + iv) \frac{\hat{d}Z}{dz} dz - (\bar{s}u - iv) \frac{\hat{d}\bar{Z}}{d\bar{z}} d\bar{z}, \end{aligned} \quad (186)$$

приходим к теоремам, совершенно аналогичным теоремам 3 и 4.

Теорема 3' (о вычетах (p, q) -аналитических функций с простыми полюсами). Пусть Z и $\tilde{Z}$ — сопряженные переменные, соответствующие данным характеристикам $p(z)$ и $q(z)$ в некоторой области, содержащей внутри односвязную область D , ограниченную спрямляемым контуром C . Тогда, если функция $f(z) = u + iv$ (p, q) -аналитическая в D , за исключением отдельных точек $z_1, z_2, \dots, z_m$, где она имеет полюсы первого порядка, и если она в точках контура C (p, q) -аналитическая или непрерывная изнутри (если контур C кусочно-монотонный), то выполняется равенство

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i} \int_C u d\tilde{Z} + iv dZ = \\ &= \sum_{s=1}^m \left((A_1 + iB_1)_s \frac{\hat{d}Z}{dz} \Big|_{z_s} + (A_1 - iB_1)_s \frac{\hat{d}\bar{Z}}{d\bar{z}} \Big|_{z_s} \right), \end{aligned} \quad (181')$$

где $(A_1 + iB_1)_s$ ($s = 1, 2, \dots, m$) — вычеты функции $f(z)$ соответственно в точках $z_1, z_2, \dots, z_m$.

Теорема 4' (о вычетах (p, q) -аналитических функций с кратными полюсами). Пусть Z и $\tilde{Z}$ — сопряженные переменные, соответствующие данным характеристикам $p(z)$ и $q(z)$ в некоторой области, содержащей внутри односвязную область D , ограниченную спрямляемым контуром C . Пусть функция $f(z) = u + iv$ (p, q) -аналитическая в области D , за исключением отдельных точек $z_1, z_2, \dots, z_m$, где она имеет полюсы соответственно кратности $n_1, n_2, \dots, n_m$ (или существенно особые точки, когда соответствующие n_k равны бесконечности), и пусть в точках контура C функция $f(z)$ (p, q) -аналитическая или непрерывная изнутри (если контур C кусочно-монотонный). Тогда справедлива формула

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C u d\tilde{Z} + iv dZ = \sum_{s=1}^m \sum_{k=1}^{n_s} \frac{1}{(k-1)!} \left((A_k + iB_k)_s \frac{\hat{\partial}^k Z}{\partial z^k} \Big|_{z_s} + (A_k - iB_k) \frac{\hat{\partial}^k Z}{\partial \bar{z}^k} \Big|_{z_s} \right), \quad (184')$$

где $(A_k + iB_k)_s = (A_k + iB_k)_{z=z_s}$, $(A_1 + iB_1)_s$ — вычеты функции $f(z)$ в точках z_s ($s = 1, 2, \dots, m$).

§ 11. ОБ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ КЛАССАХ p -АНАЛИТИЧЕСКИХ И (p, q) -АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим вопрос об «эквивалентности» некоторых классов обобщенных аналитических функций.

Будем говорить, что третий класс обобщенных аналитических функций $F^*(z) = U^* + iV^*$ с параметром μ^* эквивалентен третьему классу обобщенных аналитических функций $F(z) = U + iV$ с параметром μ , если

$$U = \alpha U^* + \beta V^*, \quad V = \gamma U^* + \delta V^*, \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0, \quad (187)$$

или

$$F(z) = aF^*(z) + b\bar{F}^*(z), \quad |a|^2 - |b|^2 \neq 0, \quad (187')$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — вещественные функции от x и y , a и b — комплекснозначные функции от x и y .

Аналогично класс (p^*, q^*) -аналитических функций $\tilde{f}(z) = \tilde{u} + i\tilde{v}$ с характеристиками p^* и q^* будем считать эквивалентным классу (p, q) -аналитических функций $f(z) = u + iv$ с характеристиками p и q , если

$$u = \alpha\tilde{u} + \beta\tilde{v}, \quad v = \gamma\tilde{u} + \delta\tilde{v}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0, \quad (188)$$

или

$$f(z) = a\tilde{f}(z) + b\bar{\tilde{f}}(z), \quad |a|^2 - |b|^2 \neq 0, \quad (188')$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta, a$ и b имеют тот же смысл, что и в (187), (187').

Класс p^* -аналитических функций $\tilde{f}(z) = \tilde{u} + i\tilde{v}$ с характеристикой p^* будем считать эквивалентным классу p -аналитических функций $f(z) = u + iv$ с характеристикой p , если $\tilde{f}(z)$ выражается как аффинное преобразование $f(z)$ равенством (188').

Теорема 1. Для того чтобы третий класс обобщенных аналитических функций $F^*(z) = U^* + iV^*$ с параметром μ^* был эквивалентен третьему классу обобщенных аналитических функций $F(z) = U + iV$ с параметром μ , необходимо и достаточно, чтобы $\mu^* = \mu e^{i\theta}$, где θ — гармоническая функция от x и y . При выполнении этого условия справедливо равенство

$$F^*(z) = cF(z), \quad (189)$$

где $c = |c| e^{i\frac{\theta}{2}}$ — аналитическая функция от z .

В самом деле, подставляя (187') в уравнение (53), получаем

$$a \frac{\hat{d}F^*}{dz} + F^* \frac{\hat{d}a}{dz} + b \frac{\hat{d}\bar{F}^*}{dz} + \bar{F}^* \frac{\hat{d}b}{dz} = \mu (\bar{a}\bar{F}^* + bF^*).$$

Отсюда следует, что $b = 0$, $\frac{\hat{d}a}{dz} = 0$, $\frac{\hat{d}F^*}{dz} = \mu \frac{\bar{a}}{a} \bar{F}^*$, $\mu^* = \mu \frac{\bar{a}}{a}$, $F(z) = aF^*(z)$. Заменяя теперь a на $\frac{1}{c}$, получаем $\frac{c}{c} = e^{i\theta}$, $F^*(z) = cF(z)$, $c = |c| e^{i\frac{\theta}{2}}$. Теорема доказана.

Например, если $\mu = |\mu| e^{i\theta}$ — аналитическая функция от z , то, взяв $c = |c| e^{-i\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\mu}}$, получим

$$\frac{\hat{d}F^*}{dz} = |\mu| \bar{F}^*, \quad F^*(z) = \frac{1}{\sqrt{\mu}} F(z).$$

Теорема 2. Для того чтобы класс (p^*, q^*) -аналитических функций $\tilde{f}(z) = \tilde{u} + i\tilde{v}$ с характеристиками p^* и q^* ($\sigma^* = p^* + iq^*$) был эквивалентен классу (p, q) -аналитических функций $f(z) = u + iv$ с характеристиками p и q ($\sigma = p + iq$), необходимо и достаточно, чтобы $r^* = \alpha + i\gamma$ и $s^* = \beta + i\delta$ были (p, q) -аналитическими функциями с характеристиками p и q и

$$\operatorname{Re} \frac{\alpha\sigma + i\gamma}{\delta - i\beta\sigma} > 0. \quad (190)$$

При выполнении этих условий характеристики p^* и q^* (p^*, q^*)-аналитических функций $\tilde{f}(z) = \tilde{u} + i\tilde{v}$ определяются равенством

$$\sigma^* = p^* + iq^* = \frac{\alpha\sigma + i\gamma}{\delta - i\beta\sigma}, \quad p^* > 0. \quad (191)$$

В самом деле, подставляя (188) в условие (p, q) -аналитичности функции $f(z) = u + iv$ (55'), получаем

$$\sigma \frac{\hat{d}}{dz} (\alpha \tilde{u} + \beta \tilde{v}) + i \frac{d}{dz} (\gamma \tilde{u} + \delta \tilde{v}) = 0. \quad (191')$$

Приравнявая нулю коэффициенты при $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$, получаем

$$\sigma \frac{\hat{d}\alpha}{dz} + i \frac{\hat{d}\gamma}{dz} = 0, \quad \sigma \frac{\hat{d}\beta}{dz} + i \frac{\hat{d}\delta}{dz} = 0,$$

т. е. $r^* = \alpha + i\gamma$ и $s^* = \beta + i\delta$ являются (p, q) -аналитическими функциями. Равенство (191') при этом принимает вид

$$(\alpha\delta + i\gamma) \frac{\hat{d}\tilde{u}}{dz} + (\delta - i\beta\sigma) i \frac{\hat{d}\tilde{v}}{dz} = 0$$

и при выполнении условия (190) $\tilde{f}(z) = \tilde{u} + i\tilde{v}$ является (p^*, q^*) -аналитической функцией с характеристиками p^* и q^* , определенными равенством (191). Теорема доказана.

Например, если $p = 1, q = 0$, т. е. $f(z) = u + iv$ — класс аналитических функций, то из (191) получаем

$$\sigma^* = p^* + iq^* = \frac{\alpha + i\gamma}{\delta - i\beta} = \frac{r^*}{-is^*}.$$

Это значит, что классу аналитических функций $f(z) = u + iv$ эквивалентны всевозможные классы (p^*, q^*) -аналитических функций $\tilde{f}(z) = \tilde{u} + i\tilde{v}$, для которых $\sigma^* = p^* + iq^*$ является аналитической функцией от z . В частности, полагая $\beta = 0, \delta = 1, s^* = i$, получаем $\sigma^* = p^* + iq^* = r^* = \alpha + i\gamma$, и равенства (188) принимают вид

$$u = p^* \tilde{u}, \quad v = \tilde{v} + q^* \tilde{u} \quad \left(\tilde{u} = \frac{1}{p^*} u, \quad \tilde{v} = v - \frac{q^*}{p^*} u \right). \quad (192)$$

С помощью теоремы 2 и замечания 1 § 2 можно осуществить аффинное преобразование класса (p, q) -аналитических функций $f(z) = u + iv$ с характеристиками p и q ($\gamma = p + iq$) в другой, эквивалентный ему класс (p^*, q^*) -аналитических функций $\tilde{f}(z) = \tilde{u} + i\tilde{v}$ с характеристиками p^* и q^* ($\sigma^* = p^* + iq^*$). Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Пусть $f(z) = u + iv$ — (p, q) -аналитическая функция с характеристиками p и q ($\sigma = p + iq$), $F(z) = U + iV$ — соответствующая ей обобщенная аналитическая функция третьего класса с параметром μ , определенная равенствами (58), (58'), $F^*(z) = U^* + iV^*$ — обобщенная аналитическая функция с параметром $\mu^* = \mu e^{i\theta}$, определенная равенством (189). Тогда функция $\tilde{f}(z) = \tilde{u} + i\tilde{v}$, определенная равенством

$$F^*(z) = U^* + iV^* = \nu[p^* \tilde{u} + i(\tilde{v} + q^* \tilde{u})], \quad (193)$$

будет (p^*, q^*) -аналитической с характеристиками p^* и q^* ($\sigma^* = p^* + iq^*$), определенными равенством

$$\sigma^* = p^* + iq^* = \frac{\lambda}{\nu}, \quad p^* > 0, \quad (193')$$

где λ и ν — решения соответственно уравнений

$$\frac{\hat{d}\lambda}{d\bar{z}} = \mu^* \bar{\lambda}, \quad \frac{\hat{d}\nu}{d\bar{z}} = -\mu^* \nu, \quad (193'')$$

$$\mu^* = \frac{1}{2p} \frac{\hat{d}\sigma}{d\bar{z}} \frac{t}{\bar{t}}, \quad t = e^{-\int \frac{1}{2p} \frac{\hat{d}\sigma}{d\bar{z}} d\bar{z}}$$

такие, что $\operatorname{Re} \frac{\lambda}{\nu} > 0$.

В самом деле, в силу замечания 1 § 2 $F(z) = U + iV$ является обобщенной аналитической функцией третьего класса с параметром μ , определенным равенством (58'). На основании предыдущей теоремы функция $F^*(z) = U^* + iV^*$ в случае любой гармонической функции θ является обобщенной аналитической функцией третьего класса с параметром $\mu^* = e^{i\theta}$. В силу этой же теоремы функция $\tilde{f}(u) = \tilde{u} + i\tilde{v}$, определенная равенством (193), является (p^*, q^*) -аналитической функцией с характеристиками p^* и q^* ($\sigma^* = p^* + iq^*$), определенными равенствами (193'), (193''). Теорема доказана.

Например, пусть $p = e^{\alpha x + \beta y}$, где α и β — вещественные постоянные, $q = 0$. В этом случае

$$\mu = \frac{1}{4} \gamma = \frac{1}{4} |\gamma| e^{i\theta}, \quad \gamma = \alpha + i\beta,$$

$$F(z) = U + iV = t(pu + iv) = \sqrt{p}u + i \frac{v}{\sqrt{p}} = e^{\frac{\alpha x + \beta y}{2}} u + i e^{-\frac{\alpha x + \beta y}{2}} v.$$

Уравнения (193''), если положить $c = e^{-i\frac{\theta}{2}}$, принимают вид

$$\frac{\hat{d}\lambda}{d\bar{z}} = \frac{1}{4} |\gamma| \bar{\lambda}, \quad \frac{\hat{d}\nu}{d\bar{z}} = -\frac{1}{4} |\gamma| \bar{\nu}, \quad \mu^* = \mu e^{-i\theta}.$$

В качестве решений этих уравнений можно взять $\lambda = e^{\frac{1}{2} |\gamma| x}$, $\nu = e^{-\frac{1}{2} |\gamma| x}$. При этом в силу (193') $\sigma^* = p^* + iq^* = e^{|\gamma| x}$.

Таким образом, приходим к выводу, что если $f(z) = u + iv$ — p -аналитическая функция с характеристикой $p = e^{\alpha x + \beta y}$, то функция $\tilde{f}(z) = \tilde{u} + i\tilde{v}$, определенная равенствами

$$F^*(z) = e^{-i\frac{\theta}{2}} F(z) = e^{-\frac{1}{2} |\gamma| x} [e^{|\gamma| x} \tilde{u} + i\tilde{v}], \quad (194)$$

где

$$F(z) = e^{\frac{\alpha x + \beta y}{2}} u + i v e^{-\frac{\alpha x + \beta y}{2}}, \quad (194')$$

или

$$\left. \begin{aligned} \tilde{u} &= \cos \frac{\theta}{2} e^{\frac{(\alpha - |\gamma|)x + \beta y}{2}} u + \sin \frac{\theta}{2} e^{-\frac{(\alpha + |\gamma|)x + \beta y}{2}} v, \\ \tilde{v} &= \sin \frac{\theta}{2} e^{\frac{(\alpha + |\gamma|)x + \beta y}{2}} u + \cos \frac{\theta}{2} e^{-\frac{(\alpha - |\gamma|)x + \beta y}{2}} v, \end{aligned} \right\} \quad (194'')$$

p^* -аналитическая с характеристикой $p^* = e^{|\gamma|x}$.

Замечание 1. Обозначим через $f^{(s)}(z) = u^{(s)} + i v^{(s)}$ p -аналитическую функцию от $z = x + iy$ с характеристикой $p = r(x)y^s$, где $r(x)$ — заданная непрерывно дифференцируемая функция от x ($r(x) > 0$), s — любое вещественное число ($y > 0$). Тогда справедливы следующие два преобразования: для функций $f^{(2-s)}(z)$

$$f^{(2-s)}(z) = u^{(2-s)} + i v^{(2-s)} = y^{s-1} u^{(s)} + i \left(y^{1-s} \frac{\partial v^{(s)}}{\partial x} - r(s-1) u^{(s)} \right) dx + y^{1-s} \frac{\partial v^{(s)}}{\partial y} dy, \quad (195)$$

для функции $f^{(s+2)}(z)$

$$f^{(s+2)}(z) = u^{(s+2)} + i v^{(s+2)} = \frac{1}{y} \frac{\partial u^{(s)}}{\partial y} + i \int -r y^{s+2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{y} \frac{\partial u^{(s)}}{\partial y} \right) dx + r y^{s+2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{y} \frac{\partial u^{(s)}}{\partial y} \right) dy. \quad (196)$$

Чтобы убедиться в справедливости равенств (195), (196), заметим вначале, что для дифференциального оператора

$$L_s(u) = \frac{\partial}{\partial x} \left(r y^s \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(r y^s \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (197)$$

при любой функции $u = u(x, y)$ выполняются тождества

$$L_{2-s}(y^{s-1}u) = y^{1-s}L_s(u), \quad (198)$$

$$L_{s+2} \left(\frac{1}{y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = y \frac{\partial}{\partial y} L_s(u) - s L_s(u). \quad (199)$$

В самом деле,

$$A = \frac{\partial}{\partial x} \left[r y^{2-s} \frac{\partial}{\partial x} (y^{s-1}u) \right] = y^{1-s} \frac{\partial}{\partial x} \left(r y^s \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

Для величины

$$B = \frac{\partial}{\partial y} \left[r y^{2-s} \frac{\partial}{\partial y} (y^{s-1}u) \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left[r y^{2-s} \left((s-1) y^{s-2}u + y^{s-1} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right]$$

находим

$$\begin{aligned} B &= r(s-1) \frac{\partial u}{\partial y} + r \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial u}{\partial y} \right) = r s \frac{\partial u}{\partial y} + r y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \\ &= y^{1-s} \left[r s y^{s-1} \frac{\partial u}{\partial y} + r y^s \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] = y^{1-s} \frac{\partial}{\partial y} \left(r y^s \frac{\partial u}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Складывая A и B , приходим к выводу, что тождество (198) справедливо.

Далее,

$$C = \frac{\partial}{\partial x} \left[ry^{s+2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left(ry^{s+1} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) = \\ = y \frac{\partial}{\partial x} \left(ry^s \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} \right) = y \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(ry^s \frac{\partial u}{\partial x} \right) - rsy^{s-1} \frac{\partial u}{\partial x} \right],$$

или

$$C = y \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(ry^s \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] - s \frac{\partial}{\partial x} \left(ry^s \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

Для величины

$$D = \frac{\partial}{\partial y} \left[ry^{s+2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left[ry^{s+1} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - ry^s \frac{\partial u}{\partial y} \right]$$

находим

$$D = r \left[(s+1) y^s \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + y^{s-1} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - sy^{s-1} \frac{\partial u}{\partial y} - y^s \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] = \\ = ry \left[y^s \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + 2sy^{s-1} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + s(s-1) y^{s-2} \frac{\partial u}{\partial y} \right] - \\ - rsy^s \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - rs(s-1) y^{s-1} \frac{\partial u}{\partial y} - rsy^{s-1} \frac{\partial u}{\partial y},$$

или

$$D = y \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(ry^s \frac{\partial u}{\partial y} \right) - s \frac{\partial}{\partial y} \left(ry^s \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Складывая величины C и D , получаем тождество (199).

Из тождества (198) следует, что под знаком интеграла в правой части равенства (195) стоит полный дифференциал некоторой функции. Такой же вывод получается из тождества (199) относительно подынтегрального выражения в правой части равенства (196). Далее, с помощью непосредственной проверки убеждаемся, что функции комплексного переменного $z = x + iy$, определенные равенствами (195) и (196), удовлетворяют условиям p -аналитичности соответственно при $p = ry^{2-s}$ и $p = ry^{s+2}$, т. е. справедливость равенств (195) и (196) доказана.

Последовательное применение преобразований (195) и (196) позволяет преобразовывать p -аналитическую функцию с характеристикой $p = r(x) y^s$ (s — вещественная постоянная, $y > 0$, $r(x) > 0$) в p^* -аналитическую функцию с характеристикой $p^* = r(x) y^{s \pm 2m}$, где m — целое число.

Замечание 2. Пусть $f(z) = u + iv$ — p -аналитическая функция с характеристикой p , $f^*(z) = u^* + iv^* = u + i \frac{v}{p}$ — соответствующая ей «присоединенная» p -аналитическая функция с характеристикой p , удовлетворяющая в силу условий p -аналитичности уравнению

$$\frac{\hat{a}f^*}{\hat{d}z} = \frac{1}{2p} \frac{\hat{a}p}{\hat{d}z} (\bar{f}^* - f^*). \quad (200)$$

Справедливо следующее утверждение. Если $f(z) = u + iv$ — p -аналитическая функция от $z = x + iy$ с характеристикой $p = x$, $f^*(z) = u^* + iv^* = u + i \frac{v}{x}$, то

$$\tilde{f}(z) = -x \frac{\partial f(z)}{\partial x} - y \frac{\partial f(z)}{\partial y} - \frac{1}{2} \bar{f}(z) \quad (201)$$

является также x -аналитической функцией от $z = x + iy$, а

$$\tilde{f}^*(z) = iz \frac{\partial \tilde{f}^*(z)}{\partial y} - \frac{1}{2} \bar{f}^*(z) \quad (202)$$

присоединенной по отношению к $\tilde{f}(z)$ x -аналитической функцией, последняя, в частности, удовлетворяет тому же уравнению, что и $f^*(z)$:

$$\frac{\hat{d} \tilde{f}^*(z)}{d\bar{z}} = \frac{1}{4x} (\bar{f}^* - f^*). \quad (200')$$

В справедливости этого утверждения проще всего можно убедиться с помощью непосредственной проверки.

§ 12. О ПРЕДСТАВЛЕНИИ p -АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ВИДЕ ЛИНЕЙНЫХ КОМБИНАЦИЙ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ ДО n -ГО ПОРЯДКА

Пусть $f(z) = u + iv$ — p -аналитическая функция от $z = x + iy$, т. е. функция, определенная системой уравнений (54), где $p = p(x, y)$ — заданная функция от x и y , $p(x, y) > 0$. Важную роль, как известно, при изучении решений эллиптических систем дифференциальных уравнений (в частности, потому, что решения краевых задач для аналитических функций достаточно хорошо изучены [84—86]) играют различного рода представления их через аналитические функции [41, 9, 10, 14, 87]. Случай представления общего решения системы уравнений (54) (при $p = \frac{1}{\mu^2} (th^2 m(y - y_0))$, μ , m , y_0 — постоянные) в виде линейных комбинаций аналитических функций и их первых производных указан в работе [88]. Аналогичные важные частные случаи для гиперболических систем уравнений с применениями к газовой динамике и теории пластичности изучены в работах [88, 89].

Рассмотрим [90, 91] вопрос о необходимых и достаточных условиях представимости p -аналитических функций в виде линейных комбинаций аналитических функций и их производных первого и вообще n -го порядков.

Пусть $w = f(z) = u + iv$ — любая функция комплексного переменного $z = x + iy$, имеющая непрерывные частные производные

по x и y ,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{p}} \frac{\hat{d}_p w}{dz} &= \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{\hat{d}_p f(z)}{dz} = \frac{1}{\sqrt{p}} \left(\frac{p u_x + v_y}{2} + i \frac{v_x - p u_y}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{p} u_x + \frac{v_y}{\sqrt{p}} \right) + i \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{p}} v_x - \sqrt{p} u_y \right)\end{aligned}$$

представляет собой операторную p -производную по $z = x + iy$ данной функции $\omega = f(z)$, деленную на $\sqrt{p}$. Пусть $\omega^* = f^*(z) = \sqrt{p} u + i \frac{v}{\sqrt{p}}$, $P = -\frac{1}{2} \frac{\hat{d} \ln p}{dz}$. Тогда выполняется равенство

$$\frac{1}{\sqrt{p}} \frac{\hat{d}_p w}{dz} = \frac{\hat{d} \omega^*}{dz} + P \bar{\omega}^*. \quad (203)$$

Если U — вещественная функция, то

$$\frac{1}{\sqrt{p}} \frac{\hat{d}_p (wU)}{dz} = \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{\hat{d}_p w}{dz} U + \omega^* \frac{\hat{d} U}{dz}. \quad (204)$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{p}} \frac{\hat{d}_p w}{dz} &= \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{\hat{d}_p f(z)}{dz} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{p} u_x - \frac{1}{\sqrt{p}} v_y \right) + \\ &+ i \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{p}} v_x + \sqrt{p} u_y \right),\end{aligned}$$

аналогично получаем равенства

$$\frac{\hat{d}_p w}{dz} = \frac{d \omega^*}{dz} + \bar{P} \bar{\omega}^*, \quad (203')$$

$$\frac{\hat{d}_p (wU)}{dz} = \frac{\hat{d}_p w}{dz} U + \omega^* \frac{\hat{d} U}{dz}. \quad (204')$$

Пусть теперь $w = f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ — p -аналитическая функция от $z = x + iy$ с характеристикой $p = p(x, y)$, $F(z) = \frac{\partial U}{\partial x} - i \frac{\partial U}{\partial y}$ — аналитическая функция от z , $\omega_k = \alpha_k + i \beta_k$,

$w_k = v_k + i \delta_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) — какие-либо функции от z ,

$$\lambda_k = \omega_k^* = \sqrt{p} \alpha_k + i \frac{1}{\sqrt{p}} \beta_k, \quad \mu_k = w_k^* = \sqrt{p} v_k + i \frac{1}{\sqrt{p}} \delta_k$$

$$(k = 1, 2, \dots, n).$$

Будем искать представление p -аналитической функции $w = f(z)$ в виде

$$w = f(z) = u(x, y) + i v(x, y) = \sum_{k=1}^n \omega_k \frac{\partial^k U}{\partial x^k} + w_k \frac{\partial^k U}{\partial x^{k-1} \partial y}, \quad (205)$$

где n — целое положительное число, $n \geq 2$. Очевидно, что

$$\begin{aligned} \omega^* = f^*(z) &= \sqrt{p} u(x, y) + i \frac{1}{\sqrt{p}} v(x, y) = \\ &= \sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{\partial^k U}{\partial x^k} + \mu_k \frac{\partial^k U}{\partial x^{k-1} \partial y}. \end{aligned} \quad (206)$$

Подсчитаем от функции $w = f(z) = u + iv$ операторную p -производную по $\bar{z} = x - iy$, деленную на $\sqrt{p}$. Получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{\hat{d}_p w}{d\bar{z}} &= \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{\sqrt{p}} \frac{\hat{d}_p \omega_k}{d\bar{z}} \frac{\partial^k U}{\partial x^k} + \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{\hat{d}_p w_k}{d\bar{z}} \frac{\partial^k U}{\partial x^{k-1} \partial y} + \right. \\ &\quad \left. + \lambda_k \frac{\hat{d}}{d\bar{z}} \frac{\partial^k U}{\partial x^k} + \mu_k \frac{\hat{d}}{d\bar{z}} \frac{\partial^k U}{\partial x^{k-1} \partial y} \right], \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{\hat{d}_p w}{d\bar{z}} &= \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{\hat{d}_p \omega_1}{d\bar{z}} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{\hat{d}_p w_1}{d\bar{z}} \frac{\partial U}{\partial y} + \lambda_n \frac{\hat{d}}{d\bar{z}} \frac{\partial^n U}{\partial x^n} + \\ &+ \mu_n \frac{\hat{d}}{d\bar{z}} \frac{\partial^n U}{\partial x^{n-1} \partial y} + \sum_{k=1}^{n-1} \left[\lambda_k \frac{\hat{d}}{d\bar{z}} \frac{\partial^k U}{\partial x^k} + \mu_k \frac{\hat{d}}{d\bar{z}} \frac{\partial^k U}{\partial x^{k-1} \partial y} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^{k+1} U}{\partial x^{k+1}} \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{\hat{d}_p \omega_{k+1}}{d\bar{z}} + \frac{\partial^{k+1} U}{\partial x^k \partial y} \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{\hat{d}_p w_{k+1}}{d\bar{z}} \right]. \end{aligned}$$

Поскольку функция $w = f(z) = u + iv$ p -аналитическая, $\frac{\hat{d}_p(w)}{d\bar{z}} = 0$. Поэтому, приравнявая нулю коэффициенты при производных от U , получаем систему уравнений, которым должны удовлетворять функции λ_k , μ_k или ω_k , w_k ($k = 1, 2, \dots, n$). Эта система имеет вид

$$\frac{\hat{d}_p \omega_1}{d\bar{z}} = 0, \quad \frac{\hat{d}_p w_1}{d\bar{z}} = 0, \quad (207)$$

$$\frac{1}{2} \lambda_n - i \frac{1}{2} \mu_n = 0, \quad i \frac{1}{2} \lambda_n + \frac{1}{2} \mu_n = 0, \quad (208)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \lambda_k - i \frac{1}{2} \mu_k + \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{\hat{d}_p \omega_{k+1}}{d\bar{z}} &= 0, \\ i \frac{1}{2} \lambda_k + \frac{1}{2} \mu_k + \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{\hat{d}_p w_{k+1}}{d\bar{z}} &= 0, \\ k &= 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned} \right\} \quad (209)$$

Равенства (207) означают, что ω_1 , и w_1 — p -аналитические функции, из (208) следует, что $\lambda_n = i\mu_n$ или $\mu_n = -i\lambda_n$ ²². С помощью формулы (203') систему уравнений (209) можем записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2}(\lambda_k - i\mu_k) + \frac{\hat{d}\lambda_{k+1}}{d\bar{z}} + \bar{P}\bar{\lambda}_{k+1} &= 0, \\ -\frac{1}{2}(\lambda_k - i\mu_k) + \frac{\hat{d}i\mu_{k+1}}{d\bar{z}} - \bar{P}(\overline{i\mu_{k+1}}) &= 0, \\ k &= n-1, n-2, \dots, 1. \end{aligned} \right\} \quad (210)$$

При $k = n-1$ с учетом, что $i\mu_n = \lambda_n$, из системы (210) получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\lambda_{n-1} - i\mu_{n-1}) + \frac{\hat{d}\lambda_n}{d\bar{z}} + \bar{P}\bar{\lambda}_n &= 0, \\ -\frac{1}{2}(\lambda_{n-1} - i\mu_{n-1}) + \frac{\hat{d}\lambda_n}{d\bar{z}} - \bar{P}\bar{\lambda}_n &= 0, \end{aligned}$$

или

$$2 \frac{\hat{d}\lambda_n}{d\bar{z}} = 0, \quad \lambda_{n-1} - i\mu_{n-1} = -2\bar{P}\bar{\lambda}_n.$$

Отсюда

$$\lambda_n = i\mu_n = C_n, \quad (211)$$

$$\lambda_{n-1} = i\mu_{n-1} + \bar{Q}\bar{\lambda}_n, \quad (212)$$

где $Q = -2P = \frac{\hat{d} \ln p}{dz}$, $C_n = C_n(z)$ — произвольная аналитическая функция от z . При $k = n-2$ с учетом (212) из системы (210) находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\lambda_{n-2} - i\mu_{n-2}) + \frac{\hat{d}\lambda_{n-1}}{d\bar{z}} + \bar{P}\bar{\lambda}_{n-1} &= 0, \\ -\frac{1}{2}(\lambda_{n-2} - i\mu_{n-2}) + \frac{\hat{d}\lambda_{n-1}}{d\bar{z}} - \frac{\hat{d}\bar{Q}\bar{\lambda}_n}{d\bar{z}} - \bar{P}(\bar{\lambda}_{n-1} - P\lambda_n) &= 0. \end{aligned}$$

Из этих уравнений получаем

$$\begin{aligned} 2 \frac{\hat{d}\lambda_{n-1}}{d\bar{z}} &= \frac{\hat{d}(\bar{Q}\bar{\lambda}_n)}{d\bar{z}} - \bar{P}Q\lambda_n, \\ \lambda_{n-2} - i\mu_{n-2} &= -2\bar{P}\bar{\lambda}_{n-1} - 2 \frac{\hat{d}\lambda_{n-1}}{d\bar{z}}. \end{aligned}$$

²² Если в (205) положить $n = 1$, то из (208) следует, что $\lambda_1 = i\mu_1$, из (207) — что $\frac{\hat{d}\lambda_1}{d\bar{z}} = -\bar{P}\bar{\lambda}_1$, $\frac{\hat{d}\mu_1}{d\bar{z}} = -\bar{P}\bar{\mu}_1$ и, значит, $-\bar{P}\bar{\lambda}_1 = -i\bar{P}\bar{\mu}_1$, $\lambda_1 = \mu_1 = 0$.

Отсюда

$$\lambda_{n-1} = C_{n-1} - \bar{P}\bar{\lambda}_n + \hat{\int} \lambda_n P \bar{P} d\bar{z}, \quad (213)$$

$$\lambda_{n-2} = i\mu_{n-2} + \bar{Q}\bar{\lambda}_{n-1} - 2 \frac{\hat{d}\lambda_{n-1}}{d\bar{z}}, \quad (214)$$

где $C_{n-1} = C_{n-1}(z)$ — произвольная аналитическая функция от z .
При $k = n - 3$ из системы (210) получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\lambda_{n-3} - i\mu_{n-3}) + \frac{\hat{d}\lambda_{n-2}}{d\bar{z}} + \bar{P}\bar{\lambda}_{n-2} = 0, \\ & -\frac{1}{2}(\lambda_{n-3} - i\mu_{n-3}) + \frac{\hat{d}\bar{\lambda}_{n-2}}{d\bar{z}} - \frac{\hat{d}}{d\bar{z}} \left(\bar{Q}\bar{\lambda}_{n-1} - 2 \frac{\hat{d}\lambda_{n-1}}{d\bar{z}} \right) - \\ & - \bar{P} \left[\bar{\lambda}_{n-2} - \left(Q\lambda_{n-1} - 2 \frac{\hat{d}\bar{\lambda}_{n-1}}{dz} \right) \right] = 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} 2 \frac{\hat{d}\lambda_{n-2}}{d\bar{z}} &= \frac{\hat{d}}{d\bar{z}} \left(\bar{Q}\bar{\lambda}_{n-1} - 2 \frac{\hat{d}\lambda_{n-1}}{d\bar{z}} \right) - \bar{P} \left(Q\lambda_{n-1} - 2 \frac{\hat{d}\bar{\lambda}_{n-1}}{dz} \right), \\ \lambda_{n-3} - i\mu_{n-3} &= -2\bar{P}\bar{\lambda}_{n-2} - 2 \frac{\hat{d}\lambda_{n-2}}{d\bar{z}}, \end{aligned}$$

или

$$\lambda_{n-2} = C_{n-2} - \bar{\Omega}_{n-1} + \hat{\int} \bar{P}\Omega_{n-1} d\bar{z}, \quad (215)$$

$$\lambda_{n-3} = i\mu_{n-3} - 2\bar{\Omega}_{n-2}, \quad (216)$$

где $C_{n-2} = C_{n-2}(z)$ — произвольная аналитическая функция от z ,

$$\Omega_k = P\lambda_k + \frac{\hat{d}\bar{\lambda}_k}{\partial z}, \quad k = n-1, n-2, \dots, 2. \quad (217)$$

Предположим, что

$$\lambda_{k+1} = C_{k+1} - \bar{\Omega}_{k+2} + \hat{\int} \bar{P}\Omega_{k+2} d\bar{z}, \quad (218)$$

$$\lambda_k = i\mu_k - 2\bar{\Omega}_{k+1}. \quad (219)$$

Тогда из $(k-1)$ -х равенств системы (210), учитывая (218), (219), получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\lambda_{k-1} - i\mu_{k-1}) + \frac{\hat{d}\lambda_k}{d\bar{z}} + \bar{P}\lambda_k = 0, \\ & -\frac{1}{2}(\lambda_{k-1} - i\mu_{k-1}) + \frac{\hat{d}\lambda_k}{d\bar{z}} - \frac{\hat{d}}{d\bar{z}} \left(\bar{Q}\bar{\lambda}_{k+1} - 2 \frac{\hat{d}\lambda_{k+1}}{d\bar{z}} \right) - \\ & - \bar{P} \left[\bar{\lambda}_k - \left(Q\lambda_{k+1} - 2 \frac{\hat{d}\bar{\lambda}_{k+1}}{dz} \right) \right] = 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$2 \frac{\hat{d}\lambda_k}{dz} = \frac{\hat{\partial}}{\hat{d}\bar{z}} \left(\bar{Q}\bar{\lambda}_{k+1} - 2 \frac{\hat{d}\lambda_{k+1}}{dz} \right) - \bar{P} \left(Q\lambda_{k+1} - 2 \frac{\hat{d}\bar{\lambda}_{k+1}}{dz} \right),$$

$$\lambda_{k-1} - i\mu_{k-1} = -2\bar{P}\bar{\lambda}_k - 2 \frac{\hat{d}\lambda_k}{dz},$$

следовательно,

$$\lambda_k = C_k - \bar{\Omega}_{k+1} + \int \bar{P}\bar{\Omega}_{k+1} d\bar{z},$$

$$\lambda_{k-1} = i\mu_{k-1} - 2\bar{\Omega}_k,$$

где $C_k = C_k(z)$ — произвольная аналитическая функция от z .

Таким образом, приходим к выводу, что равенства (218), (219) при $k = n, n-1, n-2, \dots, 1$ определяют решения системы уравнений (210), т. е. λ_k, μ_k ($k = n, n-1, \dots, 1$), через $n-1$ произвольные аналитические функции $C_n, C_{n-1}, \dots, C_2$ при условии, что Ω_{k+2} ($k = n, n-1, \dots, 1, 0$) определяются равенствами (217), причем $\Omega_{n+2} = \Omega_{n+1} = 0$, $\Omega_n = P\lambda_n$, а также

$\lambda_{n+1} = 0$, $\frac{\hat{d}\lambda_n}{dz} = 0$, $\lambda_n = C_n$. В частности, при $k = 1$ равенство (219) принимает вид

$$\lambda_1 = i\mu_1 - 2\bar{\Omega}_2. \quad (220)$$

Теперь остается только показать, что функции ω_1 и ω_1 являются p -аналитическими, т. е. удовлетворяют системе уравнений (207) или

$$\frac{\hat{d}\lambda_1}{dz} = -\bar{P}\bar{\lambda}_1, \quad \frac{d\mu_1}{dz} = -\bar{P}\bar{\mu}_1. \quad (207')$$

Из (220), учитывая (207), получаем

$$-\bar{P}\bar{\lambda}_1 = -i\bar{P}\mu_1 - 2 \frac{\hat{d}}{dz} \bar{\Omega}_2,$$

или

$$P\lambda_1 = -iP\mu_1 + 2 \frac{\hat{d}}{dz} \Omega_2.$$

Из этого равенства и из (220) находим

$$\lambda_1 = -\bar{\Omega}_2 + \frac{1}{P} \frac{\hat{d}\Omega_2}{dz}. \quad (221)$$

В силу первого из уравнений (207')

$$-\bar{P}\bar{\lambda}_1 = -\frac{\hat{d}\bar{\Omega}_2}{d\bar{z}} + \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{P} \frac{\hat{d}\Omega_2}{dz} \right).$$

Из этого уравнения и уравнения (221) получаем

$$-\bar{\Omega}_2 + \frac{1}{P} \frac{\hat{d}\Omega_2}{dz} = \frac{1}{P} \frac{\hat{d}\Omega_2}{dz} - \frac{1}{P} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{P} \frac{\hat{d}\bar{\Omega}_2}{d\bar{z}} \right),$$

или

$$\frac{\hat{d}}{d\bar{z}} \left(\frac{1}{P} \frac{\hat{d}\Omega_2}{dz} \right) - \bar{P}\Omega_2 = 0. \quad (222)$$

Равенство (222) представляет собой необходимое условие, которому должна удовлетворять характеристика $p = p(x, y)$, чтобы для данной p -аналитической функции $w = f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ было справедливо представление (205), или, что то же самое, для функции $w^* = f^*(z) = \sqrt{p}u + i \frac{v}{\sqrt{p}}$ — представление (206). Равенство (222) является линейным однородным уравнением относительно аналитических функций $C_n, C_{n-1}, \dots, C_2$ и их производных до вполне определенных порядков. Достаточным условием для того, чтобы выполнялось представление (205), или, что то же самое, (206), является существование ненулевого решения уравнения (222) относительно $C_n, C_{n-1}, \dots, C_2$. Если такое ненулевое решение существует, то, определив λ_k, μ_k ($k = n, n-1, \dots, 1$) по формулам (218) — (221) и подставив полученные значения в (205) или (206), получим представление p -аналитических функций через аналитические функции и их производные до n -го порядка.

Например, при $n = 2$ получаем $\lambda_2 = C_2, \Omega_2 = PC_2$, и условие (222) принимает вид

$$H = \frac{\hat{d}^2 \ln P}{dz d\bar{z}} - P\bar{P} = 0 \quad (223)$$

При $n = 3$ $\lambda_3 = C_3, \Omega_3 = PC_3$,

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= C_2 - \bar{\Omega}_3 + \int \bar{P}\Omega_3 d\bar{z}, \quad \Omega_2 = P\lambda_2 + \frac{\hat{d}\bar{\lambda}_2}{dz} = \\ &= PC_2 - P\bar{\Omega}_3 + P \int \bar{P}\Omega_3 d\bar{z} - \frac{\hat{d}\Omega_3}{dz} + P\bar{\Omega}_3, \end{aligned}$$

или

$$\Omega_2 = PC_2 + PC_3 R - \frac{\hat{d}C_3 R}{dz}, \quad R = \int P\bar{P} d\bar{z}. \quad (224)$$

Условие (222) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\hat{d}}{d\bar{z}} \left\{ \frac{1}{P} \left[\frac{\hat{d}PC_2}{dz} + \frac{\hat{d}PC_3 R}{dz} - \frac{\hat{d}^2 C_3 P}{dz^2} \right] \right\} - \\ - \bar{P} \left[PC_2 + PC_3 R - \frac{\hat{d}C_3 P}{dz} \right] = 0. \end{aligned} \quad (225)$$

С помощью простого подсчета находим

$$\frac{\hat{d}}{d\bar{z}} \left(\frac{1}{P} \frac{\hat{d}PC_2}{dz} \right) = C_2 \frac{\hat{d}^2 \ln P}{dz d\bar{z}},$$

$$\frac{\hat{d}}{dz} \left(\frac{1}{P} \frac{\hat{d}PC_3R}{dz} \right) = C_3 \frac{\hat{d}}{dz} \left(\frac{1}{P} \frac{\hat{d}PR}{dz} \right) + \frac{\hat{d}C_3}{dz} P \bar{P},$$

$$\frac{\hat{d}}{dz} \left(\frac{1}{P} \frac{\hat{d}^2 C_3 P}{dz^2} \right) = C_3 \frac{\hat{d}}{dz} \left(\frac{1}{P} \frac{\hat{d}^2 P}{dz^2} \right) + \frac{\hat{d}C_3}{dz} 2 \frac{\hat{d}^2 \ln P}{dz dz}$$

и из (225) получаем

$$C_2 H + C_3 G - 2 \frac{\hat{d}C_3}{dz} H = 0, \quad (226)$$

где

$$H = \frac{\hat{d}^2 \ln P}{dz dz} - P \bar{P}, \quad G = \frac{\hat{d}}{dz} \left[\frac{1}{P} \frac{\hat{d}}{dz} \left(PR - \frac{\hat{d}P}{dz} \right) \right] -$$

$$- \bar{P} \left(PR - \frac{dP}{dz} \right). \quad (227)$$

Из (226) находим

$$C_2 = -C_3 \frac{G}{H} + 2 \frac{\hat{d}C_3}{dz}.$$

Таким образом, при $n = 3$ условие (222) принимает вид

$$H \frac{\hat{d}G}{dz} - G \frac{dH}{dz} = 0, \quad (228)$$

т. е. $\frac{G}{H}$ — аналитическая функция от z .

В аналогичной форме, т. е. в виде дифференциального уравнения относительно характеристики $p = p(x, y)$, можно записать условие (222) при других конкретных значениях n . В частности, если предположить, что p зависит только от x или только y , то условие (222) при $n = 2$, т. е. условие (223), примет соответственно вид

$$H = \frac{1}{4} \frac{d^2}{dx^2} \ln \left(\frac{d \ln p}{dx} \right) - \frac{1}{16} \left(\frac{d \ln p}{dx} \right)^2 = 0, \quad (223')$$

$$H = \frac{1}{4} \frac{d^2}{dy^2} \ln \left(\frac{d \ln p}{dy} \right) - \frac{1}{16} \left(\frac{d \ln p}{dy} \right)^2 = 0. \quad (223'')$$

Решения уравнения (223') имеют вид $p = (x\lambda + v)^2$, $p = \mu^2 \text{cth}^2(x\lambda + v)$, $p = \mu^2 \text{ctg}^2(x\lambda + v)$, где λ, v, μ — произвольные вещественные постоянные, $\lambda > 0$; решения уравнения (223'') — $p = (y\lambda + v)^2$, $p = \mu^2 \text{cth}^2(y\lambda + v)$, $p = \mu^2 \text{ctg}^2(y\lambda + v)$, где λ, v, μ имеют тот же смысл, что и в предыдущем случае.

В случае $p = p(x)$ получаем представление (205) в следующем виде: при $p = (x\lambda + v)^2$

$$u = \frac{1}{x\lambda + v} U_{xy}, \quad v = -\lambda U_x + (x\lambda + v) U_{xx}, \quad (229)$$

при $p = \mu^2 \text{cth}^2(x\lambda + v)$

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{\lambda}{\mu} U_y + \frac{1}{\mu} \text{th}(x\lambda + v) U_{xy}, \\ v &= -\lambda \mu U_x + \mu \text{cth}(x\lambda + v) U_{xx}, \end{aligned} \right\} \quad (229')$$

при $p = \mu^2 \operatorname{ctg}^2(x\lambda + v)$

$$u = -\frac{\lambda}{\mu} U_y + \frac{1}{\mu} \operatorname{tg}(x\lambda + v) U_{xy}, \quad v = \lambda \mu U_x + \mu \operatorname{ctg}(x\lambda + v) U_{xx}. \quad (229'')$$

Например, в случае (229), полагая $U_x = \ln|z - z_0|$, получаем p -аналитическую функцию $f(z) = u + iv$ с полюсом первого порядка в точке $z = z_0$. В самом деле,

$$\Phi(z) = pu + iv = e^{S(z)} \omega(z) = \frac{i(\lambda x + v)}{z - z_0} - i\lambda \ln|z - z_0|$$

и, следовательно,

$$\omega(z) = \frac{i}{z - z_0}, \quad e^{S(z)} = \lambda x + v - \lambda(z - z_0) \ln|z - z_0|.$$

Полагая в соответствии с (170')

$$\begin{aligned} \Phi(z) = pu + iv &= \frac{A_1 + iB_1}{z - z_0} + R^*(z) = \\ &= \frac{i(\lambda x_0 + v)}{z - z_0} + \frac{i\lambda(x - x_0)}{z - z_0} - i\lambda \ln|z - z_0|, \end{aligned}$$

записываем

$$A_1 + iB_1 = i(\lambda x_0 + v), \quad \text{Выч } f(z) = i(\lambda x_0 + v),$$

$$R^* = \frac{i\lambda(x - x_0)}{z - z_0} - i\lambda \ln|z - z_0|.$$

Установленные результаты о представлении p -аналитических функций через аналитические функции и их производные позволяют в случае характеристик $p(z)$, для которых такие представления существуют, сводить различного рода краевые задачи p -аналитических функций к соответствующим краевым задачам аналитических функций. Эти же результаты можно использовать для приближенного решения краевых задач p -аналитических функций, т. е. краевых задач для системы уравнений (54), если данную характеристику $p = p(z)$ достаточно точно в рассматриваемой области аппроксимировать при помощи такой характеристики, для которой «дифференциальное представление», т. е. представление вида (205), существует при некотором, может быть, достаточно большом n .

Под p -гармонической функцией $u = u(x, y)$ с характеристикой $p = p(x, y)$, как всегда, понимается дважды непрерывно дифференцируемое решение уравнения

$$L(u) = \frac{\partial}{\partial x}(pu_x) + \frac{\partial}{\partial y}(pu_y) = 0. \quad (230)$$

При этом предполагается, что $p(x, y)$ имеет непрерывные частные производные по x и y и $p(x, y) > 0$. Задача о представлении p -гармонических функций через гармонические функции и их производные близка к вопросу о представлении p -аналитических функций

через аналитические функции и их производные. Следуя работе [91], рассмотрим эту задачу, т. е. вопрос о представлении p -гармонической функции $u = u(x, y)$ в виде

$$u = \sum_{k=1}^n \alpha_k \frac{\partial^k U}{\partial x^k} + \delta_k \frac{\partial^k U}{\partial x^{k-1} \partial y}, \quad (231)$$

где $U = U(x, y)$ — гармоническая функция от x, y ; α_k, δ_k , ($k = 1, 2, \dots, n$) — функции от x, y .

Легко проверяется тождество

$$\frac{1}{\sqrt{p}} L(u) = \Delta u^* + P u^*, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (232)$$

где $u^* = \sqrt{p} u$, $P = -\frac{\Delta \sqrt{p}}{\sqrt{p}}$. Очевидно, что

$$u^* = \sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{\partial^k U}{\partial x^k} + \mu_k \frac{\partial^k U}{\partial x^{k-1} \partial y}, \quad (233)$$

где

$$\lambda_k = a_k^* = \sqrt{p} \alpha_k, \quad \mu_k = \delta_k^* = \sqrt{p} \delta_k.$$

Отметим еще тождество

$$\Delta(vu) = v\Delta u + u\Delta v + 2(u_x v_x + u_y v_y). \quad (234)$$

Учитывая (232) и (234), получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{p}} L(u) &= \frac{\partial U}{\partial x} (\Delta \lambda_1 + P \lambda_1) + \frac{\partial U}{\partial y} (\Delta \mu_1 + P \mu_1) + \\ &+ 2 \frac{\partial^{n+1} U}{\partial x^{n+1}} \left(\frac{\partial \lambda_n}{\partial x} - \frac{\partial \mu_n}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial^{n+1} U}{\partial x^n \partial y} \left(\frac{\partial \lambda_n}{\partial y} + \frac{\partial \mu_n}{\partial x} \right) + \\ &+ \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \frac{\partial^{k+1} U}{\partial x^{k+1}} \left(\Delta \lambda_{k+1} + 2 \frac{\partial \lambda_k}{\partial x} - 2 \frac{\partial \mu_k}{\partial y} + P \lambda_{k+1} \right) + \right. \\ &\left. + \frac{\partial^{k+1} U}{\partial x^k \partial y} \left(\Delta \mu_k + 2 \frac{\partial \lambda_k}{\partial y} + 2 \frac{\partial \mu_k}{\partial x} + P \mu_{k+1} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (235)$$

Приравнявая нулю коэффициенты при производных от функции U , приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda_n}{\partial x} - \frac{\partial \mu_n}{\partial y} &= 0, \quad \frac{\partial \lambda_n}{\partial y} + \frac{\partial \mu_n}{\partial x} = 0, \\ 2 \left(\frac{\partial \lambda_k}{\partial x} - \frac{\partial \mu_k}{\partial y} \right) &= -\Delta \lambda_{k+1} - P \lambda_{k+1}, \\ 2 \left(\frac{\partial \lambda_k}{\partial y} + \frac{\partial \mu_k}{\partial x} \right) &= -\Delta \mu_{k+1} - P \mu_{k+1}, \\ k &= n-1, n-2, \dots, 1, \\ \Delta \lambda_1 + P \lambda_1 &= 0, \quad \Delta \mu_1 + P \mu_1 = 0. \end{aligned}$$

Введя функции $\omega_k = \lambda_k + i\mu_k$ ($k = n, n-1, \dots, 1$), заключаем, что эту систему уравнений можно записать в виде

$$\frac{\hat{d}\omega_n}{dz} = 0, \quad (236)$$

$$\frac{\hat{d}\omega_k}{dz} = -\frac{\hat{\partial}^2\omega_{k+1}}{dzdz} - Q\omega_{k+1}, \quad k = n-1, n-2, \dots, 1, \quad (237)$$

$$\frac{\hat{d}^2\omega_1}{dzdz} + Q\omega_1 = 0, \quad (238)$$

где $Q = \frac{1}{4}P$. Обозначая через $C_n, C_{n-1}, \dots, C_1$ произвольные аналитические функции от z и

$$\Omega_k = \frac{\hat{d}_2\omega_k}{dzd\bar{z}} + Q\omega_k, \quad (239)$$

из (236) и (237) получаем

$$\omega_n = C_n, \quad \omega_k = C_k - \int \Omega_{k+1} d\bar{z}, \quad k = n-1, n-2, \dots, 1, \quad (240)$$

$$\Omega_1 = 0, \quad (241)$$

$$\Omega_n = QC_n, \quad \Omega_k = QC_k - \frac{\hat{d}\Omega_{k+1}}{dz} - Q \int \Omega_{k+1} d\bar{z}, \quad (241')$$

$$k = n-1, n-2, \dots, 1.$$

Равенство (241) представляет собой необходимое условие, которому должна удовлетворять характеристика p , для того чтобы было справедливо представление (231), или, что то же самое, (233). Это равенство — вполне определенное уравнение относительно $C_n, C_{n-1}, \dots, C_1$. Если это уравнение имеет ненулевое решение относительно $C_n, C_{n-1}, \dots, C_1$, то представление (231), или, что то же самое, (233), существует и его коэффициенты $\omega_n, \omega_{n-1}, \dots, \omega_1$ определяются равенствами (240).

Рассмотрим условие (241) при конкретных значениях n .

1. Если $n = 1$, то $\omega_1 = C_1$, условие (241) принимает вид

$$\Delta \sqrt{p} = 0 \quad (242)$$

и представления (233) и (231) соответственно можно записать в виде

$$u^* = \lambda_1 \frac{\partial U}{\partial x} + \mu_1 \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \lambda_1 = \operatorname{Re} C_1, \quad \mu_1 = \operatorname{Im} C_1,$$

$$u = \frac{\lambda_1}{\sqrt{p}} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\mu_1}{\sqrt{p}} \frac{\partial U}{\partial y}.$$

2. Если $n = 2$, то $\omega_2 = C_2, \Omega_2 = QC_2$. Условие (241) принимает вид

$$\frac{\hat{d} \ln Q}{dz} = \frac{C_1}{C_2} - \frac{\hat{d} \ln C_2}{dz} - \int Q d\bar{z}.$$

Отсюда видим, что, для того чтобы при $n = 2$ было справедливо представление (231), или (233), необходимо и достаточно, чтобы характеристика p удовлетворяла условию

$$\frac{d^2 \ln Q}{dzd\bar{z}} + Q = 0 \quad (243)$$

или

$$\Delta \left(\ln \frac{\Delta \sqrt{p}}{\sqrt{p}} \right) - \frac{\Delta \sqrt{p}}{\sqrt{p}} = 0. \quad (243')$$

В частности, если p — функция только от x , $\sqrt{p} = q(x)$, то условие (243') принимает вид

$$\frac{d^2}{dx^2} \ln \frac{q'}{q} - \frac{q'}{q} = 0. \quad (243'')$$

Общее решение уравнения (243'') запишется в виде

$$q = \begin{cases} \gamma \operatorname{cth} \lambda (x + \beta) + \mu \left[x \operatorname{cth} \lambda (x + \beta) - \frac{1}{\lambda} \right], \\ \gamma \operatorname{tg} \lambda (x + \beta) + \mu \left[x \operatorname{tg} \lambda (x + \beta) + \frac{1}{\lambda} \right], \end{cases}$$

где λ , β , γ , μ — произвольные вещественные постоянные.

3. Если $n = 3$, то $\omega_3 = C_3$, $\Omega_3 = QC_3$,

$$\begin{aligned} \Omega_2 &= Q \left[C_2 - \frac{\hat{d}C_3}{dz} - C_3 \int Q d\bar{z} \right] - C_3 \frac{\hat{d}Q}{dz}, \\ \Omega_1 &= QC_1 - Q \left[\frac{\hat{d}C_2}{dz} - \frac{\hat{d}^2 C_3}{dz^2} - \frac{\hat{d}C_3}{dz} \int Q d\bar{z} \right] - C_3 \frac{\hat{d}}{dz} \int Q d\bar{z} - \\ &\quad - \frac{\hat{d}Q}{dz} \left[C_2 - \frac{\hat{d}C_3}{dz} - C_3 \int Q d\bar{z} \right] + \frac{\hat{d}C_3}{dz} \frac{\hat{d}Q}{dz} + C_3 \frac{\hat{d}^2 Q}{dz^2} - \\ &\quad - Q \int Q \left[C_2 - \frac{\hat{d}C_3}{dz} - C_3 \int Q d\bar{z} \right] d\bar{z} + QC_3 \int \frac{\hat{d}Q}{dz} d\bar{z}. \end{aligned}$$

Условие (241) после деления на QC_3 и взятия о-производной по $\bar{z}$ принимает вид

$$\begin{aligned} &Q \left[2 \frac{\hat{d} \ln C_3}{dz} - \frac{C_2}{C_3} \right] + 2 \frac{\hat{d}Q}{dz} + Q \frac{\hat{d} \ln Q}{dz} + \frac{\hat{d}^2 \ln Q}{dzd\bar{z}} \int Q d\bar{z} + \\ &+ \frac{\hat{d}}{dz} \left(\frac{1}{Q} \frac{\hat{d}^2 Q}{dz^2} \right) + Q \int Q dz + \frac{\hat{d}^2 \ln Q}{dzd\bar{z}} \left(2 \frac{\hat{d} \ln C_3}{dz} - \frac{C_2}{C_3} \right) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} &\frac{3 \frac{\hat{d}Q}{dz} + \frac{\hat{d}^2 \ln Q}{dzd\bar{z}} \int Q d\bar{z} + \frac{\hat{d}}{dz} \left(\frac{1}{Q} \frac{\hat{d}^2 Q}{dz^2} \right) + Q \int Q d\bar{z}}{\frac{\hat{d}^2}{dzd\bar{z}} \ln Q + Q} = \\ &= - \left(2 \frac{\hat{d} \ln C_3}{dz} - \frac{C_2}{C_3} \right). \end{aligned}$$

Взяв о-производную по $\bar{z}$ от обеих частей этого равенства, получаем

$$\frac{\hat{a}}{d\bar{z}} \left(3 \frac{\hat{a}Q}{dz} + \frac{\hat{a}^2 \ln Q}{dz d\bar{z}} \int Q d\bar{z} + \frac{\hat{a}}{dz} \left(\frac{1}{Q} \frac{\hat{a}^2 Q}{dz^2} \right) + Q \int Q d\bar{z} \right) = 0, \quad (244)$$

что и является необходимым и достаточным условием, которому должна удовлетворять характеристика p , для того чтобы при $n = 3$ было справедливо представление (231), или (233).

Аналогичный вид условия (241) можно получить при других конкретных значениях n .

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНЫХ КЛАССОВ p -АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, ФОРМУЛЫ ИХ ОБРАЩЕНИЯ И РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

§ 1. ПРОСТЕЙШИЕ СВЕДЕНИЯ О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Напомним некоторые общеизвестные простейшие сведения об интеграле типа Коши и о краевых задачах аналитических функций.

Пусть l — гладкая разомкнутая дуга в плоскости $z = x + iy$, имеющая в качестве левого и правого своих концов точки c^+ и c^- (рис. 7). Пусть $\varphi(t)$ (t — точка дуги l) — функция, правильно непрерывная с показателем μ ($0 < \mu \leq 1$) на открытой (не содержащей своих концов) дуге (c^+, c^-) , т. е. удовлетворяющая условию $H(\mu)$ (условию Гельдера с показателем μ , $0 < \mu \leq 1$). При выполнении последнего условия, в силу теоремы И. И. Привалова, предельные значения интеграла типа Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{\varphi(t)}{t-z} dt, \quad (1)$$

где интегрирование по l ведется от точки c^+ до точки c^- , при подходе к каждой точке t_0 открытой дуги (c^+, c^-) слева и справа существуют и как функции от t_0 на (c^+, c^-) удовлетворяют условию $H(\mu)$, если $\mu < 1$, и условию $H(1-\varepsilon)$ ($0 < \varepsilon < 1$), если $\mu = 1$. Если предельные значения $\Phi(z)$ в точке t_0 слева и справа обозначить соответственно через $\Phi^+(t_0)$ и $\Phi^-(t_0)$, то выполняются формулы Ю. В. Сохоцкого

$$\Phi^+(t_0) = \frac{1}{2} \varphi(t_0) + \Phi(t_0), \quad \Phi^-(t_0) = -\frac{1}{2} \varphi(t_0) + \Phi(t_0) \quad (2)$$

или

$$\Phi^+(t_0) - \Phi^-(t_0) = \varphi(t_0), \quad \Phi^+(t_0) + \Phi^-(t_0) = \Phi(t_0), \quad (3)$$

где

$$\Phi(t_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{\varphi(t) dt}{t-t_0},$$

причем интеграл понимается в смысле главного значения.

Будем говорить, что функция $\varphi(t)$ удовлетворяет в точке c^+ условию H_γ^+ , если на некоторой закрытой дуге (содержащей свои концы), имеющей точку c^+ своим левым концом, она представима в виде

$$\varphi(t) = \varphi^*(t)(t - c^+)^{-\gamma},$$

где $\varphi^*(t)$ — функция, удовлетворяющая условию H (т. е. условию Гельдера с некоторым показателем μ) на указанной закрытой дуге,

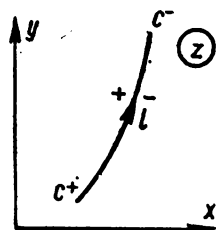


Рис. 7.

$\gamma = \alpha + i\beta$ ($0 \leq \alpha < 1$). Аналогично в точке c^- функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условию H_γ^- , если на некоторой закрытой дуге, имеющей своим правым концом точку c^- , она представима в виде

$$\varphi(t) = \varphi^*(t)(t - c^-)^{-\gamma},$$

где $\varphi^*(t)$ — функция, удовлетворяющая условию H на указанной закрытой дуге, γ — то же самое, что и в предыдущем случае. Н. И. Мусхелишвили показал, что если $\varphi(t)$ в точках c^+ и c^- удовлетворяет условиям H_γ^+ и H_γ^- , то поведение интеграла типа Коши $\Phi(z)$ и его главного значения $\Phi(t_0)$ при подходе к этим точкам определяется соответственно равенствами

$$\Phi(z) = \pm \varphi^*(c^\pm) \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{1}{z - c^\pm} + \psi(z), \quad \gamma = 0, \quad (4)$$

$$\Phi(t_0) = \pm \varphi^*(c^\pm) \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{1}{t_0 - c^\pm} + \psi^*(t_0), \quad \gamma = 0, \quad (5)$$

$$\Phi(z) = \pm \varphi^*(c^\pm) \frac{e^{\pm i\pi\gamma}}{2i \sin \pi\gamma} \cdot \frac{1}{(z - c^\pm)^\gamma} + \psi(z), \quad \gamma \neq 0, \quad (6)$$

$$\Phi(t_0) = \pm \varphi^*(c^\pm) \frac{\operatorname{ctg} \pi\gamma}{2i} \cdot \frac{1}{(t_0 - c^\pm)^\gamma} + \psi^*(t_0), \quad \gamma \neq 0, \quad (7)$$

где $\psi(z)$ — ограниченная функция, имеющая предельное значение при подходе к точкам c^+ и c^- в равенстве (4) и удовлетворяющая условию $|\psi(z)| = O(|z - c^\pm|^{-\alpha_0})$ ($\alpha_0 < \alpha$) в равенстве (6). Далее, $\psi^*(t_0)$ в точках c^+ и c^- удовлетворяет условию $H_0^\pm$ в равенстве (5) и условию $H_{\alpha_0}^\pm$ ($\alpha_0 < \alpha$) в равенстве (7), $(z - c^\pm)^\gamma$ — однозначная функция в разрезанной вдоль l плоскости, принимающая на левой стороне разреза значение $(t - c^\pm)^\gamma$.

Теорема И. И. Привалова, формулы Ю. В. Сохоцкого (2) и Н. И. Мусхелишвили (4) — (7) составляют основную теоретическую предпосылку исследований краевых задач аналитических функций. Из задач такого рода для нас прежде всего будет представлять интерес основная краевая задача аналитических функций (Римана — Гильберта) и особенно те ее случаи, когда она может быть решена

в замкнутом виде. Поэтому приведем, в соответствии с монографией Н. И. Мусхелишвили [84], основные результаты, относящиеся к задаче Гильберта (линейного сопряжения функций) и к задаче Римана — Гильберта.

Задача линейного сопряжения функций (задача Гильберта)

Пусть S^+ — область в плоскости z , содержащая точку $z = 0$, ограниченная гладкими замкнутыми контурами $L_0, L_1, \dots, L_n$, причем контур L_0 охватывает все контуры $L_1, L_2, \dots, L_n$. Пусть L — совокупность контуров $L_0, L_1, \dots, L_n$, положительный обход L тот, который оставляет точки области S^+ слева. Пусть S^- — дополнение к области S^+ . Задача линейного сопряжения функций ставится следующим образом. Требуется найти кусочно-голоморфную функцию $\Phi(z)$, т. е. функцию, голоморфную в S^+ и в S^- , непрерывно продолжимую на L слева и справа, за исключением, может быть, отдельных точек, при подходе к которым порядок роста функции меньше единицы, имеющую заданный порядок роста ρ (ρ — целое число) на бесконечности, по контурному условию

$$\Phi^+(t) = G(t) \Phi^-(t) + g(t), \quad t \in L, \quad (8)$$

где $G(t)$ и $g(t)$ — заданные на L кусочно-непрерывные функции, удовлетворяющие на каждой открытой дуге, заключенной между точками разрыва $c_1, c_2, \dots, c_r$, условию H ; кроме того, в каждой из этих точек $G(t)$ и $g(t)$ удовлетворяют условиям $H_0^\pm$ и $G(t)$ нигде не обращается в нуль.

Решением класса $h(c_1, c_2, \dots, c_q)$ задачи (8) называется такое решение, которое остается ограниченным или почти ограниченным (т. е. допускающим логарифмический рост) при подходе к точкам $c_1, c_2, \dots, c_q$ ($q \leq r$).

Пусть

$$2\pi\alpha_k = [\arg G(t)]_{c_k} = \arg G(c_k^+) - \arg G(c_k^-) \quad (9)$$

есть скачок аргумента функции $G(t)$ в точке разрыва c_k . Не нарушая контурных условий (8), можем считать

$$\left. \begin{aligned} -1 < \alpha_k \leq 0, & \quad k = 1, 2, \dots, q, \\ 0 < \alpha_k < 1, & \quad k = q+1, \dots, r. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Индексом κ класса $h(c_1, c_2, \dots, c_q)$ назовем целое число

$$\kappa = \frac{1}{2\pi} [\arg G(t)]_L = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^n [\arg G(t)]_{L_m}, \quad (11)$$

где приращения $\arg G(t)$ на L и на $L_0, L_1, \dots, L_n$ подсчитываются в соответствии с условиями (10). Чтобы найти решение класса

$h(c_1, c_2, \dots, c_q)$ однородной задачи (8), т. е. при $g(t) \equiv 0$, положим

$$\Pi(z) = (z - a_1)^{\lambda_1} (z - a_2)^{\lambda_2} \dots (z - a_n)^{\lambda_n},$$

где $a_1, a_2, \dots, a_n$ — точки, лежащие внутри контуров соответственно $L_1, L_2, \dots, L_n$,

$$\lambda_k = \frac{1}{2\pi} [\arg G(t)]_{L_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Однородная задача (8) запишется в виде

$$[\Pi(t) \Phi(t)]^+ = t^{-\kappa} \Pi(t) G(t) [t^{\kappa} \Phi(t)]^-. \quad (12)$$

Полагая

$$\Psi(z) = \begin{cases} \Pi(z) \Phi(z), & z \in S^+, \\ z^{-\kappa} \Phi(z), & z \in S^-, \end{cases} \quad (13)$$

$$G_0(t) = t^{-\kappa} \Pi(t) G(t), \quad (14)$$

условие (12) можем записать в виде $\Psi^+(t) = G_0(t) \Psi^-(t)$ или

$$\ln \Psi^+(t) - \ln \Psi^-(t) = \ln G_0(t), \quad (15)$$

где $\ln G_0(t)$ — функция, однозначная на каждом из контуров $L_0, L_1, \dots, L_n$. Поэтому условию (15), в силу формул Ю. В. Сохоцкого, удовлетворяет функция

$$\ln \Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln G_0(t) dt}{t - z}$$

или

$$\Psi(z) = e^{\Gamma(z)}, \quad \Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln G_0(t) dt}{t - z}. \quad (16)$$

Следовательно, в качестве частного решения однородной задачи (8) класса $h(c_1, c_2, \dots, c_q)$ можем взять функцию $X(z)$, определенную равенствами

$$X(z) = \begin{cases} \Pi^{-1}(z) e^{\Gamma(z)}, & z \in S^+, \\ z^{-\kappa} e^{\Gamma(z)}, & z \in S^-. \end{cases} \quad (17)$$

Эта функция называется каноническим решением, или канонической функцией, класса $h(c_1, c_2, \dots, c_q)$. Совершенно ясно, что на бесконечности она имеет порядок роста, равный $-\kappa$ и, по теореме И. И. Привалова, непрерывно продолжается на L слева и справа, если речь не идет о точках разрыва $c_1, c_2, \dots, c_q, \dots, c_r$. Из формулы (4) следует, что при подходе к этим точкам разрыва функция $X(z)$ представима в виде

$$X(z) = \frac{1}{(z - c_k)^{\alpha_k + i\beta_k}} e^{\lambda(z)}, \quad (18)$$

где

$$i\beta_k = \frac{1}{2\pi i} \ln \left| \frac{G(c_k^+)}{G(c_k^-)} \right|,$$

$\lambda(z)$ — функция, непрерывно продолжимая слева и справа на некоторую дугу, содержащую точку c_k . В частности, из (18) видим, что при подходе к точкам разрыва $c_1, c_2, \dots, c_q$, определяющим класс, $X(z)$ стремится к нулю (при $\alpha_k \neq 0$) или остается ограниченной и отличной от нуля (если $\alpha_k = 0$), при подходе же к точкам $c_{q+1}, \dots, c_r$ она имеет порядок роста меньше единицы.

Найдем теперь общее решение класса $h(c_1, c_2, \dots, c_q)$ однородной задачи (8) при заданном порядке роста ρ на бесконечности. Из равенств

$$\Phi^+(t) = G(t) \Phi^-(t), \quad X^+(t) = G(t) X^-(t)$$

получаем

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)}.$$

Следовательно, функция $\frac{\Phi(z)}{X(z)}$ голоморфна во всей плоскости z , и искомое решение имеет вид

$$\Phi(z) = X(z) P_{\rho+\kappa}(z), \quad \rho + \kappa \geq 0, \quad (19)$$

где $P_{\rho+\kappa}(z)$ — произвольный полином степени $\rho + \kappa$ при $\rho + \kappa \geq 0$, если же $\rho + \kappa < 0$, то ненулевого решения не существует.

Теперь без труда можно получить общее решение класса $h(c_1, c_2, \dots, c_q)$ неоднородной задачи (8) при заданном порядке роста ρ на бесконечности. В самом деле, контурные условия (8) можно записать в виде

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} = \frac{g(t)}{X^+(t)}. \quad (20)$$

Из формулы (5) следует, что правая часть равенства (20) в каждой из точек разрыва $c_1, c_2, \dots, c_q$ удовлетворяет условиям $H_v^\pm$, а в точках $c_{q+1}, \dots, c_r$ удовлетворяет или этим же условиям, или условию H на некоторых дугах, содержащих эти точки. Следовательно, в соответствии с формулами Ю. В. Сохоцкого

$$\frac{\Phi(z)}{X(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(t) dt}{X^+(t)(t-z)} + P_{\rho+\kappa}(z),$$

и общее решение класса $h(c_1, c_2, \dots, c_q)$ неоднородной задачи (8) имеет вид

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_L \frac{g(t) dt}{X^+(t)(t-z)} + X(z) P_{\rho+\kappa}(z), \quad \rho + \kappa \geq 0, \quad (21)$$

где $X(z)$ — каноническая функция соответствующего класса, $P_{\rho+\kappa}(z)$ — произвольный полином степени $\rho + \kappa$, если $\rho + \kappa \geq 0$, и тождественный нуль, если $\rho + \kappa \leq -1$. Если $\rho + \kappa \leq -2$, то решение существует в том и только в том случае, когда выполнены условия

$$\int_L \frac{t^k g(t) dt}{X^+(t)} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, -(\rho + \kappa + 2). \quad (22)$$

Отметим, что, когда L состоит из одного контура L_0 , каноническая функция $X(z)$ класса $h(c_1, c_2, \dots, c_q)$ записывается несколько проще, чем в общем случае,

$$X(z) = \begin{cases} e^{\Gamma(z)}, & z \in S^+, \\ z^{-\kappa} e^{\Gamma(z)}, & z \in S^-, \end{cases} \quad (17')$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \frac{1}{4\pi i} \int_{L_0} \ln[t^{-\kappa} G(t)] \frac{t+z}{t-z} \frac{dt}{t} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \ln[t^{-\kappa} G(t)] \left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{2t} \right) dt. \end{aligned} \quad (16')$$

К этому случаю задачи (8) для одного контура L_0 приводится задача линейного сопряжения функции относительно разомкнутых контуров. Для этого достаточно лишь разомкнутые контуры соединить друг с другом так, чтобы получился один замкнутый контур, и затем на линиях, при помощи которых производились соединения, положить $G(t) = 1$, $g(t) = 0$. Задача линейного сопряжения функций рассматривалась Гильбертом еще в 1905 г., а также в его книге «Основы общей теории линейных интегральных уравнений» [61]. Общее решение этой задачи было получено несколько позднее Ф. Д. Гаховым [85].

Основная краевая задача аналитических функций (задача Римана — Гильберта)

Пусть L — простой замкнутый контур в плоскости z , ограничивающий некоторую область S^+ . Основная граничная задача теории аналитических функций, или так называемая задача Римана — Гильберта, ставится следующим образом. Требуется найти функцию $\Phi(z)$, голоморфную в S^+ и непрерывно продолжимую изнутри (слева) на L , за исключением отдельных точек L , при подходе к которым она имеет порядок роста меньше единицы, по контурному условию

$$\operatorname{Re}[\Phi^+(t) e^{-i\omega(t)}] = c(t), \quad t \in L, \quad (23)$$

где $c(t)$ и $e^{-i\omega(t)}$ — заданные на L кусочно-непрерывные вещественные функции, удовлетворяющие на каждой открытой дуге, заключенной между точками разрыва $c_1, c_2, \dots, c_r$, условию H и в каждой из этих точек условиям $H_0^\pm$.

Решением класса $h(c_1, c_2, \dots, c_q)$ задачи (23) будем называть, следуя Н. И. Мусхелишвили, такое решение, которое ограничено или почти ограничено (т. е. допускает логарифмический рост) при подходе к точкам разрыва $c_1, c_2, \dots, c_q$ ($q \leq r$).

Рассмотрим вначале случай, когда контур L совпадает с единичной окружностью. Записав контурное условие (23) в виде

$$\Phi^+(t) e^{-i\omega} + \bar{\Phi}^+(t) e^{i\omega} = 2c$$

и считая, что искомое решение класса $h(c_1, c_2, \dots, c_q)$ доопределено до симметрично сопряженной функции $\Phi(z)$ (т. е. принимающей сопряженные значения в точках, симметричных относительно единичной окружности), для определения этой функции имеем задачу линейного сопряжения функций при $\rho = 0$

$$\Phi^+(t) = e^{i\omega^*} \Phi^-(t) + 2ce^{i\omega}, \quad \omega^* = 2\omega. \quad (24)$$

Очевидно и обратное: всякое симметрично сопряженное решение класса $h(c_1, c_2, \dots, c_q)$ задачи (24), ограниченное на бесконечности ($\rho = 0$), будет решением того же класса задачи (23), если его рассматривать в единичном круге. Совокупность всех симметрично сопряженных решений класса $h(c_1, c_2, \dots, c_q)$ задачи (24), ограниченных на бесконечности, можно выразить равенством

$$\Omega(z) = \frac{1}{2} [\Phi(z) + \Phi_*(z)], \quad (25)$$

где $\Phi(z)$ — любое решение соответствующего класса задачи (24), ограниченное на бесконечности, а «звездочка» означает продолжение соответствующей функции по закону симметричной сопряженности. В самом деле, взяв от обеих частей равенства

$$e^{-i\omega} \Phi^+(t) + e^{i\omega} \Phi^-(t) = 2c \quad (24')$$

сопряженные величины, получим

$$e^{i\omega} \Phi_-^-(t) + e^{-i\omega} \Phi_+^+(t) = 2c. \quad (24'')$$

Складывая это равенство с предыдущим, находим

$$e^{-i\omega} \Omega^+(t) + e^{i\omega} \Omega^-(t) = 2c,$$

т. е. $\Omega(z)$ — решение класса $h(c_1, c_2, \dots, c_q)$ задачи (23).

Пусть κ — индекс задачи (24), определяющийся равенством $\kappa = \frac{1}{2\pi} [\omega^*]_L$ при условии, что скачки α_k функции $\frac{1}{2\pi} \omega^*$ в точках $c_1, c_2, \dots, c_r$ удовлетворяют неравенствам (10). В соответствии с (16')

$$\Gamma(z) = \frac{1}{4\pi i} \int_L \ln [t^{-\kappa} e^{i\omega^* - i\pi}] \frac{t+z}{t-z} \frac{dt}{t}, \quad t = e^{i\varphi},$$

или

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \ln [t^{-\kappa} e^{i\omega^* - i\pi}] \left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{2t} \right) dt = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_L [\omega^* - (\kappa\varphi + \pi)] \frac{t+z}{t-z} \frac{dt}{t}. \end{aligned} \quad (26)$$

Далее,

$$\Gamma_*(z) = \bar{\Gamma}\left(-\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{4\pi} \int_L [\omega^* - (\kappa\varphi + \pi)] \frac{\bar{t}z + 1}{\bar{t}z - 1} \cdot \frac{\bar{d}t}{t},$$

следовательно, $\Gamma_*(z) = \Gamma(z)$. В соответствии с равенством

$$X(z) = \begin{cases} e^{\Gamma(z)}, & z \in S^+, \\ z^{-\kappa} e^{\Gamma(z)}, & z \in S^-, \end{cases} \quad (17')$$

получаем

$$X_*(z) = z^\kappa X(z). \quad (27)$$

Общее решение класса $h(c_1, c_2, \dots, c_q)$ однородной задачи (24), имеющее на бесконечности порядок роста $\rho = 0$, имеет вид

$$\Phi(z) = X(z) [C_0 z^\kappa + C_1 z^{\kappa-1} + \dots + C_\kappa].$$

Для того чтобы это решение было решением класса $h(c_1, c_2, \dots, c_q)$ однородной задачи (23), в соответствии с (27), необходимо и достаточно, чтобы

$$z^\kappa \left[\bar{C}_0 \frac{1}{z^\kappa} + \bar{C}_1 \frac{1}{z^{\kappa-1}} + \dots + \bar{C}_\kappa \right] = C_0 z^\kappa + C_1 z^{\kappa-1} + \dots + C_\kappa.$$

Таким образом, общее решение класса $h(c_1, c_2, \dots, c_q)$ однородной задачи (23) записывается в виде

$$\Phi(z) = X(z) (C_0 z^\kappa + C_1 z^{\kappa-1} + \dots + C_\kappa), \quad (28)$$

где $X(z)$ — каноническая функция класса $h(c_1, c_2, \dots, c_q)$, определенная равенствами (17') и (26); $C_0, C_1, \dots, C_\kappa$ — произвольные постоянные, удовлетворяющие условиям $\bar{C}_m = C_{\kappa-m}$ ($0 \leq m \leq \leq \frac{\kappa}{2}$). При $\kappa \leq -1$ однородная задача (23) ненулевых решений не имеет.

Найдем теперь общее решение класса $h(c_1, c_2, \dots, c_q)$ неоднородной задачи (23).

1. Случай $\kappa = -1$. Решение соответствующего класса задачи (24), ограниченное на бесконечности, имеет вид

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{\pi i} \int_L \frac{ce^{i\omega} dt}{X^+(t)(t-z)}.$$

Но, в силу единственности этого решения, а также в силу того что на основании (24''), наряду с $\Phi(z)$, решением задачи (24) является также $\Phi_*(z)$, $\Phi_*(z) = \Phi(z)$. Следовательно, при $\kappa = -1$ решение класса $h(c_1, c_2, \dots, c_q)$ неоднородной задачи (23) существует, единственно и записывается в виде равенства

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{\pi i} \int_L \frac{ce^{i\omega} dt}{X^+(t)(t-z)}, \quad (29)$$

где $X(z)$ — каноническая функция класса $h(c_1, c_2, \dots, c_q)$, определенная равенствами (17') и (26).

2. Случай $\kappa \geq 0$. Частное решение класса $h(c_1, c_2, \dots, c_q)$ неоднородной задачи (23) имеет вид

$$\Omega(z) = \frac{1}{2} [\Phi(z) + \Phi_*(z)],$$

где $\Phi(z)$ — функция, определенная равенством (29). Имеем

$$\begin{aligned} \Phi_*(z) &= \bar{\Phi}\left(\frac{1}{z}\right) = \\ &= -\frac{\bar{X}\left(\frac{1}{z}\right)}{\pi i} \int_L \frac{ce^{-i\omega} \bar{t}}{\bar{X}^+(t) \left(\bar{t} - \frac{1}{z}\right)} = \frac{z^\kappa X(z)}{\pi i} \int_L \frac{ce^{-i\omega} z d\bar{t}}{\bar{X}^+(t) (t-z)t} = \\ &= \frac{z^\kappa X(z)}{\pi i} \left\{ -\int_L \frac{ce^{-i\omega} dt}{\bar{X}^+(t) (t-z)} + \int_L \frac{ce^{-i\omega} dt}{\bar{X}^+(t) t} \right\} = \\ &= \frac{z^\kappa X(z)}{\pi i} \left\{ -\int_L \frac{ce^{-i\omega} t^{-\kappa} dt}{X^-(t) (t-z)} + \int_L \frac{ce^{-i\omega} t^{-\kappa}}{X^-(t) t} dt \right\} = \\ &= \frac{z^\kappa X(z)}{\pi i} \left\{ \int_L \frac{ce^{i\omega} t^{-\kappa} dt}{X^+(t) (t-z)} - \int_L \frac{ce^{i\omega} t^{-\kappa} dt}{X^+(t) t} \right\}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Omega(z) &= \frac{X(z)}{2\pi i} \left\{ \int_L \frac{ce^{i\omega} dt}{X^+(t) (t-z)} + \right. \\ &\quad \left. + z^\kappa \int_L \frac{ce^{i\omega} t^{-\kappa} dt}{X^+(t) (t-z)} - z^\kappa \int_L \frac{ce^{i\omega} t^{-\kappa} dt}{X^+(t) t} \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом, общее решение класса $h(c_1, c_2, \dots, c_q)$ неоднородной задачи (23) при $\kappa \geq 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{X(z)}{2\pi i} \left\{ \int_L \frac{ce^{i\omega} dt}{X^+(t) (t-z)} + z^{\kappa+1} \int_L \frac{ce^{i\omega} t^{-\kappa-1} dt}{X^+(t) (t-z)} \right\} + \\ &\quad + X(z) (C_0 z^\kappa + C_1 z^{\kappa-1} + \dots + C_{\kappa-1} z + C_\kappa), \end{aligned} \quad (30)$$

где $X(z)$ — каноническая функция класса $h(c_1, c_2, \dots, c_q)$, определенная равенствами (17') и (26), $C_0, C_1, \dots, C_\kappa$ — постоянные, удовлетворяющие условиям $\bar{C}_m = C_{\kappa-m}$ ($0 \leq m \leq \frac{\kappa}{2}$).

3. Случай $\kappa \leq -2$. В соответствии с (22) для существования решения класса $h(c_1, c_2, \dots, c_q)$ неоднородной задачи (23) необходимо, чтобы выполнялись условия

$$\int_L \frac{t^k ce^{i\omega} dt}{X^+(t)} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, -(\kappa+2). \quad (31)$$

Если эти условия выполнены, то искомое решение существует и записывается в виде равенства (29).

Следовательно, решение основной краевой задачи теории аналитических функций (23) для единичного круга определяется равенством (29), если в соответствующем классе $\kappa = \frac{1}{2\pi} [\omega^*]_L = -1$, и равенством (30), если $\kappa \geq 0$. При $\kappa \leq -2$ решение существует только в том случае, когда выполняются $-(\kappa + 2) + 1$ условий (31), и это решение записывается в виде равенства (29).

Таким образом, полностью решается основная краевая задача теории аналитических функций (23) для единичного круга. Для случая любой односвязной области S^+ решение этой задачи, как легко видеть, сводится к решению ее для единичного круга при помощи конформных отображений.

Рассмотрим теперь некоторые частные случаи решения основной краевой задачи.

1. Случай, когда $e^{-i\omega(t)}$ — кусочно-постоянная функция. Решение для единичного круга.

Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ — точки разрыва функции $e^{-i\omega(t)}$, α_k — скачок функции $\frac{1}{2\pi} \omega^*(t)$ при переходе точки a_k ,

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi} (\omega_k^* - \omega_{k-1}^*), \quad \omega_{n+1}^* = \omega_1^*,$$

где ω_k^* — постоянное значение $\omega^*(t)$ на дуге (a_k, a_{k+1}) . Пусть $c_1, c_2, \dots, c_q$ — те из точек $a_1, a_2, \dots, a_n$, которые определяют данный класс решений $h(c_1, c_2, \dots, c_q)$. Это значит, что в этих точках величины α_k удовлетворяют условиям $-1 < \alpha_k \leq 0$, а во всех остальных точках a_k — условиям $0 < \alpha_k < 1$. Индекс κ класса $h(c_1, c_2, \dots, c_q)$ имеет вид

$$\kappa = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n.$$

Каноническую функцию $X(z)$ класса $h(c_1, c_2, \dots, c_q)$, в соответствии с (26) и (17'), при $|z| < 1$ можем записать в виде

$$X(z) = e^{\Gamma(z)}, \quad \Gamma(z) = -\frac{\kappa}{2\pi i} \int_{a'}^{a'} \frac{\ln t dt}{t-z} + \int_{a'}^{a'} \frac{\frac{\omega^*}{2\pi} - \frac{1}{2}}{t-z} dt + \ln B, \quad (32)$$

где a' — точка, лежащая на открытой дуге (a_n, a_1) , интегрирование от a' до a' ведется вдоль единичной окружности, B — постоянная,

$$\ln B = -\frac{1}{2\pi i} \int_{a'}^{a'} \ln [t^{-\kappa} e^{i\omega^* - i\pi}] \frac{dt}{t}.$$

Полагая

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a'}^{a'} \frac{\ln t}{t-z} dt,$$

получаем¹

$$\begin{aligned}\psi'(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{a'}^{a'} \frac{\ln t dt}{(t-z)^2} = -\frac{1}{2\pi i} \frac{\ln t}{t-z} \Big|_{a'}^{a'} + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{a'}^{a'} \frac{dt}{(t-z)t} = \frac{1}{z-a'}, \\ \psi(z) &= \ln(z-a').\end{aligned}$$

Учитывая это, из (32) находим

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &= -\kappa \ln(z-a') + \ln B + \\ &+ \ln \left(\left(\frac{z-a_1}{z-a'} \right)^{\frac{\omega_n^*}{2\pi} - \frac{1}{2}} \left(\frac{z-a_2}{z-a_1} \right)^{\frac{\omega_n^*}{2\pi} - \frac{1}{2}} + \alpha_1 \right. \\ &\times \dots \left. \left(\frac{z-a_n}{z-a_{n-1}} \right)^{\frac{\omega_n^*}{2\pi} - \frac{1}{2}} + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \left(\frac{z-a'}{z-a_n} \right)^{\frac{\omega_n^*}{2\pi} - \frac{1}{2}} + \sum_{k=1}^n \alpha_k \right), \quad (33)\end{aligned}$$

и, следовательно, каноническая функция $X(z)$ класса $h(c_1, c_2, \dots, c_q)$ определяется равенством

$$X(z) = B(z-a_1)^{-\alpha_1} (z-a_2)^{-\alpha_2} \dots (z-a_n)^{-\alpha_n}, \quad (34)$$

где $B = \sqrt{(-1)^\kappa a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n}}$.

Решение класса $h(c_1, c_2, \dots, c_q)$ при $\kappa = -1$ существует, единственно и определяется равенством

$$\Phi(z) = \prod_1^n (z-a_k)^{-\alpha_k} \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{ce^{i\omega} dt}{\prod_1^n (t-a_k)^{-\alpha_k} (t-z)}. \quad (35)$$

При $\kappa \geq 0$ решение класса $h(c_1, c_2, \dots, c_q)$ существует и определяется равенством

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= \prod_1^n (z-a_k)^{-\alpha_k} \frac{1}{\pi i} \left\{ \int_L \frac{ce^{i\omega} dt}{\prod_1^n (t-a_k)^{-\alpha_k} (t-z)} + \right. \\ &+ z^{\kappa+1} \int_L \frac{ce^{i\omega} t^{-\kappa-1}}{\prod_1^n (t-a_k)^{-\alpha_k}} \frac{dt}{t-z} \Big\} + \\ &+ \prod_1^n (z-a_k)^{-\alpha_k} \sqrt{(-1)^\kappa \prod_1^n a_k^{\alpha_k} (C_0 z^\kappa + C_1 z^{\kappa-1} + \dots + C_\kappa)}, \quad (36)\end{aligned}$$

¹ Постоянная слагаемая здесь кратна $2\pi i$, в чем легко убедиться, положив $z = 0$; ее можно считать включенной в знак логарифма.

где $C_0, C_1, \dots, C_\kappa$ — произвольные постоянные, удовлетворяющие условиям $\bar{C}_m = C_{\kappa-m}$ ($0 \leq m \leq \frac{\kappa}{2}$).

При $\kappa \leq -2$ решение класса $h(c_1, c_2, \dots, c_q)$ существует только в случае, когда выполняются условия

$$\int_L \frac{t^k c e^{i\omega} dt}{\prod_1^n (t - a_k)^{-\alpha_k}} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, -(\kappa + 2). \quad (37)$$

При выполнении этих условий решение записывается в виде равенства (35).

2. Случай, когда $e^{-i\omega(t)}$ — кусочно-постоянная функция. Решение задачи для верхней полуплоскости.

В этом случае контурные условия (23) имеют вид

$$\operatorname{Re} [\Phi^+(t) e^{-i\omega(t)}] = c(t), \quad -\infty < t < \infty, \quad (23')$$

где $e^{-i\omega(t)}$ — кусочно-постоянная функция, а $c(t)$ — функция, удовлетворяющая во всяком конечном интервале тем же условиям, что и в (23). Так как общее решение задачи в исчерпывающей форме дано для круга, то в данном случае ограничимся указанием эффективных формул для наиболее важных и употребительных частных случаев. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ — точки разрыва функций $e^{-i\omega(t)}$ и $c(t)$ (лежащие в конечной части плоскости), $c_1, c_2, \dots, c_q$ — те из них, в которых для скачка α_k ($-1 < \alpha_k < 1$) функции $\frac{1}{\pi} \omega(t)$ выполняются неравенства $-1 < \alpha_k \leq 0$. Введем число λ и функцию $Y(z)$, соответствующие классу $h(c_1, c_2, \dots, c_q)$,

$$\lambda = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n,$$

$$Y(z) = \prod (a_k - z)^{-\alpha_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Через λ_0 обозначим целую часть числа λ , т. е. ближайшее к λ целое положительное или отрицательное число (или нуль) такое, что $\lambda_0 \leq \lambda$.

Найдем решения задачи (23), принадлежащие классу $h(c_1, c_2, \dots, c_q)$, т. е. ограниченные или почти ограниченные при подходе к точкам $c_1, c_2, \dots, c_q$ и к бесконечности и непрерывные или имеющие порядок роста меньше единицы в остальных точках разрыва и точках непрерывности функций $e^{-i\omega(t)}$ и $c(t)$.

А. Пусть $\lambda = 0$, а $c(t)$ при подходе к $\pm \infty$ удовлетворяет условию

$$|c(t) - A| < M |t|^{-\alpha}, \quad (38)$$

где A, M, α ($\alpha > 0$) — постоянные². Тогда, записав контурные условия (23') в виде

$$\operatorname{Re} \left\{ \left[\frac{\Phi(t)}{Y(t)} \right]^+ e^{-i\omega_0} \right\} = \frac{c(t)}{|Y^+(t)|}, \quad -\infty < t < \infty, \quad (39)$$

² Это условие иногда называют условием $H(\alpha)$ (условием Гельдера с показателем α) в бесконечно удаленной точке [84].

где ω_0 — вещественная постоянная, получаем

$$\frac{\Phi(z)}{Y(z)} e^{-i\omega_0} = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c(t)}{|Y^+(t)|} \frac{dt}{t-z} + iC_0.$$

Здесь C_0 — произвольная вещественная постоянная. Таким образом, при высказанных предположениях ($\lambda = 0$, $c(t)$ на бесконечности удовлетворяет условию (38)) общее решение класса $h(c_1, c_2, \dots, c_q)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi(z) = & \Pi(a_k - z)^{-\alpha_k} \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c(t) e^{i\omega(t)}}{\Pi(a_k - t)^{-\alpha_k}} \frac{dt}{t-z} + \\ & + iC_0 e^{i\omega_0} \Pi(a_k - z)^{-\alpha_k}. \end{aligned} \quad (40)$$

В частности, если $\omega(t) \equiv 0$, то

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c(t) dt}{t-z} + iC_0. \quad (40')$$

Полученное равенство является формулой Шварца для верхней полуплоскости.

Б. Пусть $\lambda > 0$, а $c(t)$ при подходе к $\pm \infty$ удовлетворяет условию

$$|c(t)| < M |t|^{-\lambda-\alpha}, \quad (41)$$

где M и α ($\alpha > 0$) — постоянные. Записав контурные условия (23') в виде (39), получаем

$$\frac{\Phi(z)}{Y(z)} e^{-i\omega_0} = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c(t)}{|Y^+(t)|} \frac{dt}{t-z} + i(C_0 + C_1 z + \dots + C_{\lambda_0} z^{\lambda_0}),$$

где $C_1, C_2, \dots, C_{\lambda_0}$ — вещественные постоянные. Общее решение класса $h(c_1, c_2, \dots, c_q)$ запишется в виде

$$\begin{aligned} \Phi(z) = & \Pi(a_k - z)^{-\alpha_k} \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c(t) e^{i\omega(t)}}{\Pi(a_k - t)^{-\alpha_k}} \frac{dt}{t-z} + \\ & + i e^{i\omega_0} \Pi(a_k - z)^{-\alpha_k} (C_0 + C_1 z + \dots + C_{\lambda_0} z^{\lambda_0}). \end{aligned} \quad (42)$$

В. Пусть $\lambda < 0$ и $c(t) \equiv 0$ при $|t| \geq N = \text{const} > 0$. Тогда для существования решения класса $h(c_1, c_2, \dots, c_q)$ необходимо, чтобы выполнялись условия

$$\frac{1}{\pi i} \int_{-N}^N \frac{c(t) e^{-i\omega(t)}}{\Pi(a_k - t)^{-\alpha_k}} t^m dt = 0, \quad m = 0, 1, \dots, -\lambda_0 - 1. \quad (43)$$

При выполнении этих условий искомое решение класса h ($c_1, c_2, \dots, c_q$) записывается в виде

$$\Phi(z) = \prod (a_k - z)^{-\alpha_k} \frac{1}{\pi i} \int_{-N}^N \frac{c(t) e^{i\omega(t)}}{\prod (a_k - t)^{-\alpha_k}} \frac{dt}{t - z}. \quad (43')$$

Г. Пусть L' — совокупность отрезков вещественной оси $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n]$ ($a_k < b_k$), L'' — остальная часть вещественной оси. Требуется найти функцию $\Phi(z)$, голоморфную в верхней полуплоскости, ограниченную на бесконечности и в точках a_k , а в точках b_k имеющую порядок роста меньше единицы, по контурному условию

$$\operatorname{Re} \Phi(t) = c(t), \quad t \in L', \quad \operatorname{Im} \Phi(t) = c(t), \quad t \in L'',$$

где $c(t)$ на отрезках между точками a_k и b_k удовлетворяет условию H , а при подходе к бесконечности — условию (38). Записав это контурное условие в виде

$$\operatorname{Re} [\Phi^+(t) e^{-i\omega(t)}] = c(t), \quad -\infty < t < \infty,$$

приходим к задаче об отыскании решения класса h ($a_1, a_2, \dots, a_n$).

Очевидно, можем положить $\omega(t) = \frac{\pi}{2}$ при $t < a_1$, а скачки $\omega(t)$

в точках a_k и b_k равными соответственно $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$, т. е. $\omega = \frac{\pi}{2}$ на L'' и $\omega = 0$ на L' . При этом число λ , соответствующее классу h ($a_1, a_2, \dots, a_n$), равно нулю, а

$$Y(z) = \prod_1^n (a_k - z)^{\frac{1}{2}} (b_k - z)^{-\frac{1}{2}}.$$

Решение класса h ($a_1, a_2, \dots, a_n$), в силу того что при $t < a_1$ функция $Y(t)$ вещественна, а $\omega = \frac{\pi}{2}$, в соответствии с (40) запишется в виде

$$\begin{aligned} \Phi(z) = & \prod_1^n \sqrt{\frac{a_k - z}{b_k - z}} \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_1^n \sqrt{\frac{b_k - t}{a_k - t}} \frac{c(t) e^{i\omega(t)} dt}{t - z} + \\ & + C_0 \prod_1^n \sqrt{\frac{a_k - z}{b_k - z}}, \end{aligned} \quad (44)$$

где C_0 — произвольная вещественная постоянная. Если требование ограниченности решений при подходе к точкам a_k заменить условием, что порядок роста при подходе к этим точкам меньше единицы, то общее решение задачи (ограниченное на бесконечности), очевидно,

запишется в виде

$$\Phi(z) = \prod_1^n \sqrt{\frac{a_k - z}{b_k - z}} \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_1^n \sqrt{\frac{b_k - t}{a_k - t}} \frac{c(t) e^{i\omega(t)} dt}{t - z} + \\ + \frac{C_0 + C_1 z + \dots + C_n z^n}{\prod_1^n \sqrt{(a_k - z)(b_k - z)}}, \quad (44')$$

где $C_0, C_1, \dots, C_n$ — вещественные постоянные, $\omega(t) = \frac{\pi}{2}$ на L'' и $\omega(t) = 0$ на L' .

Формулы (44) и (44') встречаются под названием формул Келдыша — Седова [84, 93] (см. также [94, стр. 253—273]).

§ 2. О НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ p-АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С ХАРАКТЕРИСТИКОЙ $p = x^k$

Среди всевозможных классов p -аналитических функций значительный интерес представляют функции $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, p -аналитические с характеристикой $p = x^k$ ($k = \text{const} > 0$) в той или иной области, лежащей в правой полуплоскости $z = x + iy$. Такие функции мы иногда будем называть для краткости x^k -аналитическими, указывая тем самым, что они представляют собой p -аналитические функции, характеристика которых $p = x^k$.

В соответствии с нашей работой [14] установим так называемое основное интегральное представление x^k -аналитических функций.

Пусть G — область в правой полуплоскости $z = x + iy$, G^* — область, симметричная ей относительно мнимой оси, $k = \text{const} > 0$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Если G в составе своей границы содержит отрезок L мнимой оси и $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ — функция, аналитическая в G и такая, что $v|_L = 0$, то функция

$$\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y) = \\ = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} f(\xi) \left[\left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right)^{1-k} + \xi - \frac{z - \bar{z}}{2} \right] (z - \xi)^{\frac{k}{2}-1} (\bar{z} + \xi)^{\frac{k}{2}-1} d\xi, \quad (45)$$

где Γ — контур в области $G + G^* + L$, соединяющий точку $-\bar{z} = -x + iy$ с точкой $z = x + iy$ (пересекая L), является x^k -аналитической в области G , а на L имеет непрерывные производные по x и y и $\tilde{v}|_L = 0$. Интегральным представлением (45) устанавливается взаимно однозначное соответствие между x^k -аналитическими функциями и аналитическими функциями в области G , мнимые части которых на L равны нулю.

Для доказательства теоремы запишем условия x^k -аналитичности в виде

$$\frac{\hat{d}\tilde{u}}{dz} = \frac{2^k}{(z+\bar{z})^k} \frac{\hat{d}\tilde{v}}{dz} \quad (46)$$

и отметим равенство

$$\frac{\hat{d}}{dz} \int_{\Gamma} F(\zeta, z, \bar{z}) d\zeta = F(\zeta, z, \bar{z}) \Big|_{\zeta=z} + \int_{\Gamma} \frac{\hat{d}F(\zeta, z, \bar{z})}{dz} d\zeta, \quad (47)$$

где

$$F(\zeta, z, \bar{z}) = \sum_{i,j,k=1}^n \varphi_i(\zeta) \psi_j(z) \bar{\chi}_k(\bar{z}), \quad (47')$$

$\varphi_i(\zeta)$ — функции от ζ , аналитические в области $G + G^* + L$, $\psi_j(z)$ и $\chi_k(z)$ — функции от z , аналитические в этой же области $G + G^* + L$. Равенство (45) эквивалентно равенствам

$$\tilde{u}(x, y) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} f(\zeta) \left(\frac{z+\bar{z}}{2} \right)^{1-k} (z-\zeta)^{\frac{k}{2}-1} (\bar{z}+\zeta)^{\frac{k}{2}-1} d\zeta, \quad (48)$$

$$\tilde{v}(x, y) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} f(\zeta) \left(\zeta - \frac{z-\bar{z}}{2} \right) (z-\zeta)^{\frac{k}{2}-1} (\bar{z}+\zeta)^{\frac{k}{2}-1} d\zeta. \quad (49)$$

В этом легко убедиться, если считать контур Γ симметричным относительно мнимой оси и учесть, что функция $(z-\zeta)^{\frac{k}{2}-1} (\bar{z}+\zeta)^{\frac{k}{2}-1}$ в точках ζ и $-\bar{\zeta}$ принимает сопряженные значения.

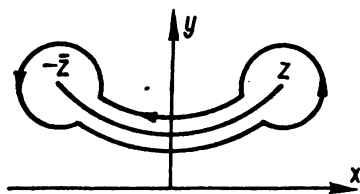


Рис. 8.

1. Пусть k равно целому четному числу. Вычисляя в этом случае операторные производные по z от правых частей равенств (48), (49) по формуле (47) и подставляя результаты в (46), получаем тождество.

2. Пусть k равно целому нечетному числу. Обозначим через C замкнутый контур, обходящий точки z и $-\bar{z}$ в положительном направлении (рис. 8) и не выходящий из области аналитичности функции $f(z)$. Тогда можем написать

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, y) &= \\ &= \frac{1}{1 - e^{i2\pi\left(\frac{k}{2}-1\right)}} \cdot \frac{1}{2} \int_C f(\zeta) \left(\frac{z+\bar{z}}{2} \right)^{1-k} (z-\zeta)^{\frac{k}{2}-1} (\bar{z}+\zeta)^{\frac{k}{2}-1} d\zeta, \end{aligned} \quad (48')$$

$$\begin{aligned} & \tilde{w}(x, y) = \\ &= \frac{1}{1 - e^{i2\pi\left(\frac{k}{2} - 1\right)}} \cdot \frac{1}{2} \int_C f(\zeta) \left(\zeta - \frac{z - \bar{z}}{2} \right) (z - \zeta)^{\frac{k}{2} - 1} (\bar{z} + \zeta)^{\frac{k}{2} - 1} d\zeta. \end{aligned} \quad (49')$$

Вычисляя операторные производные по z от последних интегралов дифференцированием их под знаком интегралов (так как z и $-\bar{z}$ не лежат на C), убеждаемся, что равенство (47) выполняется.

3. Пусть k не равно целому числу. Обозначим через C' контур, не выходящий из области аналитичности функции $f(z)$ и описывающий точки z и $-\bar{z}$ сначала в положительном направлении, а затем в той же последовательности в отрицательном направлении

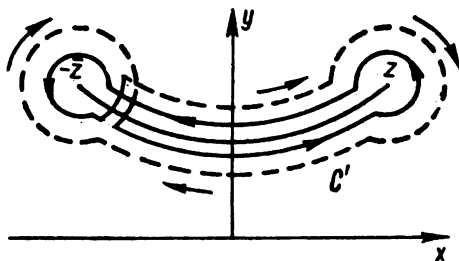


Рис. 9.

(рис. 9). Тогда, учитывая, что точки z и $-\bar{z}$ являются точками ветвления для функции от ζ , равной $(z - \zeta)^{\frac{k}{2} - 1} (\bar{z} + \zeta)^{\frac{k}{2} - 1}$, можем написать

$$\begin{aligned} & \tilde{u}(x, y) = \\ &= \frac{1}{\left[1 - e^{i2\pi\left(\frac{k}{2} - 1\right)}\right]^2} \cdot \frac{1}{2} \int_{C'} f(\zeta) \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right)^{1-k} (z - \zeta)^{\frac{k}{2} - 1} (\bar{z} + \zeta)^{\frac{k}{2} - 1} d\zeta. \end{aligned} \quad (48'')$$

$$\begin{aligned} & \tilde{v}(x, y) = \\ &= \frac{1}{\left[1 - e^{i2\pi\left(\frac{k}{2} - 1\right)}\right]^2} \cdot \frac{1}{2} \int_{C'} f(\zeta) \left(\zeta - \frac{z - \bar{z}}{2} \right) (z - \zeta)^{\frac{k}{2} - 1} (\bar{z} + \zeta)^{\frac{k}{2} - 1} d\zeta. \end{aligned} \quad (49'')$$

Контур C' не содержит точек z и $-\bar{z}$. Поэтому операторные производные по z от правых частей последних равенств можно вычислить дифференцированием их под знаком интегралов. Подставляя результаты этих вычислений в (46), получаем тождество.

Теперь покажем, что на L функция $f(z)$ имеет непрерывные производные по x и y и $\tilde{v}|_L = 0$. Считая, что Γ — прямолинейный контур, можем написать

$$\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y) = \int_0^x [u(\xi, y) x^{1-k} + i\xi v(\xi, y)] (x^2 - \xi^2)^{\frac{k}{2} - 1} d\xi. \quad (45')$$

Полагая $\xi = x\beta$, находим

$$\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y) = \int_0^1 [u(x\beta, y) + ix^k\beta v(x\beta, y)] (1 - \beta^2)^{\frac{k}{2}-1} d\beta.$$

Отсюда видно, что на L производные $\frac{\partial \tilde{f}(z)}{\partial x}$ и $\frac{\partial \tilde{f}(z)}{\partial y}$ непрерывны и $\tilde{v}|_L = 0$.

Если равенства (45') рассматривать как интегральные уравнения относительно $u(x, y)$ и $v(x, y)$, то эти уравнения, как показано в § 4, однозначно разрешимы. Поэтому, если бы x^k -аналитической функции $\tilde{f}(z)$ соответствовали две аналитические функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ с мнимыми частями, равными нулю на L , то они должны были бы совпадать друг с другом на прямолинейном контуре Γ и, следовательно, в силу теоремы единственности, — во всей области G . Очевидно и обратное: в силу свойства единственности p -аналитических функций одной аналитической функции в G с мнимой частью на L , равной нулю, не могут соответствовать две различные x^k -аналитические функции в области G . Теорема доказана.

Замечание. При k , равном целому четному числу ($k = 2m$), как следствие интегрального преобразования (45) выполняются равенства

$$f(z) = \frac{2}{(m-1)!} \cdot \frac{1}{(z+\bar{z})^{m-1}} \cdot \frac{\hat{d}^m(\tilde{u}(x, y) x^{k-1})}{dz^m}, \quad (50)$$

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{4}{(m-1)!} \cdot \frac{1}{(z+\bar{z})^m} \cdot \frac{\hat{d}^{m+1}(\tilde{v}(x, y))}{dz^{m+1}}, \quad (50')$$

получающиеся при помощи вычисления их правых частей с учетом равенств (48), (49) и формулы (47). Например, при $m = 1$ из (48), (49) получаем

$$\frac{\hat{d}(\tilde{u}(x, y) x)}{dz} = \frac{1}{2} f(z),$$

$$\frac{\hat{d}(\tilde{v}(x, y))}{dz} = \frac{1}{2} f(z) \frac{z+\bar{z}}{2} - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} f(\zeta) \frac{1}{2} d\zeta,$$

$$\frac{\hat{d}^2(\tilde{v}(x, y))}{dz^2} = \frac{z+\bar{z}}{4} \frac{df(z)}{dz}.$$

Теорема 2. Пусть выполнено одно из следующих условий: а) функция $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ аналитическая в области G , Γ — контур в области G , соединяющий фиксированную точку a , лежащую в области G или на ее границе, с точкой $z = x + iy$;

б) функция $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ аналитическая в области G^* , Γ — контур, соединяющий точку $-\bar{z} = -x + iy$ с фиксированной точкой $-\bar{a}$, лежащей в области G^* или на ее границе.

Тогда функция

$$\begin{aligned} \tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y) = \operatorname{Re} \int_{\Gamma} f(\zeta) \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right)^{1-k} (z - \zeta)^{\frac{k}{2}-1} \times \\ \times (\bar{z} + \zeta)^{\frac{k}{2}-1} d\zeta + i \operatorname{Im} \int_{\Gamma} f(\zeta) \left(\zeta - \frac{z - \bar{z}}{2} \right) (z - \zeta)^{\frac{k}{2}-1} (\bar{z} + \zeta)^{\frac{k}{2}-1} d\zeta \end{aligned} \quad (51)$$

является x^k -аналитической в области G , если k равно целому четному числу, и x^k -аналитической в области G с выброшенной точкой $z = a$, если k не равно целому четному числу³. Двум различным аналитическим функциям в области G (или G^*) интегральное преобразование (51) ставит в соответствие две различные x^k -аналитические функции в G , если область G (или G^*) содержит параллельный вещественной оси прямолинейный отрезок, выходящий из точки a (или $-\bar{a}$).

В самом деле, в случае «а» равенство (51) эквивалентно двум равенствам

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, y) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma^*} f^*(\zeta) \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right)^{1-k} (z - \zeta)^{\frac{k}{2}-1} (\bar{z} + \zeta)^{\frac{k}{2}-1} d\zeta + \\ + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} f(\zeta) \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right)^{1-k} (z - \zeta)^{\frac{k}{2}-1} (\bar{z} + \zeta)^{\frac{k}{2}-1} d\zeta, \end{aligned} \quad (51')$$

$$\begin{aligned} \tilde{v}(x, y) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma^*} f^*(\zeta) \left(\zeta - \frac{z - \bar{z}}{2} \right) (z - \zeta)^{\frac{k}{2}-1} (\bar{z} + \zeta)^{\frac{k}{2}-1} d\zeta + \\ + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} f(\zeta) \left(\zeta - \frac{z - \bar{z}}{2} \right) (z - \zeta)^{\frac{k}{2}-1} (\bar{z} + \zeta)^{\frac{k}{2}-1} d\zeta, \end{aligned} \quad (51'')$$

где Γ^* — контур, симметричный с Γ относительно мнимой оси, соединяющий точку $-\bar{z} = -x + iy$ с точкой $-\bar{a}$, $f^*(z)$ — функция, аналитическая в области G^* , определенная равенством $f^*(z) = \bar{f}(-\bar{z})$ при $z \in G^*$. В остальном доказательство теоремы такое же, как и в предыдущем случае, только при k , не равном целому четному числу, интегралы правых частей равенств (51') и (51'') по Γ и по Γ^* выражаются через интегралы по контуру, идущему из точки a , обходящему в положительном направлении точку z и возвращающемуся в точку a , и соответственно через интегралы по контуру, идущему из точки $-\bar{a}$, обходящему в положительном

³ Предполагается, что если точка a (или $-\bar{a}$) является граничной, то $|f(\zeta)| = O(r^{-\alpha})$, где $\alpha = \operatorname{const} < 1$, r — расстояние точки ζ от точки a (или $-\bar{a}$).

направлении точку $-\bar{z}$ и возвращаемся в точку $-\bar{a}$. При k , равном целому четному числу, если точка a внутри G , то она является точкой однозначности функции $\tilde{f}(z)$ и по теореме об устранимой особой точке p -аналитических функций (гл. 1, § 9) — точкой x^k -аналитичности.

Если Γ — прямолинейный отрезок, то интегральное преобразование (51) однозначно обратимо относительно $u(x, \beta)$ и $v(x, \beta)$ ($\beta = \operatorname{Im} a$), в чем убеждаемся, продифференцировав (51) по x^2 и решив уравнение Абеля с пределами интегрирования от α до x ($\alpha = \operatorname{Re} a$). Отсюда в силу свойства единственности p -аналитических функций вытекает справедливость последнего из утверждений теоремы. В случае «б» теорема доказывается аналогично.

Следствие 1. Если область G в составе своей границы содержит отрезок L мнимой оси, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ — функция, аналитическая в области $G + G^* + L$, Γ — контур в $G + G^* + L$, соединяющий точки $-\bar{z}$ и z , то функция $\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y)$, определенная равенством (51), является x^k -аналитической в области G .

Следствие 2. Если область G в составе своей границы имеет бесконечно удаленную точку и $a = \infty$, а функция $f(z)$ удовлетворяет дополнительному условию $|f(z)| = O(|z|^{-\alpha})$ ($\alpha = \operatorname{const} > k$) при подходе к бесконечности вдоль контура Γ , то функция $\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y)$, определенная равенством (51), является x^k -аналитической в области G .

Теорема 3. Пусть выполнено одно из следующих условий:

а) функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ аналитическая в области G , Γ — контур в области G , начальная точка a и конечная точка b которого фиксированы, отличны друг от друга и по крайней мере одна из них не лежит на мнимой оси;

б) функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ аналитическая в области G^* , Γ^* — контур в области G^* , начальная точка $-\bar{b}$ и конечная точка $-\bar{a}$ которого фиксированы, отличны друг от друга и по крайней мере одна из них не лежит на мнимой оси.

Тогда функция $\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y)$, определенная равенством (51), является x^k -аналитической в правой полуплоскости $z = x + iy$, если k равно целому четному числу, а при k , не равном целому четному числу, — x^k -аналитической в правой полуплоскости $z = x + iy$ с выброшенными точками a и b .

Для доказательства теоремы в случае «а» достаточно равенство (51) записать в виде равенств (51') и (51''), вычислить операторные производные по z от $\tilde{u}(x, y)$ и $i\tilde{v}(x, y)$ дифференцированием их под знаком интегралов и воспользоваться теоремой об устранимой особой точке p -аналитических функций, а также возможностью варьирования контура Γ при фиксированных его концевых точках. В случае «б» теорема доказывается аналогично.

Следствие 1. Если область G в составе своей границы содержит бесконечно удаленную точку и $b = \infty$, $\operatorname{Re} a > 0$, а $f(z)$ удовлетворяет дополнительному условию $|f(z)| = O(|z|^{-\alpha})$ ($\alpha = \text{const} > k$) при подходе к бесконечности вдоль контура Γ , то функция $\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y)$, определенная равенством (51), является x^k -аналитической в правой полуплоскости $z = x + iy$, если k равно целому четному числу, а при k , не равном целому четному числу, — x^k -аналитической в правой полуплоскости $z = x + iy$ с выкопанной точкой $z = a$.

Теорема 4. Пусть $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ — функция, аналитическая в области G , Γ — простой контур в G , начальная точка a и конечная точка b которого фиксированы, отличны друг от друга и лежат на мнимой оси, g — область (или совокупность областей) в конечной части правой полуплоскости $z = x + iy$, ограниченная контуром Γ и мнимой осью. Тогда правая часть равенства (51) представляет собой x^k -аналитическую функцию в g и x^k -аналитическую функцию в правой полуплоскости $z = x + iy$ вне g .

Теорема 5. Пусть $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ — функция, аналитическая в области G , Γ — простой контур в области G , начальная точка a и конечная точка b которого совпадают. Тогда правая часть равенства (51) представляет собой функцию, x^k -аналитическую внутри контура Γ и x^k -аналитическую вне контура Γ в правой полуплоскости $z = x + iy$, причем последняя тождественно равна нулю, если область G односвязна.

Доказательство теорем 4 и 5 аналогично доказательству предыдущих теорем.

Будем говорить, что функция $f(\zeta) = u(\xi, \eta) + iv(\xi, \eta)$, определенная в точках того или иного контура как функция длины дуги его, удовлетворяет условию P_α , если она на этом контуре непрерывна, за исключением отдельных точек ζ_j ($j = 1, 2, \dots, n$), при подходе к которым $|f(\zeta)| = O(|\zeta - \zeta_j|^{-\alpha})$, $0 \leq \alpha = \text{const} < 1$.

Теорема 6. Пусть Γ — контур в плоскости $z = x + iy$, симметричный относительно мнимой оси, $f(\zeta) = u(\xi, \eta) + iv(\xi, \eta)$, $\omega(\zeta) = \alpha(\xi, \eta) + i\beta(\xi, \eta)$ — функции, определенные на Γ как функции длины дуги Γ и удовлетворяющие условию P_α соответственно при $0 \leq \alpha < 1$ и $\alpha = 0$, $f(-\bar{\zeta}) = \bar{f}(\zeta)$, $\omega(-\bar{\zeta}) = -\bar{\omega}(\zeta)$, S — множество точек $z = \omega(\zeta)$ при $\zeta \in \Gamma$. Тогда интеграл

$$\begin{aligned} \tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y) = & \frac{1}{2} \int_{\Gamma} f(\zeta) \left[\left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right)^{1-k} + \right. \\ & \left. + \omega(\zeta) - \frac{z - \bar{z}}{2} \right] (z - \omega(\zeta))^{\frac{k}{2}-1} (\bar{z} + \omega(\zeta))^{\frac{k}{2}-1} d\zeta \end{aligned} \quad (52)$$

представляет собой x^k -аналитическую функцию в каждой из областей, на которые разбивается правая полуплоскость $z = x + iy$ множеством точек S и мнимой осью.

Для доказательства теоремы достаточно записать равенство (52) в виде равенств

$$\tilde{u}(x, y) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} f(\zeta) \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right)^{1-k} (z - \omega(\zeta))^{\frac{k}{2}-1} (\bar{z} + \omega(\zeta))^{\frac{k}{2}-1} d\zeta, \quad (52')$$

$$\tilde{v}(x, y) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} f(\zeta) \left[\omega(\zeta) - \frac{z - \bar{z}}{2} \right] (z - \omega(\zeta))^{\frac{k}{2}-1} (\bar{z} + \omega(\zeta))^{\frac{k}{2}-1} d\zeta \quad (52'')$$

и вычислить операторные производные по z от $\tilde{u}(x, y)$ и $\tilde{v}(x, y)$, продифференцировав правые части равенств (52'), (52'') под знаком интеграла.

Теорема 7. Пусть Γ — контур в правой или левой полуплоскости $z = x + iy$, $f(\zeta) = u(\xi, \eta) + iv(\xi, \eta)$ и $\omega(\zeta) = \alpha(\xi, \eta) + i\beta(\xi, \eta)$ — функции, определенные на Γ как функции длины дуги Γ и удовлетворяющие условию R_α соответственно при $0 \leq \alpha < 1$ и $\alpha = 0$, C — множество точек $z = \omega(\zeta)$ при $\zeta \in \Gamma$, C^* — множество точек, симметричное C относительно мнимой оси. Тогда интеграл

$$\begin{aligned} \tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y) = \operatorname{Re} \int_{\Gamma} f(\zeta) \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right)^{1-k} (z - \omega(\zeta))^{\frac{k}{2}-1} \times \\ \times (\bar{z} + \omega(\zeta))^{\frac{k}{2}-1} d\zeta + i \operatorname{Im} \int_{\Gamma} f(\zeta) \left[\omega(\zeta) - \frac{z - \bar{z}}{2} \right] \times \\ \times (z - \omega(\zeta))^{\frac{k}{2}-1} (\bar{z} + \omega(\zeta))^{\frac{k}{2}-1} d\zeta \end{aligned} \quad (53)$$

представляет собой x^k -аналитическую функцию в каждой из областей, на которые разбивается правая полуплоскость $z = x + iy$ множеством точек $C + C^*$ и мнимой осью.

Доказательство этой теоремы сводится к доказательству теоремы 6, если на контуре Γ^* , симметричном Γ относительно мнимой оси, доопределить функции $f(\zeta)$ и $\omega(\zeta)$ так, чтобы $f(-\bar{\zeta}) = \overline{f(\zeta)}$, $\omega(-\bar{\zeta}) = \overline{\omega(\zeta)}$ при $\zeta \in \Gamma$.

Следствие 1. Если функции $f(\zeta) = u(\xi, \eta) + iv(\xi, \eta)$ и $\omega(\zeta) = \alpha(\xi, \eta) + i\beta(\xi, \eta)$ аналитические в области, содержащей контур Γ , и в концевых точках a и b этого контура $\frac{d\omega(\zeta)}{d\zeta} \neq 0$, то

функция $\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y)$, определенная равенством (53), является x^k -аналитической в правой полуплоскости $z = x + iy$ при k , равном целому четному числу, а при k , не равном целому четному числу, — x^k -аналитической в правой полуплоскости $z = x + iy$ с выброшенными точками $\omega(a)$ (или $-\bar{\omega}(a)$), если $\operatorname{Re} \omega(a) < 0$, и $\omega(b)$ (или $-\bar{\omega}(b)$), если $\operatorname{Re} \omega(b) < 0$.

**§ 3. ОСНОВНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ
p-АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С ХАРАКТЕРИСТИКОЙ $p = x^k$
И ФОРМУЛЫ ЕГО ОБРАЩЕНИЯ**

**Основное интегральное представление
p-аналитических функций с характеристикой $p = x^k$**

Пусть G — область в правой полуплоскости $z = x + iy$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ — функция от $z = x + iy$, аналитическая в области G . Тогда на основании результатов, приведенных в § 2 (теоремы 1, 2, следствия 1, 2), функция $\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y)$, определенная равенством

$$\begin{aligned} \tilde{f}(z) &= \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y) = P(f) = \\ &= \operatorname{Re} \int_{z_0}^z f(\zeta) \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right)^{1-k} (z - \zeta)^{\frac{k}{2}-1} (\bar{z} + \zeta)^{\frac{k}{2}-1} d\zeta + \\ &+ i \operatorname{Im} \int_{z_0}^z f(\zeta) \left(\zeta - \frac{z - \bar{z}}{2} \right) (z - \zeta)^{\frac{k}{2}-1} (\bar{z} + \zeta)^{\frac{k}{2}-1} d\zeta, \quad \zeta = \xi + i\eta, \end{aligned} \quad (54)$$

где интегрирование от точки $z_0 = x_0 + iy_0$ до точки $z = x + iy$ ведется вдоль любого кусочно-гладкого контура Γ , лежащего в G , $\arg(z - \zeta) (\bar{z} + \zeta)$ фиксируется тем или иным способом, является p -аналитической в области G с характеристикой $p = x^k$ в следующих трех случаях:

а) область G в своей границе имеет отрезок мнимой оси L , $\operatorname{Im} f(z)|_L = 0$, z_0 — любая точка на L (нефиксированная);

б) область G в своей границе имеет бесконечно удаленную точку $z_0 = \infty$, и при $z \rightarrow z_0 = \infty$ вдоль контура Γ существует предельное положение касательной и $f(z) = O(|z|^{-k-\varepsilon})$ ($\varepsilon = \operatorname{const} > 0$);

в) z_0 — любая фиксированная точка границы области G ($z_0 \neq \infty$), и при подходе z к z_0 вдоль контура Γ $f(z) = O(|z - z_0|^{-1+\varepsilon})$ ($\varepsilon = \operatorname{const} > 0$).

Множества аналитических функций $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, указанных в случаях «а», «б», «в», будем обозначать соответственно через M , M_1 , M_2 . Равенство (54) в дальнейшем будем называть основным интегральным представлением p -аналитических функций от $z = x + iy$ с характеристикой $p = x^k$ или x^k -аналитических функций от $z = x + iy$. При этом будем различать указанные все три случая основного интегрального представления. В каждом из этих случаев интегральный оператор $P(f)$, как видим, преобразует аналитические функции от $z = x + iy$ в x^k -аналитические функции от этой же переменной в соответствующих областях.

Отметим, что интегральные представления через аналитические функции для случая вещественных решений уравнения второго

порядка $u_{xx} + u_{yy} + \frac{\alpha}{x} u_x = 0$ ($\alpha^2 = \text{const} > 0$) изучены достаточно хорошо (см., например, [95, 96]), для системы же уравнений $u_x = \frac{1}{x^\alpha} v_y$, $u_y = -\frac{1}{x^\alpha} v_x$ первая попытка построения интегральных представлений через аналитические функции была сделана сравнительно недавно [9—11]. В указанных работах введен оператор $P(f)$, но только для случая «а» и при условии, что контур Γ представляет собой прямую, соединяющую точки $-\bar{z}$ и z . Для этого случая найдены формулы обращения. Некоторое обобщение этих результатов на случай «б» (при условии, что Γ — прямая линия) получено в работах [97, 98]. В работе [12] оператор $P(f)$ введен для случаев «а» и «б», когда Γ — любой спрямляемый контур, на основании чего в работе [99] получены формулы обращения в полярной, биполярной и видоизмененной биполярной системах координат. В самом общем виде для трех случаев оператор $P(f)$ был введен в работе [14], на основе которой выведены [15] формулы обращения двух видов вдоль разрезов по прямым, параллельным вещественной оси, вдоль дуг окружностей полярной системы координат и вдоль разрезов по этим дугам, полные (т. е. для вещественной и мнимой частей) формулы обращения вдоль дуг окружностей биполярной и видоизмененной биполярной систем координат, а также вдоль разрезов по этим дугам. Все эти формулы получены в применении к оператору $P(f)$ во всех трех случаях.

В настоящем параграфе приведены результаты исследований по построению формул обращения вдоль линий и разрезов основного интегрального представления x^k -аналитических функций в соответствии с работой [15].

Рассмотрим предварительно интегральное уравнение

$$F_\alpha(x) = \int_a^x \psi_\alpha(\xi) [\omega(x) - \omega(\xi)]^\alpha d\xi, \quad (55)$$

где a — любое число ($-\infty \leq a \leq \infty$), x — независимая переменная ($x > a$ или $x < a$), $F_\alpha(x)$ — заданная функция от x , $\alpha = \text{const} > -1$; $\omega(x)$ — заданная функция, обладающая свойством $\omega(x) > \omega(\xi)$ при $\xi \subset (a, x)$, если $a < x$, и $\xi \subset (x, a)$, если $x < a$, $\psi_\alpha(x)$ — искомая функция. Покажем, что решение этого уравнения можно записать в виде

$$\psi_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)\Gamma(\alpha+1)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{d^m F_\alpha(\xi)}{(d\omega(\xi))^m} \frac{\omega'(\xi) d\xi}{[\omega(x) - \omega(\xi)]^{\alpha-m+1}}, & \alpha \neq n, \\ \frac{1}{n!} \omega'(x) \frac{d^{n+1} F_\alpha(x)}{(d\omega(x))^{n+1}}, & \alpha = n, \end{cases} \quad (56)$$

где n — целое число, $m = [\alpha + 1]$ — целая часть числа $\alpha + 1$.

В самом деле, при $\alpha = n$ равенство (56) очевидно и получается при помощи дифференцирования обеих частей уравнения (55) по $\omega(x)$ n раз и по x один раз. Пусть α не равно целому числу, $m = [\alpha + 1]$, $\beta = m - \alpha$. Дифференцируя обе части уравнения (55) по $\omega(x)$ m раз, получаем

$$\Phi_{\alpha}(x) = \int_a^x \psi_{\alpha}(\xi) \frac{d\xi}{[\omega(x) - \omega(\xi)]^{\beta}}, \quad (55')$$

где
$$\Phi_{\alpha}(x) = \frac{\Gamma(\alpha - m + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)} \frac{d^m F_{\alpha}(x)}{(d\omega(x))^m}.$$

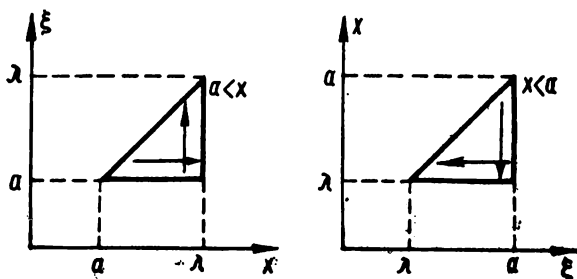


Рис. 10.

Как в случае $a < x$, так и в случаях $x < a$ (рис. 10) при помощи интегрирования находим

$$\begin{aligned} \int_a^{\lambda} \frac{\Phi_{\alpha}(x) \omega'(x) dx}{[\omega(\lambda) - \omega(x)]^{1-\beta}} &= \int_a^{\lambda} \frac{\omega'(x) dx}{[\omega(\lambda) - \omega(x)]^{1-\beta}} \int_a^x \frac{\psi_{\alpha}(\xi) d\xi}{[\omega(x) - \omega(\xi)]^{\beta}} = \\ &= \int_a^{\lambda} \psi_{\alpha}(\xi) d\xi \int_{\xi}^{\lambda} \frac{\omega'(x) dx}{[\omega(\lambda) - \omega(x)]^{1-\beta} [\omega(x) - \omega(\xi)]^{\beta}}. \end{aligned}$$

Полагая $[\omega(\lambda) - \omega(\xi)] t = \omega(x) - \omega(\xi)$, получаем

$$[\omega(\lambda) - \omega(\xi)] dt = \omega'(x) dx, \quad \omega(\lambda) - \omega(x) = (1 - t) [\omega(\lambda) - \omega(\xi)].$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int_a^{\lambda} \frac{\Phi_{\alpha}(x) \omega'(x) dx}{[\omega(\lambda) - \omega(x)]^{1-\beta}} &= \int_a^{\lambda} \psi_{\alpha}(\xi) d\xi \int_0^1 \frac{dt}{(1-t)^{1-\beta} t^{\beta}} = \\ &= \Gamma(\beta) \Gamma(1-\beta) \int_a^{\lambda} \psi_{\alpha}(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Следовательно, решение интегрального уравнения (55') имеет вид

$$\psi_{\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta) \Gamma(1-\beta)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{\Phi_{\alpha}(\xi) \omega'(\xi) d\xi}{[\omega(x) - \omega(\xi)]^{1-\beta}}, \quad (56')$$

а решение интегрального уравнения (55) запишется в форме (56).

Отметим также, что основное интегральное представление (54) после интегрирования по частям можно записать в виде

$$\begin{aligned}\tilde{f}(z) &= \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y) = \\ &= P(f) = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z f(\zeta) \left(\frac{z+\bar{z}}{2} \right)^{1-k} (z-\zeta)^{\frac{k}{2}-1} (\bar{z}+\zeta)^{\frac{k}{2}-1} d\zeta + \\ &\quad + i \operatorname{Im} \int_{z_0}^z \frac{1}{k} \frac{df(\zeta)}{d\zeta} (z-\zeta)^{\frac{k}{2}} (\bar{z}+\zeta)^{\frac{k}{2}} d\zeta + iC, \quad (57)\end{aligned}$$

где C — вещественная постоянная,

$$C = \frac{1}{k} \operatorname{Im} [f(z_0) (z-z_0)^{\frac{k}{2}} (\bar{z}+z_0)^{\frac{k}{2}}] \quad (57')$$

в случае «в», и $C = 0$ в случаях «а» и «б».

Предельные значения и формулы обращения в декартовых координатах

Пусть C_1 — разрез в правой полуплоскости $z = x + iy$, проведенный вдоль прямолинейного отрезка, соединяющего точку $(0, y)$ с точкой (a, y) , причем точка $(0, y)$ лежит на L . Далее, (x, y^+) и (x, y^-) — точки с координатами (x, y) , лежащие соответственно на верхнем и нижнем краях разреза C_1 , $z^+ = x + iy^+$, $z^- = x + iy^-$. Считаем, что если $z = x + iy$ и $\xi = \xi + iy$ ($\xi < x$) лежат на верхнем крае разреза C_1 , то $\arg(\bar{z} - \xi)(z + \xi) = 0$.

Рассмотрим основное интегральное представление (54) (случай «а», $z_0 = 0 + iy$). На верхнем крае разреза C_1 оно принимает вид

$$\begin{aligned}\tilde{f}(z^+) &= \tilde{u}(x, y^+) + i\tilde{v}(x, y^+) = P(f(z^+)) = \\ &= \int_0^x (x^{1-k} u(\xi, y^+) + i\xi v(\xi, y^+)) (x^2 - \xi^2)^{\frac{k}{2}-1} d\xi, \quad (58)\end{aligned}$$

его формулу обращения при помощи равенства (56) находим в виде

$$\begin{aligned}&u(x, y^+) + ixv(x, y^+) = \\ &= \begin{cases} \mu \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{d^m (\tilde{u}(\xi, y^+) \xi^{k-1} + i\tilde{v}(\xi, y^+))}{(d\xi^2)^m} \frac{\xi d\xi}{(x^2 - \xi^2)^{\frac{k}{2}-m}}, & k \neq 2m, \\ \mu x \frac{d^m (\tilde{u}(x, y^+) x^{k-1} + i\tilde{v}(x, y^+))}{(dx^2)^m}, & k = 2m. \end{cases} \quad (59)\end{aligned}$$

Здесь, как и в дальнейшем, m — целое число, $m = \left[\frac{k}{2} \right]$, μ — постоянная, $\mu = \frac{2}{\Gamma\left(m - \frac{k}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}$ (в частности, $\mu = \frac{2}{(m-1)!}$, если $k = 2m$, $\mu = \frac{2}{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{\pi}$, если $k = 1$). Если точка z лежит на нижнем крае разреза C_1 , из (54) получаем

$$\begin{aligned} \tilde{f}(z)^\pm = & \int_a^x (x^1 - \xi^k \operatorname{Re} \{f(\xi)\}^\pm e^{-i\pi\left(\frac{k}{2}-1\right)}) + \\ & + i\xi \operatorname{Im} \{f(\xi)\}^\pm e^{-i\pi\left(\frac{k}{2}-1\right)}) (\xi^2 - x^2)^{\frac{k}{2}-1} d\xi, \end{aligned} \quad (58')$$

где, как и в дальнейшем, $\tilde{f}(z)^\pm = \tilde{f}(z^+) - \tilde{f}(z^-)$, $[f(\xi)]^\pm = f(\xi^+) - f(\xi^-)$. Равенство (58') можно рассматривать как интегральное представление скачков предельных значений x^k -аналитической функции $\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y)$, определенной интегральным представлением (54). В силу (56) его формула обращения на разрезе C_1 записывается в виде

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \{f(z)\}^\pm e^{-i\pi\left(\frac{k}{2}-1\right)} + ix \operatorname{Im} \{f(z)\}^\pm e^{-i\pi\left(\frac{k}{2}-1\right)} = \\ = & \begin{cases} (-1)^{m-1} \mu \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{d^m (\tilde{u}(\xi, y))^\pm \xi^{k-1} + i [\tilde{v}(\xi, y)]^\pm}{(d\xi^2)^m} \cdot \frac{\xi d\xi}{(\xi^2 - x^2)^{\frac{k}{2}-m}}, & k \neq 2m, \\ (-1)^{m-1} \mu x \frac{d^m (\tilde{u}(x, y))^\pm x^{k-1} + i [\tilde{v}(x, y)]^\pm}{(dx^2)^m}, & k = 2m. \end{cases} \end{aligned} \quad (59')$$

Если основное интегральное представление (54) взять в виде (57), то вместо (58) получим

$$\begin{aligned} \tilde{f}(z^+) = & \tilde{u}(x, y^+) + i\tilde{v}(x, y^+) = P(f(z^+)) = \\ = & \int_0^x x^{1-k} \operatorname{Re} f(\xi^+) (x^2 - \xi^2)^{\frac{k}{2}-1} d\xi + i \int_0^x \frac{1}{k} \operatorname{Im} \frac{df(\xi^+)}{d\xi^+} (x^2 - \xi^2)^{\frac{k}{2}} d\xi. \end{aligned} \quad (60)$$

Отсюда в соответствии с (56) находим

$$\operatorname{Im} \frac{df(z^+)}{dz^+} = \begin{cases} \mu \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{d^{m+1} \tilde{v}(\xi, y^+)}{(d\xi^2)^{m+1}} \cdot \frac{2\xi d\xi}{(x^2 - \xi^2)^{\frac{k}{2}-m}}, & k \neq 2m, \\ \mu 2x \frac{d^{m+1} \tilde{v}(x, y^+)}{(dx^2)^{m+1}}, & k = 2m. \end{cases}$$

Таким образом, на C_1^+ (на верхнем крае разреза C_1) вместо (59) получаем

$$\operatorname{Re} f(z^+) + i \operatorname{Im} \frac{df(z^+)}{dz^+} = \begin{cases} \mu \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{d^m \left(\tilde{u}(\xi, y^+) - i \frac{\partial \tilde{u}(\xi, y^+)}{\partial y^+} \right) \xi^{k-1}}{(d\xi^2)^m} \frac{\xi d\xi}{(x^2 - \xi^2)^{\frac{k}{2} - m}}, & k \neq 2m, \\ \mu x \frac{d^m \left(\tilde{u}(x, y^+) - i \frac{\partial \tilde{u}(x, y^+)}{\partial y^+} \right) x^{k-1}}{(dx^2)^m}, & k = 2m, \end{cases} \quad (61)$$

вместо (58') —

$$\begin{aligned} [f(z)]^\pm &= \int_a^x x^{1-k} \operatorname{Re} \{ [f(\xi)]^\pm e^{-i\pi \left(\frac{k}{2} - 1 \right)} \} (\xi^2 - x^2)^{\frac{k}{2} - 1} d\xi + \\ &+ \int_a^x \frac{1}{k} \operatorname{Im} \left\{ \left[\frac{df(\xi)}{d\xi} \right]^\pm e^{-i\pi \frac{k}{2}} \right\} (\xi^2 - x^2)^{\frac{k}{2}} d\xi. \end{aligned} \quad (60')$$

Отсюда вместо (59') находим

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re} \{ [f(z)]^\pm e^{-i\pi \left(\frac{k}{2} - 1 \right)} \} + i \operatorname{Im} \left\{ \left[\frac{df(z)}{dz} \right]^\pm e^{-i\pi \frac{k}{2}} \right\} = \\ &= \begin{cases} (-1)^{m-1} \mu \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{d^m \left([\tilde{u}(\xi, y)]^\pm + i \left[\frac{\partial \tilde{u}(\xi, y)}{\partial y} \right]^\pm \right) \xi^{k-1}}{(d\xi^2)^m} \frac{\xi d\xi}{(\xi^2 - x^2)^{\frac{k}{2} - m}}, & k \neq 2m, \\ (-1)^{m-1} \mu x \frac{d^m \left([\tilde{u}(x, y)]^\pm + i \left[\frac{\partial \tilde{u}(x, y)}{\partial y} \right]^\pm \right) x^{k-1}}{(dx^2)^m}, & k = 2m. \end{cases} \end{aligned} \quad (61')$$

Пусть теперь разрез C_2 в правой полуплоскости $z = x + iy$ проведен вдоль прямолинейного горизонтального отрезка, идущего из бесконечности в точку (b, y) . Считаем, что если точки $z = x + iy$ и $\xi = \xi + iy$ лежат на C_2^+ (на верхнем крае разреза C_2), то $\arg(z - \xi) = -\pi$.

Рассмотрим интегральное представление (54) (случай «б», $z_0 = \infty$). На верхнем крае разреза C_2 оно принимает вид

$$\tilde{f}(z^+) = \tilde{u}(x, y^+) + i \tilde{v}(x, y^+) =$$

$$\begin{aligned}
= P(f(z^+)) &= \int_{-\infty}^x (x^{1-k} \operatorname{Re} \{f(\xi^+) e^{-i\pi(\frac{k}{2}-1)}\} + \\
&+ i\xi \operatorname{Im} \{f(\xi^+) e^{-i\pi(\frac{k}{2}-1)}\}) (\xi^2 - x^2)^{\frac{k}{2}-1} d\xi. \quad (62)
\end{aligned}$$

Отметим, что при сделанном выборе $\arg(z - \zeta)(\bar{z} + \zeta)$, если предположить, что функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ в части правой полуплоскости, лежащей выше прямой $y = \text{const}$, аналитическая, при $z \rightarrow \infty$ $f(z) = O(|z|^{-k-\varepsilon})$ ($\varepsilon = \text{const} > 0$) и на части мнимой оси, входящей в состав границы указанной четверти плоскости, $v(0, y) = 0$, то интегральные представления (58) и (62) определяют одну и ту же x^k -аналитическую функцию. Поэтому их можно назвать взаимными интегральными представлениями.

Формула обращения интегрального представления (62) на C_2^+ записывается в виде

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re} \{f(z^+) e^{-i\pi(\frac{k}{2}-1)}\} + ix \operatorname{Im} \{f(z^+) e^{-i\pi(\frac{k}{2}-1)}\} = \\
= &\begin{cases} (-1)^{m-1} \mu \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x \frac{d^m(\tilde{u}(\xi, y^+) \xi^{k-1} + i\tilde{v}(\xi, y^+))}{(d\xi^2)^m} \frac{\xi d\xi}{(\xi^2 - x^2)^{\frac{k}{2}-m}}, & k \neq 2m, \\ (-1)^{m-1} \mu x \frac{d^m(\tilde{u}(x, y^+) x^{k-1} + i\tilde{v}(x, y^+))}{(dx^2)^m}, & k = 2m. \end{cases} \quad (63)
\end{aligned}$$

Если точка $z = x + iy$ лежит на C_2^- (на нижнем крае разреза C_2), интегральное представление (62) принимает вид

$$[\tilde{f}(z)]^\pm = \int_b^x (x^{1-k} [u(\xi, y)]^\pm + i\xi [v(\xi, y)]^\pm) (x^2 - \xi^2)^{\frac{k}{2}-1} d\xi, \quad (62')$$

а формула обращения этого интегрального представления скачков x^k -аналитической функции на разрезе C_2 —

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re} [f(z)]^\pm + ix \operatorname{Im} [f(z)]^\pm = \\
= &\begin{cases} \mu \frac{d}{dx} \int_b^x \frac{d^m([u(\xi, y)]^\pm \xi^{k-1} + i[\tilde{v}(\xi, y)]^\pm)}{(d\xi^2)^m} \frac{\xi d\xi}{(x^2 - \xi^2)^{\frac{k}{2}-m}}, & k \neq 2m, \\ \mu x \frac{d^m([u(x, y)]^\pm x^{k-1} + i[\tilde{v}(x, y)]^\pm)}{(dx^2)^m}, & k = 2m. \end{cases} \quad (63')
\end{aligned}$$

Если интегральное представление (54) (случай «б») взять в виде (57), то вместо (62) на C_2^+ получим

$$\begin{aligned}\tilde{f}(z^+) &= \tilde{u}(x, y^+) + i\tilde{v}(x, y^+) = \\ &= P(f(z^+)) = \int_{-\infty}^x x^{1-k} \operatorname{Re} \{f(\xi^+) e^{-i\pi(\frac{k}{2}-1)}\} (\xi^2 - x^2)^{\frac{k}{2}-1} d\xi + \\ &+ i \int_{-\infty}^x \frac{1}{k} \operatorname{Im} \left\{ \frac{df(\xi^+)}{d\xi^+} e^{-i\pi\frac{k}{2}} \right\} (\xi^2 - x^2)^{\frac{k}{2}} d\xi.\end{aligned}\quad (64)$$

Отсюда вместо (63) по аналогии с (61) находим

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} \{f(z^+) e^{-i\pi(\frac{k}{2}-1)}\} + i \operatorname{Im} \left\{ \frac{df(z^+)}{dz^+} e^{-i\pi\frac{k}{2}} \right\} = \\ = \begin{cases} (-1)^{m-1} \mu \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x \frac{d^m \left(\tilde{u}(\xi, y^+) + i \frac{\partial \tilde{u}(\xi, y^+)}{\partial y^+} \right) \xi^{k-1}}{(d\xi^2)^m} \frac{\xi d\xi}{(\xi^2 - x^2)^{\frac{k}{2}-m}}, & k \neq 2m, \\ (-1)^{m-1} \mu x \frac{d^m \left(\tilde{u}(x, y^+) + i \frac{\partial \tilde{u}(x, y^+)}{\partial y^+} \right) x^{k-1}}{(dx^2)^m}, & k = 2m. \end{cases}\end{aligned}\quad (65)$$

Вместо интегрального представления скачков (62') на C_2 получаем

$$\begin{aligned}[\tilde{f}(z)]^\pm &= \int_b^x x^{1-k} [u(\xi, y)]^\pm (x^2 - \xi^2)^{\frac{k}{2}-1} d\xi + \\ &+ i \int_b^x \frac{1}{k} \operatorname{Im} \left[\frac{df(\xi)}{d\xi} \right]^\pm (x^2 - \xi^2)^{\frac{k}{2}} d\xi.\end{aligned}\quad (64')$$

Отсюда вместо (63') по аналогии с (61') на C_2 находим

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} [f(z)]^\pm + i \operatorname{Im} \left[\frac{df(z)}{dz} \right]^\pm = \\ = \begin{cases} \mu \frac{d}{dx} \int_b^x \frac{d^m \left([\tilde{u}(\xi, y)]^\pm - i \left[\frac{\partial \tilde{u}(\xi, y)}{\partial y} \right]^\pm \right) \xi^{k-1}}{(d\xi^2)^m} \frac{\xi d\xi}{(x^2 - \xi^2)^{\frac{k}{2}-m}}, & k \neq 2m, \\ \mu x \frac{d^m \left([\tilde{u}(x, y)]^\pm - i \left[\frac{\partial \tilde{u}(x, y)}{\partial y} \right]^\pm \right) x^{k-1}}{(dx^2)^m}, & k = 2m. \end{cases}\end{aligned}\quad (65')$$

Пусть x_0, y — координаты точки z_0 , являющейся начальной точкой контура интегрирования Γ в интегральном представлении (54) (случай «в»). Пусть эта точка — левый конец прямолинейного разреза C_3 , соединяющего ее с точкой (a, y) ($a > x_0$). Считаем, что на C_3^+ (на верхнем крае разреза C_3) $\arg(z - \xi)(\bar{z} + \xi) = 0$ ($\xi < x$). Тогда интегральное представление (54) на C_3^+ принимает вид

$$\begin{aligned} \tilde{f}(z^+) &= \tilde{u}(x, y^+) + i\tilde{v}(x, y^+) = P(f(z^+)) = \\ &= \int_{x_0}^x (x^{1-k} u(\xi, y^+) + i\xi v(\xi, y^+)) (x^2 - \xi^2)^{\frac{k}{2}-1} d\xi, \end{aligned} \quad (66)$$

а формула его обращения — вид равенства (59), если в интеграле правой части этого равенства в качестве нижнего предела вместо нуля подставить x_0 . Интегральное представление скачков $[f(z)]^\pm$ на разрезе C_3 такое же, как и на разрезе C_1 , т. е. совпадает с (58'), а формула обращения этого интегрального представления скачков совпадает с равенством (59').

Если интегральное представление (54) (случай «в») взять в виде (57) и предположить, что $\operatorname{Im} f(z)|_{z=z_0} = 0$, то на C_3^+ будут выполняться соотношения (60) и (61) при условии, что в интеграле в качестве нижнего предела вместо нуля подставляется x_0 . Без каких-либо изменений будут выполняться на C_3 соотношения (60') и (61').

Пусть теперь точка z_0 является правым концом разреза C_4 , соединяющего ее с точкой (b, y) ($b < x_0$). Считаем, что на C_4^+ (на верхнем крае разреза C_4) $\arg(z - \xi)(\bar{z} + \xi) = -\pi$ ($x < \xi$). Тогда интегральное представление (54) (случай «в») на C_4^+ принимает вид

$$\begin{aligned} f(z^+) &= \tilde{u}(x, y^+) + i\tilde{v}(x, y^+) = P(f(z^+)) = \\ &= \int_{x_0}^x (x^{1-k} \operatorname{Re} \{f(\xi^+) e^{-i\pi(\frac{k}{2}-1)}\} + \\ &+ i\xi \operatorname{Im} \{f(\xi^+) e^{-i\pi(\frac{k}{2}-1)}\}) (\xi^2 - x^2)^{\frac{k}{2}-1} d\xi, \end{aligned} \quad (67)$$

а формула его обращения — вид равенства (63) при условии, что в интеграле в качестве нижнего предела вместо бесконечности подставляется x_0 . Интегральное представление скачков $[\tilde{f}(z)]^\pm$ на разрезе C_4 совпадает с (62'), а его формула обращения — с (63').

Если интегральное представление (54) (случай «в») взять в виде (57) и предположить, что $\operatorname{Im} \{f(z) e^{-i\pi\frac{k}{2}}\}_{z=z_0} = 0$, то на C_4^+ будут выполняться соотношения (64) и (65) при условии, что в интеграле в качестве нижнего предела вместо бесконечности подставляется x_0 . Без каких-либо изменений на C_4 будут выполняться равенства (64') и (65').

Введем полярные координаты, полагая $z = x + iy = \rho e^{i\theta}$. Пусть C_1 — разрез вдоль дуги окружности $\rho = \text{const}$ с начальной точкой $\rho e^{-i\frac{\pi}{2}}$ и конечной точкой $\rho e^{i\alpha}$ ($-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$), причем точка $\rho e^{-i\frac{\pi}{2}}$

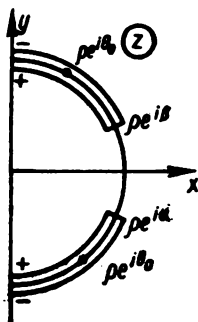


Рис. 11.

принадлежит L (рис. 11). В качестве C_1^+ (верхнего края разреза) принимаем тот край, который соответствует $\rho = \rho - 0$. Точки C_1^+ с координатами x, y обозначаем через z^+ , нижнего края C_1^- — через z^- . Считаем, что если точки $z^+ = \rho e^{i\theta}$ и $\zeta^+ = \rho e^{i\varphi}$ ($\varphi < \theta$) приближаются к точке $\rho e^{-i\frac{\pi}{2}}$, то $\arg(z - \zeta)(\bar{z} + \zeta)$ в пределе равен нулю.

Рассмотрим интегральное представление (54), взятое в виде (57), на C_1^+ . На C_1^+

$$(z - \zeta)(\bar{z} + \zeta) = \rho^2 e^{i\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)} (2 \sin \theta - 2 \sin \varphi). \quad (68)$$

Подставляя (68) в (57), приходим к выводу, что интегральное представление (54) на C_1^+ имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{f}(z^+) &= \tilde{u}(x, y^+) + i v(x, y^+) = P(f(z^+)) = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} x^{1-k} \rho^{k-1} \operatorname{Re} \left\{ f(\zeta^+) e^{i\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \frac{k}{2}} \right\} (2 \sin \theta - 2 \sin \varphi)^{\frac{k}{2}-1} d\varphi + \\ &+ i \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} \frac{1}{k} \rho^{k+1} \operatorname{Im} \left\{ \frac{df(\zeta^+)}{d\zeta^+} e^{i\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \left(\frac{k}{2}+1\right)} \right\} (2 \sin \theta - 2 \sin \varphi)^{\frac{k}{2}} d\varphi. \end{aligned} \quad (69)$$

Используя (56), находим формулу обращения этого интегрального представления на C_1^+ в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ f(z^+) e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \frac{k}{2}} \right\} + i \operatorname{Im} \left\{ \frac{df(z^+)}{dz^+} e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \left(\frac{k}{2}+1\right)} \right\} = \\ = \begin{cases} \mu \rho^{1-k} \frac{d}{d\theta} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} \frac{d^m \left(\tilde{u}(\zeta^+) \xi^{k-1} + i \rho^{-2} \frac{d\tilde{v}(\zeta^+)}{d \sin \varphi} \right)}{(d 2 \sin \varphi)^m} \frac{\cos \varphi d\varphi}{(2 \sin \theta - 2 \sin \varphi)^{\frac{k}{2}-m}}, & k \neq 2m, \\ \mu \rho^{1-k} \cos \theta \frac{d^m \left(\tilde{u}(z^+) x^{k-1} + i \rho^{-2} \frac{d\tilde{v}(z^+)}{d \sin \theta} \right)}{(d 2 \sin \theta)^m}, & k = 2m. \end{cases} \end{aligned} \quad (70)$$

Поскольку

$$\rho^{-2} \frac{d\tilde{v}(z)}{d \sin \theta} = \frac{1}{x} \frac{d\tilde{v}(z)}{\rho d\theta} = x^{k-1} \frac{\partial \tilde{u}(z)}{\partial \rho}, \quad (71)$$

формулу обращения на C_1^+ (70) можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \{f(z^+) e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \frac{k}{2}}\} + i \operatorname{Im} \left\{ \frac{df(z^+)}{dz^+} e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \left(\frac{k}{2} + 1\right)} \right\} = \\ & = \begin{cases} \mu \rho^{1-k} \frac{d}{d\theta} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} \frac{d^m \left(\tilde{u}(\zeta^+) + i \frac{\partial \tilde{u}(\zeta^+)}{\partial \rho} \right) \xi^{k-1}}{(d2 \sin \varphi)^m} \frac{\cos \varphi d\varphi}{(2 \sin \theta - 2 \sin \varphi)^{\frac{k}{2} - m}}, & k \neq 2m, \\ \mu \rho^{1-k} \cos \theta \frac{d^m \left(\tilde{u}(z^+) + i \frac{\partial \tilde{u}(z^+)}{\partial \rho} \right) x^{k-1}}{(d2 \sin \theta)^m}, & k = 2m. \end{cases} \quad (72) \end{aligned}$$

Если точка $z = x + iy$ лежит на C_1^- (на нижнем крае разреза C_1 , т. е. со стороны $\rho = \rho + 0$), из (57) и (69) получаем интегральное представление скачков на C_1

$$\begin{aligned} & [\hat{f}(z)]^{\pm} = \\ & = - \int_{\alpha}^{\theta} x^{1-k} \rho^{k-1} \operatorname{Re} \{ [f(\zeta)]^{\pm} e^{i\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \frac{k}{2}} \} (2 \sin \varphi - 2 \sin \theta)^{\frac{k}{2} - 1} d\varphi - \\ & - i \int_{\alpha}^{\theta} \frac{1}{k} \rho^{k+1} \operatorname{Im} \left\{ \left[\frac{df(\zeta)}{d\zeta} \right]^{\pm} e^{i\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \left(\frac{k}{2} + 1\right)} \right\} (2 \sin \varphi - 2 \sin \theta)^{\frac{k}{2}} d\varphi. \end{aligned} \quad (69')$$

Формула обращения этого интегрального представления скачков на C_1 имеет вид

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \{ [f(z)]^{\pm} e^{i\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \frac{k}{2}} \} + i \operatorname{Im} \left\{ \left[\frac{df(z)}{dz} \right]^{\pm} e^{i\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \left(\frac{k}{2} + 1\right)} \right\} = \\ & = \begin{cases} (-1)^m \mu \rho^{1-k} \frac{d}{d\theta} \int_{\alpha}^{\theta} \frac{d^m \left([\tilde{u}(\zeta)]^{\pm} \xi^{k-1} - i \rho^{-2} \left[\frac{d\tilde{v}(\zeta)}{d \sin \varphi} \right]^{\pm} \right)}{(d2 \sin \varphi)^m} \times \\ \times \frac{\cos \varphi d\varphi}{(2 \sin \varphi - 2 \sin \theta)^{\frac{k}{2} - m}}, & k \neq 2m, \\ (-1)^m \mu \rho^{1-k} \cos \theta \frac{d^m \left([\tilde{u}(z)]^{\pm} x^{k-1} - i \rho^{-2} \left[\frac{d\tilde{v}(z)}{d \sin \theta} \right]^{\pm} \right)}{(d2 \sin \theta)^m}, & k = 2m. \end{cases} \quad (70') \end{aligned}$$

В силу (71) ее можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \{ [f(z)]^{\pm} e^{i \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \frac{k}{2}} \} + i \operatorname{Im} \left\{ \left[\frac{df(z)}{dz} \right]^{\pm} e^{i \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \left(\frac{k}{2} + 1 \right)} \right\} = \\ & = \begin{cases} (-1)^m \mu \rho^{1-k} \frac{d}{d\theta} \int_{\alpha}^{\theta} \frac{d^m \left([\tilde{u}(\zeta)]^{\pm} - i \left[\frac{\partial \tilde{u}(\zeta)}{\partial \rho} \right]^{\pm} \right) \xi^{k-1}}{(d2 \sin \varphi)^m} \times \\ \times \frac{\cos \varphi d\varphi}{(2 \sin \varphi - 2 \sin \theta)^{\frac{k}{2} - m}}, \quad k \neq 2m, \\ (-1)^m \mu \rho^{1-k} \cos \theta \frac{d^m \left([\tilde{u}(z)]^{\pm} - i \left[\frac{\partial \tilde{u}(z)}{\partial \rho} \right]^{\pm} \right) x^{k-1}}{(d2 \sin \theta)^m}, \quad k = 2m. \end{cases} \quad (72') \end{aligned}$$

Пусть C_2 — разрез вдоль дуги окружности $\rho = \text{const}$ с начальной точкой $\rho e^{i \frac{\pi}{2}}$ и конечной точкой $\rho e^{i\beta}$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2} \right)$, причем точка $\rho e^{i \frac{\pi}{2}}$ принадлежит L (см. рис. 11). В качестве верхнего края разреза C_2^+ принимаем тот край, который соответствует $\rho = \rho - 0$, нижнему краю C_2^- соответствует $\rho = \rho + 0$. Введем на C_2^+ условие $\lim \arg (z - \zeta) (\bar{z} + \zeta) = 0$ при $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}$, $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$, $\varphi > \theta$. При выполнении этого условия интегральное представление (54), взятое в виде (57), на C_2^+ , в силу того что $(z - \zeta) (\bar{z} + \zeta) = e^{i \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right)} (2 \sin \varphi - 2 \sin \theta)$, запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} & \tilde{f}(z^+) = \tilde{u}(z^+) + i \tilde{v}(z^+) = P(f(z^+)) = \\ & = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} -x^{1-k} \rho^{k-1} \operatorname{Re} \{ f(\xi^+) e^{i \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) \frac{k}{2}} \} (2 \sin \varphi - 2 \sin \theta)^{\frac{k}{2} - 1} d\varphi + \\ & + i \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} -\frac{1}{k} \rho^{k+1} \operatorname{Im} \left\{ \frac{df(\xi^+)}{d\xi^+} e^{i \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) \left(\frac{k}{2} - 1 \right)} \right\} (2 \sin \varphi - 2 \sin \theta)^{\frac{k}{2}} d\varphi. \end{aligned} \quad (73)$$

Интегральное представление (73) на C_2^+ можно рассматривать как взаимное интегральное представление по отношению к (69). Дело в том, что если предположить, что $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ является аналитической функцией в круге $|z| < \rho$ и непрерывной на его границе, а на мнимой оси ее мнимая часть равна нулю, то

интегральные представления (69) и (73) определяют одну и ту же x^k -аналитическую функцию в полукруге $|z| < \rho$, $x > 0$. Формула обращения интегрального представления (73), с учетом (56), имеет вид

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \left\{ f(z^+) e^{i \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \frac{k}{2}} \right\} + i \operatorname{Im} \left\{ \frac{df(z^+)}{dz^+} e^{i \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \left(\frac{k}{2} + 1 \right)} \right\} = \\ & = \begin{cases} (-1)^m \mu \rho^{1-k} \frac{d}{d\theta} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \frac{d^m \left(\tilde{u}(\xi^+) \xi^{k-1} - i \rho^{-2} \frac{d\tilde{u}(\xi^+)}{d \sin \varphi} \right)}{(d2 \sin \varphi)^m} \times \\ \times \frac{\cos \varphi d\varphi}{(2 \sin \varphi - 2 \sin \theta)^{\frac{k}{2} - m}}, & k \neq 2m, \\ (-1)^m \mu \rho^{1-k} \cos \theta \frac{d^m \left(\tilde{u}(z^+) x^{k-1} - i \rho^{-2} \frac{d\tilde{u}(z^+)}{d \sin \theta} \right)}{(d2 \sin \theta)^m}, & k = 2m. \end{cases} \quad (74) \end{aligned}$$

В силу (71) ее можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \left\{ f(z^+) e^{i \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \frac{k}{2}} \right\} + i \operatorname{Im} \left\{ \frac{df(z^+)}{dz^+} e^{i \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \left(\frac{k}{2} + 1 \right)} \right\} = \\ & = \begin{cases} (-1)^m \mu \rho^{1-k} \frac{d}{d\theta} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \frac{d^m \left(\tilde{u}(\xi^+) - i \frac{\partial \tilde{u}(\xi^+)}{\partial \rho} \right) \xi^{k-1}}{(d2 \sin \varphi)^m} \times \\ \times \frac{\cos \varphi d\varphi}{(2 \sin \varphi - 2 \sin \theta)^{\frac{k}{2} - m}}, & k \neq 2m, \\ (-1)^m \mu \rho^{1-k} \cos \theta \frac{d^m \left(\tilde{u}(z^+) - i \frac{\partial \tilde{u}(z^+)}{\partial \rho} \right) x^{k-1}}{(d2 \sin \theta)^m}, & k = 2m. \end{cases} \quad (75) \end{aligned}$$

Если точка $z = x + iy$ лежит на C_2^- , из (57) и (73) получаем интегральное представление скачков на C_2

$$\begin{aligned} [f(z)]^\pm &= \int_{\beta}^{\theta} x^{1-k} \rho^{k-1} \operatorname{Re} \left\{ [f(\xi)]^\pm e^{i \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) \frac{k}{2}} \right\} (2 \sin \theta - 2 \sin \varphi)^{\frac{k}{2} - 1} d\varphi + \\ &+ i \int_{\beta}^{\theta} \frac{1}{k} \rho^{k+1} \operatorname{Im} \left\{ \left[\frac{df(\xi)}{d\xi} \right]^\pm e^{i \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) \left(\frac{k}{2} + 1 \right)} \right\} (2 \sin \theta - 2 \sin \varphi)^{\frac{k}{2}} d\varphi. \end{aligned} \quad (73')$$

Формула обращения этого интегрального представления скачков на C_2 имеет вид

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \{ [f(z)]^{\pm} e^{i \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \frac{k}{2}} \} + i \operatorname{Im} \left\{ \left[\frac{df(z)}{dz} \right]^{\pm} e^{i \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \left(\frac{k}{2} + 1 \right)} \right\} = \\ & = \begin{cases} \mu \rho^{1-k} \frac{d}{d\theta} \int_{\theta}^{\theta} \frac{d^m \left([\tilde{u}(\zeta)]^{\pm} \xi^{k-1} + i \rho^{-2} \frac{d[\tilde{v}(\zeta)]^{\pm}}{d \sin \varphi} \right)}{(d2 \sin \varphi)^m} \times \\ \times \frac{\cos \varphi d\varphi}{(2 \sin \theta - 2 \sin \varphi)^{\frac{k}{2} - m}}, & k \neq 2m, \\ \mu \rho^{1-k} \cos \theta \frac{d^m \left([\tilde{u}(z)]^{\pm} x^{k-1} + i \rho^{-2} \frac{d[\tilde{v}(z)]^{\pm}}{d \sin \theta} \right)}{(d2 \sin \theta)^m}, & k = 2m. \end{cases} \quad (74') \end{aligned}$$

В силу (71) ее можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \{ [f(z)]^{\pm} e^{i \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \frac{k}{2}} \} + i \operatorname{Im} \left\{ \left[\frac{df(z)}{dz} \right]^{\pm} e^{i \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \left(\frac{k}{2} + 1 \right)} \right\} = \\ & = \begin{cases} \mu \rho^{1-k} \frac{d}{d\theta} \int_{\theta}^{\theta} \frac{d^m \left([\tilde{u}(\zeta)]^{\pm} + i \left[\frac{\partial \tilde{u}(\zeta)}{\partial \rho} \right]^{\pm} \right) \xi^{k-1}}{(d2 \sin \varphi)^m} \frac{\cos \varphi d\varphi}{(2 \sin \theta - 2 \sin \varphi)^{\frac{k}{2} - m}}, & k \neq 2m, \\ \mu \rho^{1-k} \cos \theta \frac{d^m \left([\tilde{u}(z)]^{\pm} + i \left[\frac{\partial \tilde{u}(z)}{\partial \rho} \right]^{\pm} \right) x^{k-1}}{(d2 \sin \theta)^m}, & k = 2m. \end{cases} \quad (75') \end{aligned}$$

Пусть теперь точка $z_0 = x_0 + iy_0 = \rho e^{i\theta_0}$ (начальная точка контура Γ в интегральном представлении (54)) является левым концом разреза C_3 , идущего из точки z_0 до точки $\rho e^{i\alpha}$ ($\theta_0 < \alpha$) (см. рис. 11). Верхний край C_3^+ и нижний край C_3^- этого разреза выбираем так же, как и в случае разреза C_1 ; такое же предположение, как и в случае разреза C_1 , делаем о выборе $\arg(z - \zeta)$ ($\bar{z} + \zeta$). Взяв интегральное представление (54) в виде (57), на C_3^+ находим

$$\begin{aligned} \tilde{f}(z^+) &= \tilde{u}(z^+) + i\tilde{v}(z^+) = P(f(z^+)) = \\ &= \int_{\theta_0}^{\theta} x^{1-k} \rho^{k-1} \operatorname{Re} \{ f(\zeta^+) e^{i \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) \frac{k}{2}} \} (2 \sin \theta - 2 \sin \varphi)^{\frac{k}{2} - 1} d\varphi + \end{aligned}$$

$$+ i \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{1}{k} \rho^{k+1} \operatorname{Im} \left\{ \frac{df(\xi^+)}{d\xi^+} e^{i \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) \left(\frac{k}{2} + 1 \right)} \right\} \times \\ \times (2 \sin \theta - 2 \sin \varphi)^{\frac{k}{2}} d\varphi + iC(y), \quad (76)$$

где

$$C(y) = \frac{1}{k} \rho^{\frac{k}{2}} (2y - 2y_0)^{\frac{k}{2}} \operatorname{Im} \{ f(z_0) e^{i \left(\theta_0 + \frac{\pi}{2} \right) \frac{k}{2}} \}.$$

Формулу обращения этого интегрального представления на C_3^+ , учитывая, что $\frac{d^{m+1}C(y)}{dy^{m+1}} = 0$ при $k = 2m$, получаем в виде

$$\operatorname{Re} \{ f(z^+) e^{i \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \frac{k}{2}} \} + i \operatorname{Im} \left\{ \frac{df(z^+)}{dz^+} e^{i \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \left(\frac{k}{2} + 1 \right)} \right\} = \\ = \begin{cases} \mu \rho^{1-k} \frac{d}{d\theta} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d^m \left(\tilde{u}(\xi^+) \xi^{k-1} + i \rho^{-2} \frac{d(\tilde{v}(\xi^+) + C(\eta))}{d \sin \varphi} \right)}{(d2 \sin \varphi)^m} \times \\ \times \frac{\cos \varphi d\varphi}{(2 \sin \theta - 2 \sin \varphi)^{\frac{k}{2} - m}}, & k \neq 2m, \\ \mu \rho^{1-k} \cos \theta \frac{d^m \left(\tilde{u}(z^+) x^{k-1} + i \rho^{-2} \frac{d\tilde{v}(z^+)}{d \sin \theta} \right)}{(d2 \sin \theta)^m}, & k = 2m. \end{cases} \quad (77)$$

При $\operatorname{Im} \{ f(z_0) e^{i \left(\theta_0 + \frac{\pi}{2} \right) \frac{k}{2}} \} = 0$, в силу (71), формулу (77) можно записать в виде

$$\operatorname{Re} \{ f(z^+) e^{i \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \frac{k}{2}} \} + i \operatorname{Im} \left\{ \frac{df(z^+)}{dz^+} e^{i \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \left(\frac{k}{2} + 1 \right)} \right\} = \\ = \begin{cases} \mu \rho^{1-k} \frac{d}{d\theta} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d^m \left(\tilde{u}(\xi^+) + i \frac{\partial \tilde{u}(\xi^+)}{\partial \rho} \right) \xi^{k-1}}{(d2 \sin \varphi)^m} \frac{\cos \varphi d\varphi}{(2 \sin \theta - 2 \sin \varphi)^{\frac{k}{2} - m}}, & k \neq 2m, \\ \mu \rho^{1-k} \cos \theta \frac{d^m \left(\tilde{u}(z^+) + i \frac{\partial \tilde{u}(z^+)}{\partial \rho} \right) x^{k-1}}{(d2 \sin \theta)^m}, & k = 2m. \end{cases} \quad (78)$$

Интегральное представление скачков $[\tilde{f}(z)]^\pm$ на C_3 при любых значениях $C(y)$ такое же, как и на C_1 , т. е. совпадает с (69'), а его формула обращения совпадает с равенствами (70') или (72').

Пусть теперь точка $z_0 = x_0 + iy_0 = \rho e^{i\theta_0}$ является правым концом разреза C_4 , соединяющего точку z_0 с точкой $\rho e^{i\beta}$ ($\theta_0 > \beta$). Верхний C_4^+ и нижний C_4^- края разреза C_4 и $\arg(z - \zeta)$ ($\bar{z} + \zeta$) на C_4^+ выбираем так же, как и в случае разреза C_2 . Интегральное представление (54), взятое в виде (57), на C_4^+ записываем следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(z^+) &= \tilde{u}(z^+) + i\tilde{v}(z^+) = P(f(z^+)) = \\ &= \int_{\theta_0}^{\theta} -x^{1-k} \rho^{k-1} \operatorname{Re} \{f(\xi^+) e^{i\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \frac{k}{2}}\} (2 \sin \varphi - 2 \sin \theta)^{\frac{k}{2}-1} d\varphi + \\ &+ i \int_{\theta_0}^{\theta} -\frac{1}{k} \rho^{k+1} \operatorname{Im} \left\{ \frac{df(\xi^+)}{d\xi^+} e^{i\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \left(\frac{k}{2}+1\right)} \right\} \times \\ &\times (2 \sin \varphi - 2 \sin \theta)^{\frac{k}{2}} d\varphi + iC(y), \end{aligned} \quad (79)$$

где

$$C(y) = \frac{1}{k} \rho^{\frac{k}{2}} (2y_0 - 2y)^{\frac{k}{2}} \operatorname{Im} \{f(z_0) e^{i\left(\theta_0 - \frac{\pi}{2}\right) \frac{k}{2}}\}.$$

Формула обращения этого интегрального представления совпадает с равенствами (74) при условии, что нижний предел интегрирования $\frac{\pi}{2}$ заменяется на θ_0 , а $\tilde{v}(\xi^+)$ — на $\tilde{v}(\xi^+) - C(\eta)$. Если пред-

положить, что $\operatorname{Im} \{f(z_0) e^{i\left(\theta_0 - \frac{\pi}{2}\right) \frac{k}{2}}\} = 0$, на C_4^+ справедливо соотношение (75) при условии, что нижний предел интегрирования $\frac{\pi}{2}$ заменяется на θ_0 . Если точка z лежит на C_4^- независимо от $C(y)$, интегральное представление скачков $[\tilde{f}(z)]^\pm$ такое же, как и в случае разреза C_2 , т. е. совпадает с (73'), а его формула обращения совпадает с равенствами (74') или (75').

Предельные значения и формулы обращения в биполярных координатах

Введем биполярные координаты σ и τ при помощи равенств

$$z = q \operatorname{th} \frac{\omega}{2}, \quad z = x + iy, \quad \omega = \sigma + i\tau \quad (80)$$

или

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{q \operatorname{sh} \sigma}{\operatorname{ch} \sigma + \cos \tau}, & y &= \frac{q \sin \tau}{\operatorname{ch} \sigma + \cos \tau}, \\ -\infty < \sigma < \infty, & & -\pi < \tau < \pi, \end{aligned} \right\} \quad (80')$$

где q — положительное число. Линиям $\tau = \text{const}$, $-\infty < \sigma < \infty$ соответствуют в плоскости $z = x + iy$ дуги окружностей с начальной точкой $-q$ и конечной точкой q , линиям $\sigma = \text{const}$, $-\pi < \tau < \pi$ — окружности, ортогональные указанным дугам окружностей (рис. 12). Уравнения дуг окружностей $\tau = \text{const}$ и окружностей $\sigma = \text{const}$ соответственно имеют вид

$$x^2 + (y - q \operatorname{cth} \tau)^2 = \frac{q^2}{\operatorname{sh}^2 \tau}, \quad (x - q \operatorname{cth} \sigma)^2 + y^2 = \frac{q^2}{\operatorname{sh}^2 \sigma}.$$

Отметим, что $|\tau|$ представляет собой величину угла между касательной к дуге окружности в точках $x = \pm q$, $y = 0$ и отрезком $[-q, q]$ оси x .

Пусть C_1 — разрез вдоль дуги окружности $\tau = \tau_1 = \text{const}$ с начальной точкой $\sigma = 0$ и конечной точкой $\sigma = \alpha$ ($0 < \alpha \leq \infty$),

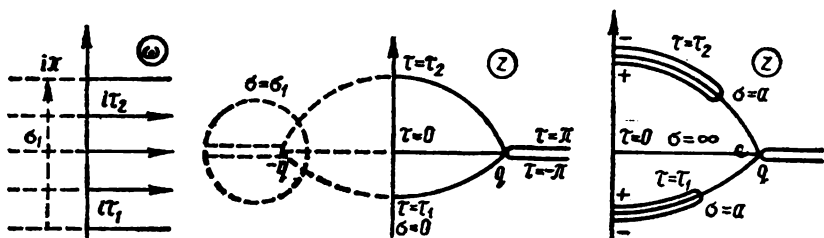


Рис. 12.

причем точка $\sigma = 0$, $\tau = \tau_1$ принадлежит отрезку L (см. рис. 12). За верхний край C_1^+ разреза C_1 принимаем тот край, который соответствует $\tau = \tau_1 + 0$. Точку с координатами x , y обозначаем через z^+ , если она лежит на верхнем крае разреза, и через z^- , если она лежит на нижнем крае разреза. Считаем, что если точки $z^+ = q \operatorname{th} \frac{\sigma + i\tau_1}{2}$ и $\zeta^+ = q \operatorname{th} \frac{\lambda + i\tau_1}{2}$ ($\sigma > \lambda$) приближаются к точке $\sigma = 0$, $\tau = \tau_1$, то $\arg(z^+ - \zeta^+)$ ($\bar{z}^+ + \bar{\zeta}^+$) в пределе равен нулю.

Пусть

$$\zeta = q \operatorname{th} \frac{\kappa}{2} = q \operatorname{th} \frac{\lambda + i\nu}{2},$$

тогда

$$(z - \zeta)(\bar{z} + \bar{\zeta}) = \frac{q^2}{2 \operatorname{ch} \frac{\omega}{2} \operatorname{ch} \frac{\bar{\omega}}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{\kappa}{2}} [\operatorname{ch} \sigma - \operatorname{ch}(\lambda + i(\nu - \tau))], \quad (81)$$

и на C_1^+ , в силу того что в начальной точке $\arg(z - \zeta)(\bar{z} + \bar{\zeta}) = 0$,

$$(z - \zeta)(\bar{z} + \bar{\zeta}) = \frac{q^2}{(\operatorname{ch} \sigma + \cos \tau_1) \operatorname{ch}^2 \frac{\kappa}{2}} (\operatorname{ch} \sigma - \operatorname{ch} \lambda), \quad \kappa = \lambda + i\tau_1.$$

(81')

С помощью (57) теперь получаем интегральное представление (54) на C_1^+ в виде

$$\begin{aligned}\tilde{f}(z^+) &= \tilde{u}(z^+) + i\tilde{v}(z^+) = P(f(z^+)) = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{sh}^{1-k} \sigma S^{\frac{k}{2}}(\sigma, \tau_1) \int_0^\sigma \operatorname{Re} \left\{ f(\xi^+) \operatorname{ch}^{-k} \frac{\kappa}{2} \right\} (\operatorname{ch} \sigma - \operatorname{ch} \lambda)^{\frac{k}{2}-1} d\lambda + \\ &+ i \frac{1}{2} \frac{q^{k+1}}{k} S^{-\frac{k}{2}}(\sigma, \tau_1) \int_0^\sigma \operatorname{Im} \left\{ \frac{df(\xi^+)}{d\xi^+} \operatorname{ch}^{-k-2} \frac{\kappa}{2} \right\} (\operatorname{ch} \sigma - \operatorname{ch} \lambda)^{\frac{k}{2}} d\lambda, \\ S(\sigma, \tau_1) &= \operatorname{ch} \sigma + \cos \tau_1.\end{aligned}\quad (82)$$

Из (56) находим формулу обращения этого интегрального представления

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} \left\{ f(z^+) \operatorname{ch}^{-k} \frac{\omega}{2} \right\} + i \operatorname{Im} \left\{ \frac{df(z^+)}{dz^+} \operatorname{ch}^{-k-2} \frac{\omega}{2} \right\} = \\ = \begin{cases} \mu \frac{d}{d\sigma} \int_0^\sigma \frac{d^m \left(\tilde{u}(\xi^+) \operatorname{sh}^{k-1} \lambda S^{-\frac{k}{2}}(\lambda, \tau_1) + i \frac{2}{q^{k+1}} \frac{d\tilde{v}(\xi^+)}{d\operatorname{ch} \lambda} S^{\frac{k}{2}}(\lambda, \tau_1) \right)}{(d\operatorname{ch} \lambda)^m} \times \\ \times \frac{\operatorname{sh} \lambda d\lambda}{(\operatorname{ch} \sigma - \operatorname{ch} \lambda)^{\frac{k}{2}-m}}, & k \neq 2m, \\ \mu \operatorname{sh} \sigma \frac{d^m \left(\tilde{u}(z^+) \operatorname{sh}^{k-1} \sigma S^{-\frac{k}{2}}(\sigma, \tau_1) + i \frac{2}{q^{k+1}} \frac{d\tilde{v}(z^+)}{d\operatorname{ch} \sigma} S^{\frac{k}{2}}(\sigma, \tau_1) \right)}{(d\operatorname{ch} \sigma)^m}, & k = 2m. \end{cases}\end{aligned}\quad (83)$$

Интегральное представление скачков на C_1 имеет вид

$$\begin{aligned}\tilde{f}(z)^\pm &= \frac{1}{2} \operatorname{sh}^{1-k} \sigma S^{\frac{k}{2}}(\sigma, \tau_1) \int_\alpha^\sigma \operatorname{Re} \left\{ [f(\xi)]^\pm \operatorname{ch}^{-k} \frac{\kappa}{2} e^{-i\pi \left(\frac{k}{2}-1 \right)} \right\} (\operatorname{ch} \lambda - \\ &- \operatorname{ch} \sigma)^{\frac{k}{2}-1} d\lambda + i \frac{q^{k+1}}{2k} S^{-\frac{k}{2}}(\sigma, \tau_1) \int_\alpha^\sigma \operatorname{Im} \left\{ \left[\frac{df(\xi)}{d\xi} \right]^\pm \times \right. \\ &\times \left. \operatorname{ch}^{-k-2} \frac{\kappa}{2} e^{-i\pi \frac{k}{2}} \right\} (\operatorname{ch} \lambda - \operatorname{ch} \sigma)^{\frac{k}{2}} d\lambda,\end{aligned}\quad (82')$$

а формула его обращения —

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \left\{ [f(z)]^{\pm} \operatorname{ch}^{-k} \frac{\omega}{2} e^{-i\pi \left(\frac{k}{2} - 1 \right)} \right\} + i \operatorname{Im} \left\{ \left[\frac{df(z)}{dz} \right]^{\pm} \operatorname{ch}^{-k-2} \frac{\omega}{2} e^{-i\pi \frac{k}{2}} \right\} = \\ & = \begin{cases} (-1)^m \mu \frac{d}{d\sigma} \int_{\alpha}^{\sigma} \frac{d^m}{(d \operatorname{ch} \lambda)^m} \left([\tilde{u}(\zeta)]^{\pm} \operatorname{sh}^{k-1} \lambda S^{-\frac{k}{2}}(\lambda, \tau_1) - i \frac{2}{q^{k+1}} \times \right. \\ \quad \times \left. \frac{d[\tilde{v}(\zeta)]^{\pm} S^{\frac{k}{2}}(\lambda, \tau_1)}{d \operatorname{ch} \lambda} \right) \frac{\operatorname{sh} \lambda d\lambda}{(\operatorname{ch} \lambda - \operatorname{ch} \sigma)^{\frac{k}{2} - m}}, & k \neq 2m, \\ (-1)^m \mu \frac{d^m \left([\tilde{u}(z)]^{\pm} \operatorname{sh}^{k-1} \sigma S^{-\frac{k}{2}}(\sigma, \tau_1) - i \frac{2}{q^{k+1}} \frac{d[\tilde{v}(z)]^{\pm} S^{\frac{k}{2}}(\sigma, \tau_1)}{d \operatorname{ch} \sigma} \right)}{(d \operatorname{ch} \sigma)^m}, & k = 2m. \end{cases} \quad (83') \end{aligned}$$

Пусть теперь разрез C_2 проведен вдоль дуги окружности $\tau = \tau_2 = \text{const}$ ($\tau_2 > \tau_1$) с начальной точкой $\sigma = 0$ и конечной точкой $\sigma = \beta$ ($0 < \beta \leq \infty$), причем точка $\sigma = 0$, $\tau = \tau_2$ принадлежит отрезку L (см. рис. 12). За верхний край разреза C_2 принимаем тот край, который соответствует $\tau = \tau_2 - 0$, нижнему краю соответствует $\tau = \tau_2 + 0$. Считаем, что если точки $z^+ = q \operatorname{th} \frac{\sigma + i\tau_2}{2}$ и $\zeta^+ = q \operatorname{th} \frac{\lambda + i\tau_2}{2}$ ($\sigma > \lambda$) подходят к точке $\sigma = 0$, $\tau = \tau_2$, то $\arg(z^+ - \zeta^+) (\bar{z}^+ + \bar{\zeta}^+)$ в пределе обращается в нуль.

Из последнего предположения следует, что на верхнем крае разреза C_2 выражение $(z - \zeta) (\bar{z} + \bar{\zeta})$ представляется равенством (81') при условии, что τ_1 заменяется на τ_2 , а $\kappa = \lambda + i\tau_1$ на $\kappa = \lambda + i\tau_2$. Поэтому интегральное представление (54) на верхнем крае разреза C_2 и его формулы обращения совпадают соответственно с (82) и (83), если в последних τ_1 заменить на τ_2 , $\omega = \sigma + i\tau_1$ — на $\omega = \sigma + i\tau_2$ и $\kappa = \lambda + i\tau_1$ — на $\kappa = \lambda + i\tau_2$. Интегральное представление скачков на разрезе C_2 и его формула обращения получаются соответственно из (82') и (83'), если в них заменить τ_1 на τ_2 , $\omega = \sigma + i\tau_1$ — на $\omega = \sigma + i\tau_2$, $\kappa = \lambda + i\tau_1$ — на $\kappa = \lambda + i\tau_2$, а множители $e^{-i\pi \left(\frac{k}{2} - 1 \right)}$ и $e^{-i\pi \frac{k}{2}}$ соответственно — на $e^{i\pi \left(\frac{k}{2} - 1 \right)}$ и $e^{i\pi \frac{k}{2}}$.

Легко видеть, что рассмотренные нами интегральные представления вдоль верхнего края разреза C_1 и вдоль верхнего края разреза C_2 определяют одну и ту же x^k -аналитическую функцию, если $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ — аналитическая функция внутри луночки, ограниченной дугами окружностей $\tau = \tau_1$, $-\infty < \sigma < \infty$

и $\tau = \tau_2$, $-\infty < \sigma < \infty$, и в точках, симметричных относительно мнимой оси, принимает сопряженные значения. В этом смысле указанные интегральные представления вдоль верхних краев разрезов C_1 и C_2 можно считать взаимными.

Пусть теперь точка $z_0 = x_0 + iy_0 = q \operatorname{th} \frac{\sigma_0 + i\tau_1}{2}$ (начальная точка контура Γ в интегральном представлении (54)) является левым концом разреза C_3 , идущего из точки z_0 до точки $\sigma = \alpha$, $\tau = \tau_1$ ($\sigma_0 < \alpha_1$). Верхний край C_3^+ разреза C_3 и $\arg(z - \zeta)(\bar{z} + \zeta)$ выбираем так же, как и в случае разреза C_1 . Взяв интегральное представление (54) в виде (57), на C_3^+ получаем

$$\begin{aligned} \tilde{f}(z^+) &= \tilde{u}(z^+) + i\tilde{v}(z^+) = P(f(z^+)) = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{sh}^{1-k} \sigma S^{\frac{k}{2}}(\sigma, \tau_1) \int_{\sigma_0}^{\sigma} \operatorname{Re} \left\{ f(\zeta^+) \operatorname{ch}^{-k} \frac{\kappa}{2} \right\} (\operatorname{ch} \sigma - \operatorname{ch} \lambda)^{\frac{k}{2}-1} d\lambda + \\ &+ i \frac{1}{2} \frac{q^{k+1}}{k} S^{-\frac{k}{2}}(\sigma, \tau_1) \int_{\sigma_0}^{\sigma} \operatorname{Im} \left\{ \frac{df(\zeta^+)}{d\zeta^+} \operatorname{ch}^{-k-2} \frac{\kappa}{2} \right\} (\operatorname{ch} \sigma - \operatorname{ch} \lambda)^{\frac{k}{2}} d\lambda + \\ &+ iC(y), \end{aligned} \quad (84)$$

где

$$C(y) = \frac{q^k}{2} \left(1 - \frac{y}{y_0}\right)^{\frac{k}{2}} \operatorname{Im} \left\{ f(z_0) \operatorname{ch}^{-k} \frac{\sigma_0 + i\tau_1}{2} \right\}.$$

Формула обращения этого интегрального представления на C_3^+ имеет вид

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re} \left\{ f(z^+) \operatorname{ch}^{-k} \frac{\omega}{2} \right\} + i \operatorname{Im} \left\{ \frac{df(z^+)}{dz^+} \operatorname{ch}^{-k-2} \frac{\omega}{2} \right\} = \\ &= \begin{cases} \mu \frac{d}{d\sigma} \int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{d^m}{(d \operatorname{ch} \lambda)^m} \left[\tilde{u}(\zeta^+) \operatorname{ch}^{k-1} \lambda S^{-\frac{k}{2}}(\lambda, \tau_1) + i \frac{2}{q^{k+1}} \times \right. \\ \quad \left. \times \frac{d(\tilde{v}(\zeta^+) - C(\eta)) S^{\frac{k}{2}}(\lambda, \tau_1)}{d \operatorname{ch} \lambda} \right] \frac{\operatorname{sh} \lambda d\lambda}{(\operatorname{ch} \sigma - \operatorname{ch} \lambda)^{\frac{k}{2}-m}}, & k \neq 2m, \\ \mu \frac{d^m}{(d \operatorname{ch} \sigma)^m} \left[\tilde{u}(z^+) \operatorname{sh}^{k-1} \sigma S^{-\frac{k}{2}}(\sigma, \tau_1) + i \frac{2}{q^{k+1}} \times \right. \\ \quad \left. \times \frac{d(\tilde{v}(z^+) - C(y)) S^{\frac{k}{2}}(\sigma, \tau_1)}{d \operatorname{ch} \sigma} \right], & k = 2m. \end{cases} \end{aligned} \quad (85)$$

Интегральное представление скачков вдоль разреза C_3 и формула его обращения такие же, как и в случае разреза C_1 , т. е. совпадают соответственно с (82') и (83').

Допустим, что точка $z_0 = x_0 + iy_0 = q \operatorname{th} \frac{\sigma_0 + i\tau_1}{2}$ (начальная точка контура Γ в интегральном представлении (54)) является правым концом разреза C_4 , идущего из точки z_0 вдоль дуги окружности $\tau = \tau_1$, до точки $\sigma = \alpha$, $\tau = \tau_1$ ($\sigma_0 > \alpha$). За верхний край C_4^+ разреза C_4 принимаем тот край, который соответствует $\tau = \tau_1 + 0$, т. е. как и в случае разреза C_1 . Далее, считаем, что если точки

$$z = q \operatorname{th} \frac{\sigma + i\tau_1}{2} \quad \text{и} \quad \zeta = q \operatorname{th} \frac{\lambda + i\tau_1}{2}, \quad \sigma < \lambda,$$

подходят к точке $\sigma = 0$, $\tau = \tau_1$, в пределе $\arg(z - \zeta)(\bar{z} + \zeta) = -\pi$. Взяв интегральное представление (54) в виде (57), на C_4^+ получаем

$$\begin{aligned} \tilde{f}(z^+) &= \tilde{u}(z^+) + i\tilde{v}(z^+) = P(f(z^+)) = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{sh}^{1-k} \sigma S^{\frac{k}{2}}(\sigma, \tau_1) \int_{\sigma_0}^{\sigma} \operatorname{Re} \left\{ f(\zeta^+) \operatorname{ch}^{-k} \frac{\omega}{2} e^{-i\pi \left(\frac{k}{2}-1\right)} \right\} (\operatorname{ch} \lambda - \\ &\quad - \operatorname{ch} \sigma)^{\frac{k}{2}-1} d\lambda + i \frac{q^{k+1}}{2k} S^{-\frac{k}{2}}(\sigma, \tau_1) \times \\ &\times \int_{\sigma_0}^{\sigma} \operatorname{Im} \left\{ \frac{df(\zeta^+)}{d\zeta^+} \operatorname{ch}^{-k-2} \frac{\omega}{2} e^{-i\pi \frac{k}{2}} \right\} (\operatorname{ch} \lambda - \operatorname{ch} \sigma)^{\frac{k}{2}} d\lambda + iC^*(y), \quad (86) \end{aligned}$$

где $C^*(y) = \frac{q^k}{k} \left(\frac{y}{y_0} - 1 \right)^{\frac{k}{2}} \operatorname{Im} \left\{ f(z_0) \operatorname{ch}^{-k} \frac{\sigma_0 + i\tau_1}{2} \right\}.$

Формула обращения этого интегрального представления на C_4^+ записывается в виде

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re} \left\{ f(z^+) \operatorname{ch}^{-k} \frac{\omega}{2} e^{-i\pi \left(\frac{k}{2}-1\right)} \right\} + i \operatorname{Im} \left\{ \frac{df(z^+)}{dz^+} \operatorname{ch}^{-k-2} \frac{\omega}{2} e^{-i\pi \frac{k}{2}} \right\} = \\ &= \left\{ \begin{aligned} &(-1)^m \mu \frac{d}{d\sigma} \int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{d^m}{(d \operatorname{ch} \lambda)^m} \left[\tilde{u}(\zeta^+) \operatorname{ch}^{k-1} \lambda S^{-\frac{k}{2}}(\lambda, \tau_1) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{q^{k+1}} \frac{d(\tilde{v}(\zeta^+) - C(\eta)) S^{\frac{k}{2}}(\lambda, \tau_1)}{d \operatorname{ch} \lambda} \right] \frac{\operatorname{sh} \lambda d\lambda}{(\operatorname{ch} \lambda - \operatorname{ch} \sigma)^{\frac{k}{2}-m}}, \\ &\quad k \neq 2m, \\ &(-1)^m \mu \operatorname{sh} \sigma \frac{d^m}{(d \operatorname{ch} \sigma)^m} \left[\tilde{u}(z^+) \operatorname{ch}^{k-1} \sigma S^{-\frac{k}{2}}(\sigma, \tau_1) - \right. \\ &\quad \left. - i \frac{2}{q^{k+1}} \frac{d(\tilde{v}(z^+) - C^*(y)) S^{\frac{k}{2}}(\sigma, \tau_1)}{d \operatorname{ch} \sigma} \right], \quad k = 2m. \end{aligned} \right. \quad (87) \end{aligned}$$

Из (86) получаем интегральное представление скачков на разрезе C_4

$$\begin{aligned} \tilde{f}(z)^\pm = & \frac{1}{2} \operatorname{sh}^{1-k} \sigma S^{\frac{k}{2}}(\sigma, \tau_1) \int_{\alpha}^{\sigma} \operatorname{Re} \left\{ [f(\zeta)]^\pm \operatorname{ch}^{-k} \frac{\kappa}{2} \right\} (\operatorname{ch} \sigma - \\ & - \operatorname{ch} \lambda)^{\frac{k}{2}-1} d\lambda + i \frac{q^{k+1}}{2k} S^{-\frac{k}{2}}(\sigma, \tau_1) \int_{\alpha}^{\sigma} \operatorname{Im} \left\{ \left[\frac{df(\zeta)}{d\zeta} \right]^\pm \operatorname{ch}^{-k-2} \frac{\kappa}{2} \right\} \times \\ & \times (\operatorname{ch} \sigma - \operatorname{ch} \lambda)^{\frac{k}{2}} d\lambda. \end{aligned} \quad (86')$$

Формула его обращения имеет вид

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \left\{ [f(z)]^\pm \operatorname{ch}^{-k} \frac{\omega}{2} \right\} + i \operatorname{Im} \left\{ \left[\frac{df(z)}{dz} \right]^\pm \operatorname{ch}^{-k-2} \frac{\omega}{2} \right\} = \\ = & \begin{cases} \mu \frac{d}{d\sigma} \int_{\alpha}^{\sigma} \frac{d^m}{(d \operatorname{ch} \lambda)^m} \left([u(\zeta)]^\pm \operatorname{sh}^{k-1} \lambda S^{-\frac{k}{2}}(\lambda, \tau_1) + \right. \\ \left. + i \frac{2}{q^{k+1}} \frac{d[\tilde{v}(\zeta)]^\pm S^{\frac{k}{2}}(\lambda, \tau_1)}{d \operatorname{ch} \lambda} \right) \frac{\operatorname{sh} \lambda d\lambda}{(\operatorname{ch} \sigma - \operatorname{ch} \lambda)^{\frac{k}{2}-m}}, & k \neq 2m, \\ \mu \frac{d^m}{(d \operatorname{ch} \sigma)^m} \left([u(z)]^\pm \operatorname{sh}^{k-1} \sigma S^{-\frac{k}{2}}(\sigma, \tau_1) + \right. \\ \left. + i \frac{2}{q^{k+1}} \frac{d[\tilde{v}(z)]^\pm S^{\frac{k}{2}}(\sigma, \tau_1)}{d \operatorname{ch} \sigma} \right), & k = 2m. \end{cases} \end{aligned} \quad (87')$$

Допустим, что имеется разрез C_3 , идущий из точки $z_0 = x_0 + iy_0 = q \operatorname{th} \frac{\sigma_0 + i\tau_2}{2}$ до точки $\sigma = \alpha$, $\tau = \tau_2$ ($\sigma_0 < \alpha$), а верхний край разреза C_3 и $\arg(z - \zeta)$ ($\bar{z} + \zeta$) выбираются так же, как и в случае разреза C_2 . Интегральное представление (54) вдоль верхнего края разреза C_3 и формула его обращения такие же, как и в случае разреза C_2 , и получаются из (84) и (85) заменой τ_1 на τ_2 , $\omega = \sigma + i\tau_1$ — на $\omega = \sigma + i\tau_2$ и $\kappa = \lambda + i\tau_1$ — на $\kappa = \lambda + i\tau_2$. Интегральное представление скачков на разрезе C_3 и его формула обращения такие же, как и в случае разреза C_2 , и получаются из соответствующих равенств (82') и (83') для разреза C_1 заменой в них τ_1 на τ_2 , $\omega = \sigma + i\tau_1$ — на $\omega = \sigma + i\tau_2$, $\kappa = \lambda + i\tau_1$ — на $\kappa = \lambda + i\tau_2$ и множителей $e^{-i\pi(\frac{k}{2}-1)}$ и $e^{-i\pi\frac{k}{2}}$ — соответственно на $e^{i\pi(\frac{k}{2}-1)}$ и $e^{i\pi\frac{k}{2}}$.

Допустим, что точка $z_0 + iy_0 = q \operatorname{th} \frac{\sigma_0 + i\tau_2}{2}$ является правым концом разреза C'_4 , идущего из точки z_0 вдоль окружности $\tau = \tau_2$ до точки $\sigma = \alpha$ ($\alpha < \sigma_0$). Верхний край разреза C'_4 и $\arg(z - \zeta)$ ($z + \zeta$) выбираем так же, как и в случае разреза C_2 . Интегральное представление (54) вдоль верхнего края разреза C'_4 и формула его обращения, а также интегральное представление скачков и формула его обращения получаются из соответствующих формул для разреза C_4 заменой в них τ_1 на τ_2 , $\omega = \sigma + i\tau_1$ — на $\omega = \sigma + i\tau_2$, $\kappa = \lambda + i\tau_1$ — на $\kappa = \lambda + i\tau_2$ и множителей $e^{-i\pi\left(\frac{\kappa}{2} - 1\right)}$ и $e^{-i\pi\frac{\kappa}{2}}$ — соответственно на $e^{i\pi\left(\frac{\kappa}{2} - 1\right)}$ и $e^{i\pi\frac{\kappa}{2}}$.

Предельные значения и формулы обращения в видоизмененных биполярных координатах

Введем видоизмененные биполярные координаты σ и τ при помощи равенств

$$z = iq \operatorname{cth} \frac{\omega}{2}, \quad z = x + iy, \quad \omega = \sigma + i\tau \quad (88)$$

или

$$x = \frac{q \sin \tau}{\operatorname{ch} \sigma - \cos \tau}, \quad y = \frac{q \operatorname{sh} \sigma}{\operatorname{ch} \sigma - \cos \tau}, \quad -\infty < \sigma < \infty, \quad -\pi \leq \tau \leq \pi, \quad (88')$$

где q — положительное число. Линиям $\tau = \operatorname{const}$, $-\infty < \sigma < \infty$ соответствуют дуги окружностей с начальной точкой $-iq$ и конеч-

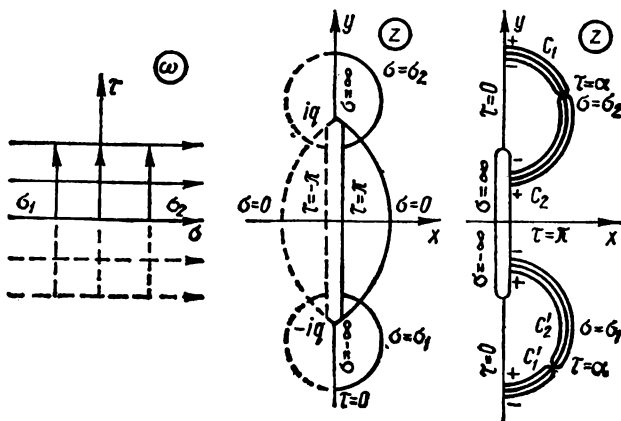


Рис. 13.

ной точкой iq , линиям $\sigma = \operatorname{const}$, $-\pi < \tau < \pi$ — окружности, ортогональные указанным дугам окружностей (рис. 13). Уравнения дуг окружностей $\tau = \operatorname{const}$ и окружностей $\sigma = \operatorname{const}$ соответственно

имеют вид

$$(x - q \operatorname{ctg} \tau)^2 + y^2 = \frac{q^2}{\sin^2 \tau}, \quad x^2 + (y - q \operatorname{cth} \sigma)^2 = \frac{q^2}{\operatorname{sh}^2 \sigma},$$

причем при $\sigma = \operatorname{const} > 0$ получаем окружности в верхней полуплоскости $z = x + iy$, при $\sigma = \operatorname{const} < 0$ — в нижней полуплоскости $z = x + iy$.

Возьмем за основу полуокружность $\sigma = \operatorname{const} = \sigma_2 > 0$, лежащую в правой верхней четверти плоскости $z = x + iy$ (см. рис. 13). Пусть C_1 — разрез вдоль дуги окружности $\sigma = \sigma_2$ с начальной точкой $\tau = 0$ и конечной точкой $\tau = \alpha$ ($0 \leq \alpha \leq \pi$), причем точка $\sigma = \sigma_2, \tau = 0$ принадлежит отрезку L . За верхний край C_1^+ разреза C_1 принимаем тот край, который соответствует $\sigma = \sigma_2 - 0$. Точку с координатами x, y обозначаем через z^+ , если она лежит на C_1^+ , и через z^- , если она лежит на C_1^- . Считаем, что если точки $z^+ = i q \operatorname{cth} \frac{\sigma_2 + i\tau}{2}$ и $\zeta^+ = i q \operatorname{cth} \frac{\sigma_2 + i\nu}{2}$ ($\nu < \tau$) приближаются к точке $\sigma = \sigma_2, \tau = 0$, то $\arg(z^+ - \zeta^+)$ ($\bar{z}^+ + \zeta^+$) в пределе равен нулю.

Пусть $\zeta = i q \operatorname{cth} \frac{\kappa}{2} = i q \operatorname{cth} \frac{\lambda + i\nu}{2}$. Находим

$$(z - \zeta)(\bar{z} + \zeta) = \frac{q^2}{(\operatorname{ch} \sigma - \cos \tau) \operatorname{sh}^2 \frac{\kappa}{2}} [\operatorname{ch}(\lambda - \sigma + i\nu) - \operatorname{ch} i\tau], \quad (89)$$

и в частности на C_1^+ —

$$(z - \zeta)(\bar{z} + \zeta) = \frac{q^2}{(\operatorname{ch} \sigma_2 - \cos \tau) \operatorname{sh}^2 \frac{\kappa}{2}} (\cos \nu - \cos \tau). \quad (89')$$

В силу этого интегральное представление (54), взятое в виде (57), на C_1^+ записывается таким образом:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(z^+) &= \tilde{u}(z^+) + i\tilde{v}(z^+) = P(f(z^+)) = \\ &= \frac{1}{2} \sin^{1-k} \tau (\operatorname{ch} \sigma_2 - \cos \tau)^{\frac{k}{2}} \int_0^\tau \operatorname{Re} \left\{ f(\zeta^+) \operatorname{sh}^{-k} \frac{\kappa}{2} \right\} (\cos \nu - \\ &- \cos \tau)^{\frac{k}{2}-1} d\nu + i \frac{q^{k+1}}{2k} (\operatorname{ch} \sigma_2 - \cos \tau)^{-\frac{k}{2}} \int_0^\tau \operatorname{Im} \left\{ \frac{df(\zeta^+)}{d\zeta^+} \operatorname{sh}^{-k-2} \frac{\kappa}{2} \right\} \times \\ &\times (\cos \nu - \cos \tau)^{\frac{k}{2}} d\nu, \end{aligned} \quad (90)$$

а формула обращения этого интегрального представления на C_1^+ —

$$\operatorname{Re} \left\{ f(z^+) \operatorname{sh}^{-k} \frac{\omega}{2} \right\} + i \operatorname{Im} \left\{ \frac{df(z^+)}{dz^+} \operatorname{sh}^{-k-2} \frac{\omega}{2} \right\} =$$

$$= \begin{cases} (-1)^m \mu \frac{d}{d\tau} \int_0^\tau \frac{d^m}{(d \cos v)^m} \left[\tilde{u}(\xi^+) \sin^{k-1} v T^{-\frac{k}{2}}(\sigma_2, v) - \right. \\ \left. - i \frac{2}{q^{k+1}} \frac{d\tilde{v}(\xi^+) T^{\frac{k}{2}}(\sigma_2, v)}{d \cos v} \right] \frac{\sin v dv}{(\cos v - \cos \tau)^{\frac{k}{2}-m}}, & k \neq 2m, \\ (-1)^m \mu \sin \tau \frac{d^m}{(d \cos \tau)^m} \left[\tilde{u}(z^+) \sin^{k-1} \tau T^{-\frac{k}{2}}(\sigma_2, \tau) - \right. \\ \left. - i \frac{2}{q^{k+1}} \frac{d\tilde{v}(z^+) T^{\frac{k}{2}}(\sigma_2, \tau)}{d \cos \tau} \right], & k = 2m, \\ T(\sigma_2, \tau) = \operatorname{ch} \sigma_2 - \cos \tau. \end{cases} \quad (91)$$

Интегральное представление скачков вдоль разреза C_1 имеет вид

$$[f(z)]^\pm = \frac{1}{2} \sin^{1-k} \tau T^{\frac{k}{2}}(\sigma_2, \tau) \int_\alpha^\tau \operatorname{Re} \left\{ [f(\xi)]^\pm \operatorname{sh}^{-k} \frac{\kappa}{2} e^{i\pi \left(\frac{k}{2}-1\right)} \right\} (\cos \tau - \cos v)^{\frac{k}{2}-1} dv + i \frac{q^{k+1}}{2} T^{-\frac{k}{2}}(\sigma_2, \tau) \int_\alpha^\tau \operatorname{Im} \left\{ \left[\frac{df(\xi)}{d\xi} \right]^\pm \times \right. \\ \left. \times \operatorname{sh}^{-k-2} \frac{\kappa}{2} e^{i\pi \frac{k}{2}} \right\} (\cos \tau - \cos v)^{\frac{k}{2}} dv, \quad (90')$$

а формула его обращения вдоль контура C_1 —

$$\operatorname{Re} \left\{ [f(z)]^\pm \operatorname{sh}^{-k} \frac{\omega}{2} e^{i\pi \left(\frac{k}{2}-1\right)} \right\} + i \operatorname{Im} \left\{ \left[\frac{df(z)}{dz} \right]^\pm \operatorname{sh}^{-k-2} \frac{\omega}{2} e^{i\pi \frac{k}{2}} \right\} = \\ = \begin{cases} -\mu \frac{d}{d\tau} \int_\alpha^\tau \frac{d^m}{(d \cos v)^m} \left([\tilde{u}(\xi)]^\pm \sin^{k-1} v T^{-\frac{k}{2}}(\sigma_2, v) + \right. \\ \left. + i \frac{2}{q^{k+1}} \frac{d[\tilde{v}(\xi)]^\pm T^{\frac{k}{2}}(\sigma_2, v)}{d \cos v} \right) \frac{\sin v dv}{(\cos \tau - \cos v)^{\frac{k}{2}-m}}, & k \neq 2m, \\ -\mu \sin \tau \frac{d^m}{(d \cos \tau)^m} \left([\tilde{u}(z)]^\pm \sin^{k-1} \tau T^{-\frac{k}{2}}(\sigma_2, \tau) + \right. \\ \left. + i \frac{2}{q^{k+1}} \frac{d[\tilde{v}(z)]^\pm T^{\frac{k}{2}}(\sigma_2, \tau)}{d \cos \tau} \right), & k = 2m. \end{cases} \quad (91')$$

Заметим, что если в равенствах (90) — (91') вместо σ_2 подставить $\sigma_1 < 0$, то они будут иметь тот же смысл, но применительно к

разрезу C_1 в нижней полуплоскости $z = x + iy$, идущему вдоль окружности $\sigma = \sigma_1$ от точки $\sigma = \sigma_1, \tau = 0$, принадлежащей отрезку L , до точки $\sigma = \sigma_1, \tau = \alpha$. При этом в качестве верхнего края разреза C_1 принимается тот край, который соответствует $\sigma = \sigma_1 - 0$; $\arg(z^+ - \zeta^+)(\bar{z}^+ + \bar{\zeta}^+)$ считается в пределе равным нулю, когда точки z^+ и ζ^+ ($v < \tau$) подходят к точке $\sigma = \sigma_1, \tau = 0$.

Пусть C_2 — разрез вдоль окружности $\sigma = \sigma_2$, соединяющий точку $\sigma = \sigma_2, \tau = \pi$ с точкой $\sigma = \sigma_2, \tau = \alpha$. В качестве верхнего края C_2^+ разреза C_2 принимаем тот край, который соответствует $\sigma = \sigma_2 - 0$ (т. е. как и в случае разреза C_1). Считаем, что если точки z^+ и ζ^+ ($v < \tau$) подходят к точке $\sigma = \sigma_2, \tau = \pi$, то $\arg(z^+ - \zeta^+)(\bar{z}^+ + \bar{\zeta}^+)$ в пределе равен $-\pi$. В силу (89) это означает, что на C_2^+ (при $v < \tau$)

$$(z - \zeta)(\bar{z} + \bar{\zeta}) = \frac{q^2}{\operatorname{ch} \sigma_2 - \cos \tau} e^{-i\pi} \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \frac{\kappa}{2}} (\cos \tau - \cos v). \quad (89'')$$

Подставляя (89'') в (57), приходим к выводу, что интегральное представление (54) на C_2^+ имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{f}(z^+) &= \tilde{u}(z^+) + i\tilde{v}(z^+) = P(f(z^+)) = \\ &= \frac{1}{2} \sin^{1-k} \tau T^{\frac{k}{2}}(\sigma_2, \tau) \int_{\pi}^{\tau} \operatorname{Re} \left\{ f(\zeta^+) \operatorname{sh}^{-k} \frac{\kappa}{2} e^{-i\pi \left(\frac{k}{2} - 1\right)} \right\} (\cos \tau - \\ &- \cos v)^{\frac{k}{2} - 1} dv + i \frac{q^{k+1}}{2k} T^{-\frac{k}{2}}(\sigma_2, \tau) \int_{\pi}^{\tau} \operatorname{Im} \left\{ \frac{df(\zeta^+)}{d\zeta^+} \operatorname{sh}^{-k-2} \frac{\kappa}{2} e^{-i\pi \frac{k}{2}} \right\} \times \\ &\times (\cos \tau - \cos v)^{\frac{k}{2}} dv, \end{aligned} \quad (92)$$

а формула его обращения на C_2^+ —

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re} \left\{ f(z^+) \operatorname{sh}^{-k} \frac{\omega}{2} e^{-i\pi \left(\frac{k}{2} - 1\right)} \right\} + i \operatorname{Im} \left\{ \frac{df(z^+)}{dz^+} \operatorname{sh}^{-k-2} \frac{\omega}{2} e^{-i\pi \frac{k}{2}} \right\} = \\ &= \begin{cases} \left[-\mu \frac{d}{d\tau} \int_{\pi}^{\tau} \frac{d^m}{(d \cos v)^m} \left[\tilde{u}(\zeta^+) \sin^{k-1} v T^{-\frac{k}{2}}(\sigma_2, v) + \right. \right. \\ \left. \left. + i \frac{2}{q^{k+1}} \frac{d\tilde{v}(\zeta^+) T^{\frac{k}{2}}(\sigma_2, v)}{d \cos v} \right] \frac{\sin v dv}{(\cos \tau - \cos v)^{\frac{k}{2} - m}}, \right. & k \neq 2m, \\ \left. \left[-\mu \sin \tau \frac{d^m}{(d \cos \tau)^m} \left[\tilde{u}(z^+) \sin^{k-1} \tau T^{-\frac{k}{2}}(\sigma_2, \tau) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + i \frac{2}{q^{k+1}} \frac{d\tilde{v}(z^+) T^{\frac{k}{2}}(\sigma_2, \tau)}{d \cos \tau} \right] \right], & k = 2m. \end{cases} \quad (93) \end{aligned}$$

Из (92) получаем интегральное представление скачков на разрезе C_2

$$\begin{aligned} [\tilde{f}(z)]^\pm = & \frac{1}{2} \sin^{1-k} \tau T^{\frac{k}{2}} (\sigma_2, \tau) \int_{\alpha}^{\tau} \operatorname{Re} \left\{ [f(\zeta)]^\pm \operatorname{sh}^{-k} \frac{\kappa}{2} \right\} (\cos \tau - \\ & - \cos v)^{\frac{k}{2}-1} dv + i \frac{q^{k+1}}{2k} T^{-\frac{k}{2}} (\sigma_2, \tau) \int_{\alpha}^{\tau} \operatorname{Im} \left\{ \left[\frac{df(\zeta)}{d\zeta} \right]^\pm \operatorname{sh}^{-k-2} \frac{\kappa}{2} \right\} \times \\ & \times (\cos \tau - \cos v)^{\frac{k}{2}} dv. \end{aligned} \quad (92')$$

Формула обращения в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ [f(z)]^\pm \operatorname{sh}^{-k} \frac{\omega}{2} \right\} + i \operatorname{Im} \left\{ \left[\frac{df(z)}{dz} \right]^\pm \operatorname{sh}^{-k-2} \frac{\omega}{2} \right\} = \\ = \begin{cases} -\mu \frac{d}{d\tau} \int_{\alpha}^{\tau} \frac{d^m}{(d \cos v)^m} \left([\tilde{u}(\zeta)]^\pm \sin^{k-1} v T^{-\frac{k}{2}} (\sigma_2, v) + \right. \\ \left. + i \frac{2}{q^{k+1}} \frac{d[\tilde{v}(\zeta)]^\pm T^{\frac{k}{2}} (\sigma_2, v)}{d \cos v} \frac{\sin v dv}{(\cos \tau - \cos v)^{\frac{k}{2}-m}}, \quad k \neq 2m, \right. \\ \left. -\mu \sin \tau \frac{d^m}{(d \cos \tau)^m} \left([\tilde{u}(\zeta)]^\pm \sin^{k-1} \tau T^{-\frac{k}{2}} (\sigma_2, \tau) + \right. \right. \\ \left. \left. + i \frac{2}{q^{k+1}} \frac{d[\tilde{v}(\zeta)]^\pm T^{\frac{k}{2}} (\sigma_2, \tau)}{d \cos \tau} \right), \quad k = 2m. \right. \end{cases} \quad (93') \end{aligned}$$

Если в равенствах (92) — (93') вместо σ_2 подставить $\sigma_1 < 0$, то они будут иметь тот же смысл, но применительно к разрезу C_2 в нижней полуплоскости $z = x + iy$, идущему вдоль окружности $\sigma = \sigma_1$ от точки $\sigma = \sigma_1, \tau = \pi$, принадлежащей отрезку L , до точки $\sigma = \sigma_1, \tau = \alpha$. При этом за верхний край разреза C_2 принимается тот край, который соответствует $\sigma = \sigma_1 + 0$ (см. рис. 13), $\arg(z^+ - \zeta^+) (\bar{z}^+ + \zeta^+)$ считается в пределе равным $-\pi$, когда точки $z^+, \zeta^+ (v > \tau)$ подходят к точке $\sigma = \sigma_1, \tau = \pi$.

Интегральное представление (92) вдоль верхнего края разреза C_2 является взаимным по отношению к интегральному представлению (90) вдоль верхнего края разреза C_1 . Оба эти представления определяют одну и ту же x^k -аналитическую функцию, если $f(z) = u(x, y) + v(x, y)$ является аналитической функцией в области, ограниченной полуокружностью $\sigma = \sigma_2, 0 < \tau < \pi$ и частью мнимой оси, проходящей через бесконечно удаленную точку, причем на этой части мнимой оси $v = 0$ и при подходе к бесконечности $|f(z)| = O(|z|^{-k-\varepsilon})$ ($\varepsilon = \text{const} > 0$), т. е. $f(z) \in M_1$.

Аналогично взаимными являются интегральные представления вдоль верхнего края разреза C_1' и вдоль верхнего края разреза C_2 . Они определяют одну и ту же x^k -аналитическую функцию, если $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ — аналитическая функция в полукруге, ограниченном полуокружностью $\sigma = \sigma_1$, $0 < \tau < \pi$ и мнимой осью, и если на отрезке мнимой оси, входящей в границу полукруга, $v = 0$.

Пусть теперь точка $z_0 = x_0 + iy_0 = iq \operatorname{cth} \frac{\sigma_2 + i\tau_0}{2}$ (начальная точка контура Γ в интегральном представлении (54)) является левым концом разреза C_3 в верхней полуплоскости $z = x + iy$, идущего вдоль окружности $\sigma = \sigma_2$ от точки z_0 до точки $\sigma = \sigma_2$, $\tau = \alpha$ ($\tau_0 < \alpha$). Считаем, что верхний край разреза C_3 и $\arg(z^+ - \zeta^+) \times \times (\bar{z}^+ + \bar{\zeta}^+)$ выбираются так же, как и в случае разреза C_1 . Интегральное представление вдоль верхнего края разреза C_3 и формула его обращения получаются из соответствующих равенств для разреза C_1 (90), (91') при условии, что в интеграле в качестве нижнего предела вместо нуля подставляется τ_0 и величина $\tilde{v}(x, y)$ заменяется величиной $\tilde{v}(x, y) - C(y)$, где

$$C(y) = \frac{q^k}{k} \left(1 - \frac{y}{y_0}\right)^{\frac{k}{2}} \operatorname{Im} \left\{ f(z_0) \operatorname{sh}^{-k} \frac{\sigma_2 + i\tau_0}{2} \right\}.$$

Интегральное представление скачков вдоль разреза C_3 и формула его обращения точно такие же, как и в случае разреза C_1 , т. е. совпадают с равенствами (90'), (91').

Для разреза C_3 вдоль дуги окружности $\sigma = \sigma_1$, левым концом которого является точка

$$z_0 = x_0 + iy_0 = iq \operatorname{cth} \frac{\sigma_1 + i\tau_0}{2},$$

а правым — точка $\sigma = \sigma_1$, $\tau = \alpha$ ($\tau_0 < \alpha$), все формулы получаются точно так же, как и в случае разреза C_3 при условии, что вместо σ_2 подставляется $\sigma_1 < 0$. При этом выбор верхнего края разреза C_3 и $\arg(z^+ - \zeta^+) (\bar{z}^+ + \bar{\zeta}^+)$ предполагается таким же, как и в случае разреза C_1 .

Наконец, рассмотрим случай, когда точка $z_0 = x_0 + iy_0 = iq \operatorname{cth} \frac{\sigma_2 + i\tau_0}{2}$ является правым концом разреза C_4 вдоль дуги окружности $\sigma = \sigma_2$, соединяющего точку z_0 с точкой $\sigma = \sigma_2$, $\tau = \alpha$ ($\tau_0 > \alpha$). Верхний край разреза C_4 и $\arg(z^+ - \zeta^+) (\bar{z}^+ + \bar{\zeta}^+)$ выбираем так же, как и в случае разреза C_2 . Интегральное представление вдоль верхнего края разреза C_4 и формула его обращения получаются из соответствующих формул для разреза C_2 (92), (93) при замене в них нижнего предела интегрирования π на τ_0 и вели-

чины $\tilde{v}(x, y)$ на $\tilde{v}(x, y) - C^*(y)$, где

$$C^*(y) = \frac{q^k}{k} \left(\frac{y}{y_0} - 1 \right)^{\frac{k}{2}} \operatorname{Im} \left\{ f(z_0) \operatorname{sh}^{-k} \frac{\sigma_1 + i\tau_0}{2} e^{-i\pi \frac{k}{2}} \right\}.$$

Интегральное представление скачков на разрезе C_4 и формула его обращения такие же, как и в случае разреза C_2 , т. е. совпадают с равенствами (92'), (93').

Для разреза C_4 вдоль дуги окружности $\sigma = \sigma_1$, правым концом которого является точка $z_0 = x_0 + iy_0 = iq \operatorname{cth} \frac{\sigma_1 + i\tau_0}{2}$, а левым — точка $\sigma = \sigma_1$, $\tau = \alpha$ ($\tau_0 > \alpha$), все формулы получаются точно так же, как и для разреза C_4 , только вместо σ_2 подставляется $\sigma_1 < 0$. При этом выбор верхнего края разреза C_4 и $\arg(z^+ - \zeta^+)$ ($\bar{z}^+ + \zeta^+$) предполагается таким же, как и в случае разреза C_2 .

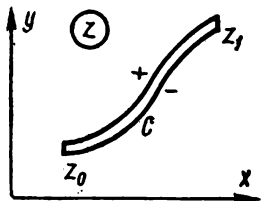


Рис. 14.

Пусть теперь C — какая-либо разомкнутая (для определенности гладкая) кривая, лежащая вместе со своими концами в правой полуплоскости $z = x + iy$, z_0 и z_1 — ее начальная и конечная точки. Проведем вдоль C разрез и условимся в качестве верхнего края C^+ разреза C принимать тот край, для которого при обходе разреза C от точки z_0 до точки z_1 ограниченная им область остается слева (рис. 14). Пусть $\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y) - x^k$ -аналитическая функция, представимая в виде

$$\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y) = P(f(z)), \quad (94)$$

где $P(f(z))$ — оператор (54), $f(z)$ — аналитическая функция в окрестности разреза C . Тогда можем написать

$$\begin{aligned} -[\tilde{f}(z)]^\pm &= \operatorname{Re} \int_z^{z_1} \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right)^{1-k} [f(\zeta)]^\pm (z - \zeta)^{\frac{k}{2}-1} (\bar{z} + \zeta)^{\frac{k}{2}-1} d\zeta + \\ &+ i \operatorname{Im} \int_z^{z_1} [f(\zeta)]^\pm \left(\zeta - \frac{z - \bar{z}}{2} \right) (z - \zeta)^{\frac{k}{2}-1} (\bar{z} + \zeta)^{\frac{k}{2}-1} d\zeta, \end{aligned} \quad (95)$$

где интеграл от z до z_1 берется вдоль кривой C . Таким образом, для скачков x^k -аналитической функции $f(z)$, определенной равенством (94), на разрезе C справедливо равенство

$$[\tilde{f}(z)]^\pm = P([f(z)]^\pm), \quad (96)$$

где $P(f(z))$ — оператор, определенный равенством (54), в котором контур Γ совпадает с частью кривой C от точки z_1 до точки z .

§ 4. РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ p -АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С ХАРАКТЕРИСТИКОЙ $p = x^k$

В предыдущем параграфе установлены формулы обращения основного интегрального представления p -аналитических функций комплексного переменного $z = x + iy$ с характеристикой $p = x^k$ в декартовых, полярных, биполярных и видоизмененных биполярных координатах.

В настоящем параграфе в соответствии с работой [16] дана постановка краевых задач p -аналитических функций с характеристикой $p = x^k$ и применение указанных выше формул обращения к решению этих задач в замкнутом виде. В частности, при $k = 1$ получаются решения в квадратурах соответствующих краевых задач теории осесимметричного потенциала. Среди последних имеются такие задачи, решение которых в замкнутом виде до настоящего времени не было известно.

Решение краевых задач в декартовых координатах

Пусть в дальнейшем $\tilde{\Phi}(x)$ и $\tilde{\Phi}_1(x)$ — заданные достаточное число раз непрерывно дифференцируемые функции от x при $0 \leq x < \infty$, $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ — заданные вещественные постоянные, $\alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0$, $\alpha_2^2 + \beta_2^2 \neq 0$.

Задача 1. Пусть g — правая верхняя четверть плоскости: $x > 0$, $y > 0$. Требуется найти функцию $\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y)$, x^k -аналитическую в g , непрерывную на границе g , за исключением, может быть, точки $(0, 0)$, и удовлетворяющую краевым условиям

$$\tilde{u}|_{y=0} = \tilde{\Phi}(x), \quad 0 \leq x < \infty, \quad (97)$$

$$\tilde{v}|_{x=0} = 0, \quad 0 \leq y < \infty, \quad (98)$$

а при $z \rightarrow \infty$ — дополнительному условию

$$\tilde{f}(z) = o(|z|^k), \quad z \in g. \quad (99)$$

В соответствии с (54) и (58) ищем решение задачи в виде

$$\tilde{f}(z) = \int_0^x [x^{1-k}u(\xi, y) + i\xi v(\xi, y)] (x^2 - \xi^2)^{\frac{k}{2}-1} d\xi, \quad (100)$$

где $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ — функция, аналитическая в g , $v|_{x=0} = 0$. Из формулы обращения (59) при $0 \leq x < \infty$ получаем

$$u(x, 0) = \begin{cases} \mu \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{d^m \tilde{\Phi}(\xi) \xi^{k-1}}{(d\xi^2)^m} \frac{\xi d\xi}{(x^2 - \xi^2)^{\frac{k}{2}-m}}, & k \neq 2m, \\ \mu x \frac{d^m \tilde{\Phi}(x) x^{k-1}}{(dx^2)^m}, & k = 2m. \end{cases} \quad (101)$$

Положим $u(-x, 0) = u(x, 0)$ и будем считать, что функция $u(x, 0)$ на всей оси x правильно непрерывна и в окрестности бесконечно удаленной точки удовлетворяет условию $H(\gamma)$, т. е.

$$|u(x_2) - u(x_1)| \leq A \left| \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \right|^\gamma, \quad A = \text{const} > 0, \quad \gamma = \text{const} > 0,$$

при достаточно больших $|x_1|$ и $|x_2|$. Тогда, учитывая, что $v(0, \infty) = 0$, по формуле Шварца (40') получаем

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t, 0) - a}{t - z} dt + a, \quad (102)$$

где $a = u(\infty, 0)$. Подставляя (102) в (100) и учитывая, что $\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ y > 0}} f(z) = a$ [84, 86], убеждаемся, что функция $\tilde{f}(z)$, определенная равенством (100), удовлетворяет условию (99)⁴. Таким образом, решение задачи 1 (непрерывное в точке $z = 0$) записывается в виде равенства (100), где $f(z)$ — аналитическая функция, определенная равенством (102), т. е.

$$\begin{aligned} \tilde{f}(z) &= \tilde{u}(x, y) + i \tilde{v}(x, y) = \\ &= b + \int_0^x (x^2 - \xi^2)^{\frac{k}{2}-1} \left[x^{1-k} \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^*(t, 0) dt}{t - \xi} + \right. \\ &\quad \left. + i \xi \operatorname{Im} \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^*(t, 0) dt}{t - \xi} \right] d\xi, \end{aligned}$$

где

$$\xi = \xi + iy, \quad u^*(t, 0) = u(t, 0) - a, \quad b = a \frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{k}{2} + \frac{1}{2}\right)}.$$

Если порядок интегрирования по ξ и по t можно изменить, последнее равенство принимает вид

$$\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i \tilde{v}(x, y) =$$

⁴ В самом деле,

$$\tilde{u}(x, y) = \int_0^1 u(x\beta, y) (1 - \beta^2)^{\frac{k}{2}-1} d\beta = O(1),$$

$$\tilde{v}(x, y) = x^k \int_0^1 \beta v(x\beta, y) (1 - \beta^2)^{\frac{k}{2}-1} d\beta = o(|z|^k), \quad |\tilde{f}(z)| = o(|z|^k).$$

Заметим, что в силу этих равенств при постановке задачи 1 условие (99) можно заменить условиями $\tilde{u}(x, y) = O(1)$, $\tilde{v}(x, y) = o(|z|^k)$ при $z \rightarrow \infty$.

$$= b + \int_{-\infty}^{\infty} u^*(t, 0) \left[x^{1-k} \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_{-x}^x \frac{(x^2 - \xi^2)^{\frac{k}{2}-1}}{t - iy - \xi} d\xi + \right. \\ \left. + i \operatorname{Im} \frac{1}{2\pi i} \int_{-x}^x \frac{\xi (x^2 - \xi^2)^{\frac{k}{2}-1}}{t - iy - \xi} d\xi \right] dt,$$

и в частности при $k = 1$

$$\hat{f}(z) = \hat{u}(x, y) + i\hat{v}(x, y) = a \frac{\pi}{2} + \int_0^{\infty} \left[\operatorname{Re} \frac{1}{\sqrt{x^2 - (t - iy)^2}} + \right. \\ \left. + i \operatorname{Im} \left(\frac{t - iy}{\sqrt{x^2 - (t - iy)^2}} + i \right) \right] (u(t, 0) - a) dt,$$

где в соответствии с формулой (101)

$$u(t, 0) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\tilde{\Phi}(\lambda) \lambda d\lambda}{\sqrt{t^2 - \lambda^2}}, \quad a = \lim_{t \rightarrow \infty} u(t, 0).$$

Задача 1'. Условия такие же, как и в задаче 1, только (97) заменяется краевым условием

$$\tilde{v}|_{y=0} = \tilde{\Phi}(x) x^{k-1}, \quad 0 \leq x < \infty. \quad (97')$$

Здесь $xv(x, 0)$ при $0 \leq x < \infty$, в силу (114), определяется правой частью равенства (101). Положим $v(-x, 0) = -v(x, 0)$ и будем считать, что $v(x, 0)$ на всей оси и в окрестности бесконечно удаленной точки удовлетворяет условию $H(\gamma)$. Тогда легко получить

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(t, 0)}{t - z} dt + a, \quad (102')$$

где a — произвольная вещественная постоянная. Решение задачи 1' (непрерывное при $z = 0$) записывается в виде равенства (100), где $f(z)$ — функция, определенная равенством (102').

Задача 1''. Условия такие же, как и в задаче 1, только (97) заменяется краевым условием

$$(\alpha_1 x^{k-1} \tilde{u} - \beta_1 \tilde{v})_{y=0} = \tilde{\Phi}(x) x^{k-1}, \quad 0 \leq x < \infty, \quad (97'')$$

а условие (99) — условием, заключающимся в том, что $\tilde{f}(z)$ при подходе к бесконечности имеет тот или иной порядок роста.

Берем искомое решение задачи в виде (100). В силу (59) значения $(\alpha_1 u - \beta_1 xv)_{y=0}$ при $0 \leq x < \infty$ определяются правой частью равенства (101). На основании краевого условия (98) $v(-x, 0) = -v(x, 0)$, $u(-x, 0) = u(x, 0)$. Таким образом, приходим к задаче Римана — Гильберта для верхней полуплоскости $z = x + iy$

при краевом условии

$$(\alpha_1 u - \beta_1 x v)_{y=0} = \Phi(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (103)$$

где $\Phi(x)$ при $x > 0$ — функция, определенная правой частью равенства (101), $\Phi(-x) = \Phi(x)$. Записав решение этой задачи в квадратурах и подставив его в (100), получаем решение задачи 1" в явном виде.

Задача 1'''. Условия такие же, как и в задаче 1", только (97") заменяется краевым условием

$$\left(\alpha_1 \tilde{u} - \beta_1 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right)_{y=0} = \tilde{\Phi}(x), \quad 0 \leq x < \infty. \quad (97''')$$

Приняв искомое решение задачи в виде (100), из формулы обращения (61) находим

$$\left(\alpha_1 \operatorname{Re} f(z) + \beta_1 \operatorname{Im} \frac{df(z)}{dz} \right)_{y=0} = \Phi(z), \quad 0 \leq x < \infty, \quad (104)$$

где $\Phi(x)$ — функция, определенная правой частью равенства (101).

Введя функцию $F(z) = \alpha_1 f(z) - i\beta_1 \frac{df(z)}{dz}$, краевое условие (104) и условие $v|_{x=0} = 0$ можем записать соответственно в виде

$$\operatorname{Re} F(z)|_{y=0} = \Phi(x), \quad 0 \leq x < \infty, \quad (105)$$

$$\operatorname{Im} F(z)|_{x=0} = 0, \quad 0 \leq y < \infty. \quad (106)$$

Записав решение задачи Римана — Гильберта для области g (105), (106), а затем и $f(z)$ в квадратурах и подставив $f(z)$ в (100), получаем решение задачи 1''' в явном виде.

Задача 2. Пусть g — полуполоса ($0 < x < \infty$, $0 < y < h = \text{const}$). Требуется найти функцию $\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y)$, x^k -аналитическую в g , непрерывную на границе g , за исключением, может быть, точек $(0, 0)$, $(0, h)$, и удовлетворяющую краевым условиям

$$(\alpha_1 x^{k-1} \tilde{u} - \beta_1 \tilde{v})_{y=0} = \tilde{\Phi}(x) x^{k-1}, \quad 0 \leq x < \infty, \quad (107)$$

$$(\alpha_2 x^{k-1} \tilde{u} - \beta_2 \tilde{v})_{y=h} = \tilde{\Phi}_1(x) x^{k-1}, \quad 0 \leq x < \infty, \quad (108)$$

$$\tilde{v}|_{y=0} = 0, \quad 0 \leq y \leq h. \quad (109)$$

Приняв искомое решение в виде (100), так же как и при решении задачи 1''', приходим к задаче Римана — Гильберта для полосы $-\infty < x < \infty$, $0 < y < h$ при краевых условиях

$$(\alpha_1 u - \beta_1 x v)_{y=0} = \Phi(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (110)$$

$$(\alpha_2 u - \beta_2 x v)_{y=h} = \Phi_1(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (111)$$

где при $0 \leq x < \infty$ $\Phi(x)$ — функция, определенная правой частью равенства (101), $\Phi_1(x)$ — правая часть равенства (101) при условии, что $\tilde{\Phi}(\xi)$ и $\tilde{\Phi}(x)$ заменяются на $\tilde{\Phi}_1(\xi)$ и $\tilde{\Phi}_1(x)$, $\Phi(-x) = \Phi(x)$,

$\Phi_1(-x) = \Phi_1(x)$. Записав $f(z)$ в квадратурах и подставив в (100), получаем решение задачи 2 в явном виде.

Пусть для определенности $h = \pi$. При помощи формул Сохоцкого убеждаемся, что мнимая часть аналитической функции

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\Phi(t) \operatorname{sh} t dt}{\operatorname{ch} t - \operatorname{ch} z} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\Phi_1(t) \operatorname{sh} (t + i\pi) dt}{\operatorname{ch} (t + i\pi) - \operatorname{ch} z},$$

или

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{\Phi(t)}{\operatorname{ch} t - \operatorname{ch} z} - \frac{\Phi_1(t)}{\operatorname{ch} t + \operatorname{ch} z} \right] \operatorname{sh} t dt,$$

обращается в нуль при $x = 0$ и принимает заданные значения $\Phi(x)$ и $\Phi_1(x)$ соответственно при $z = x$ и $z = x + i\pi$ ($x > 0$).

В качестве примеров полученного решения задачи 2 запишем $\tilde{f}(z)$ при $k = 1$ в следующих двух случаях: 1) $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\beta_1 = \beta_2 = -1$, 2) $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\beta_1 = \beta_2 = 0$. В первом случае в силу (100) получаем

$$\begin{aligned} \tilde{f}(z) &= \tilde{u}(x, y) + i \tilde{v}(x, y) = \\ &= \int_0^x \left\{ \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{\Phi(t)}{\operatorname{ch} t - \operatorname{ch} \zeta} - \frac{\Phi_1(t)}{\operatorname{ch} t + \operatorname{ch} \zeta} \right] \operatorname{sh} t dt + \right. \\ &\quad \left. + i \xi \operatorname{Im} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{\Phi(t)}{\operatorname{ch} t - \operatorname{ch} \zeta} - \frac{\Phi_1(t)}{\operatorname{ch} t + \operatorname{ch} \zeta} \right] \operatorname{sh} t dt \right\} \frac{d\xi}{\sqrt{x^2 - \xi^2}}, \end{aligned}$$

$$\zeta = \xi + iy,$$

где в соответствии с формулой (101)

$$\Phi(t) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{t} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\tilde{\Phi}(\lambda) \lambda d\lambda}{\sqrt{t^2 - \lambda^2}}, \quad \Phi_1(t) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{t} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\tilde{\Phi}_1(\lambda) \lambda d\lambda}{\sqrt{t^2 - \lambda^2}}.$$

Во втором случае, взяв $f(z)$ в виде (62), находим

$$\begin{aligned} \tilde{f}(z) &= \tilde{u}(x, y) + i \tilde{v}(x, y) = \\ &= \int_0^x \left\{ -\operatorname{Im} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{\Phi(t)}{\operatorname{ch} t - \operatorname{ch} \zeta} - \frac{\Phi_1(t)}{\operatorname{ch} t + \operatorname{ch} \zeta} \right] \operatorname{sh} t dt + \right. \\ &\quad \left. + i \xi \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{\Phi(t)}{\operatorname{ch} t - \operatorname{ch} \zeta} - \frac{\Phi_1(t)}{\operatorname{ch} t + \operatorname{ch} \zeta} \right] \operatorname{sh} t dt \right\} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 - x^2}}, \end{aligned}$$

$$\zeta = \xi + iy,$$

где в соответствии с (63)

$$\Phi(t) = -\frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\tilde{\Phi}(\lambda) \lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - t^2}}, \quad \Phi_1(t) = -\frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\tilde{\Phi}_1(\lambda) \lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - t^2}}.$$

Задача 2'. Условия такие же, как и в задаче 2, только (107) и (108) заменяются краевыми условиями

$$\left(\alpha_1 \tilde{u} - \beta_1 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right)_{y=0} = \tilde{\Phi}(x), \quad 0 \leq x < \infty, \quad (107')$$

$$\left(\alpha_2 \tilde{u} - \beta_2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right)_{y=h} = \tilde{\Phi}_1(x), \quad 0 \leq x < \infty. \quad (108')$$

Приняв искомое решение задачи в виде (100), приходим к задаче Пуанкаре для области g при краевых условиях (104) и

$$v|_{x=0} = 0, \quad 0 \leq y \leq h, \quad (112)$$

$$\left(\alpha_2 \operatorname{Re} f(z) + \beta_2 \operatorname{Im} \frac{df(z)}{dz} \right)_{y=h} = \Phi_1(x), \quad 0 \leq x < \infty, \quad (113)$$

где $\Phi_1(x)$ — правая часть равенства (101) при условии, что вместо $\tilde{\Phi}(\xi)$ и $\tilde{\Phi}(x)$ подставляются $\tilde{\Phi}_1(\xi)$ и $\tilde{\Phi}_1(x)$. Легко видеть, что эта задача сводится к задаче Римана — Гильберта для области g в таких частных случаях: а) $\beta_1 = \beta_2 = 0$, б) $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, в) $\alpha_1 = \beta_2 = 0$, г) $\alpha_2 = \beta_1 = 0$, д) $\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 = 0$. Во всех этих случаях функция $\tilde{f}(z)$ может быть найдена в квадратурах. Подставив ее в (100), получаем решение задачи 2' в явном виде.

Пусть в дальнейшем $\tilde{\Phi}(x)$, $\tilde{\Phi}_1(x)$ и $\tilde{\Psi}(x)$, $\tilde{\Psi}_1(x)$ — заданные достаточное число раз непрерывно дифференцируемые функции от x при $0 \leq x \leq a$ и соответственно при $b \leq x < \infty$.

Задача 3. Пусть g — то же самое, что и в задаче 1. Требуется найти функцию $\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y)$, x^k -аналитическую в g , непрерывную на границе g , за исключением, может быть, точек $(0, 0)$, $(a, 0)$, и удовлетворяющую краевым условиям (98) и

$$\tilde{u}|_{y=0} = \tilde{\Phi}(x), \quad 0 \leq x \leq a, \quad (114)$$

$$\tilde{v}|_{y=0} = \tilde{\Psi}(x) x^{k-1}, \quad a \leq x < \infty. \quad (115)$$

Обратим внимание на то, что здесь, а также в некоторых других случаях при постановке краевых задач x^k -аналитических функций мы не формулируем заранее каких-либо условий о поведении функции $\tilde{f}(z)$ при подходе к бесконечности и к точкам разделения типов краевых условий $(0, 0)$, $(a, 0)$. Эти условия, в силу самого способа решения указанных задач, должны вытекать из соответствующих условий для аналитических функций, через которые выражаются искомые x^k -аналитические функции. Таким образом, решения краевых задач x^k -аналитических функций будут зависеть от выбора класса решений соответствующих краевых задач аналитических функций (§ 1).

Ищем $\tilde{f}(z)$ в виде (100), считая, что выполняется краевое условие [10, 11]

$$v|_{x=0} = 0, \quad 0 \leq y < \infty. \quad (116)$$

Из формулы обращения (59) получаем

$$u|_{y=0} = \Phi(x), \quad 0 \leq x \leq a, \quad (117)$$

где $\Phi(x)$ — правая часть равенства (101). Предполагая, что $f(z) \in M_1$ в области g , при помощи интегрального представления (62) из формулы обращения (63) получаем

$$x \operatorname{Im} \{f(z) e^{-i\pi(\frac{k}{2}-1)}\}_{y=0} = \Psi(x), \quad a \leq x < \infty, \quad (118)$$

где

$$\Psi(x) = \begin{cases} (-1)^{m-1} \mu \frac{d}{dx} \int_{\infty}^x \frac{d^m \tilde{\Psi}(\xi) \xi^{k-1}}{(d\xi^2)^m} \frac{\xi d\xi}{(\xi^2 - x^2)^{\frac{k}{2}-m}}, & k \neq 2m, \\ (-1)^{m-1} \mu x \frac{d^m \tilde{\Psi}(x) x^{k-1}}{(dx^2)^m}, & k = 2m. \end{cases} \quad (119)$$

Записав решение задачи Римана — Гильберта для области g при краевых условиях (116), (117), (118) в квадратурах и подставив его в (100), получаем решение задачи 3 в явном виде. Например, при $k=1$ это решение можно записать следующим образом:

$$\tilde{f}(z) = \int_0^x \left[\operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t, 0)}{t - \zeta} dt + i \xi \operatorname{Im} \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t, 0)}{t - \zeta} dt \right] \frac{d\xi}{\sqrt{x^2 - \xi^2}},$$

$$\zeta = \xi + iy,$$

или ⁵

$$\tilde{f}(z) = \int_0^{\infty} \left[\operatorname{Re} \frac{1}{\sqrt{x^2 - (t - iy)^2}} + i \operatorname{Im} \left(\frac{t - iy}{\sqrt{x^2 - (t - iy)^2}} + i \right) \right] u(t, 0) dt, \quad (120)$$

где в соответствии с (101) и (119)

$$u(t, 0) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\tilde{\Phi}(\lambda) \lambda d\lambda}{\sqrt{t^2 - \lambda^2}}, & 0 \leq t \leq a, \\ -\frac{2}{\pi} \frac{1}{t} \frac{d}{dt} \int_{\infty}^t \frac{\tilde{\Psi}(\lambda) - D}{\sqrt{\lambda^2 - t^2}} \lambda d\lambda, & a \leq t < \infty, \end{cases} \quad (121)$$

⁵ В силу того что $u(-\xi, y) = u(\xi, y)$, $v(-\xi, y) = -v(\xi, y)$, а также на основании (48'), (49')

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-x}^x \frac{\xi d\xi}{(t - \zeta) \sqrt{x^2 - \xi^2}} = -\frac{1}{2} \operatorname{Res}_{\xi=t-iy} \frac{\xi}{(t - iy - \xi) \sqrt{x^2 - \xi^2}} -$$

$$-\frac{1}{2} \operatorname{Res}_{\xi=\infty} \frac{\xi}{(t - iy - \xi) \sqrt{x^2 - \xi^2}},$$

$$\arg(x^2 - \xi^2) = 0 \text{ при } \xi < x, \arg(x^2 - \xi^2) = \pi \text{ при } \xi > x.$$

D — постоянная. При этом предполагается, что выполняется одно из следующих условий:

а) функция $u(t, 0)$ при $t \rightarrow \infty$ удовлетворяет неравенству $|u(t, 0)| \leq A|t|^{-1-\varepsilon}$ ($A = \text{const}$, $\varepsilon = \text{const} > 0$) и аналитическая функция

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t, 0)}{t-z} dt \quad (122)$$

в верхней полуплоскости принадлежит множеству M_1 , т. е.

$$|f(z)| \leq A|z|^{-1-\varepsilon} \text{ при } z \rightarrow \infty;$$

б) указанная аналитическая функция $f(z)$ регулярна в бесконечно удаленной точке и имеет в этой точке нуль не ниже первого порядка, что, например, справедливо, если функция $u(t, 0)$ тождественно равна нулю при $|t| > N$, где N — достаточно большое число.

При этом в случае «а» постоянная D в равенстве (121) равна нулю, в случае «б»

$$D = \frac{1}{4} \text{Im} \left[2\pi i \text{Res}_{\zeta=\infty} \frac{f(\zeta)(\zeta-iy)}{V(z-\zeta)(\bar{z}+\zeta)} \right], \quad \arg(x^2 - \xi^2) = -\pi, \quad \xi > x \quad (123)$$

или

$$D = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u(t, 0) dt. \quad (123')$$

При выполнении условия «а» высказанное утверждение очевидно. Справедливость этого утверждения при выполнении условия «б» вытекает из следующего замечания, имеющего важное значение.

Интегральные представления (58) и (62) при $k = 1$ взаимны с точностью до постоянного чисто мнимого слагаемого, т. е. с точностью до указанного постоянного слагаемого определяют одну и ту же x -аналитическую функцию $\tilde{f}(z)$, если выполняется условие «б». Дело в том, что при выполнении этого условия справедливо равенство

$$\begin{aligned} \tilde{f}(z) &= \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y) = \int_0^x [u(\xi, y) + i\xi v(\xi, y)] (x^2 - \xi^2)^{-\frac{1}{2}} d\xi = \\ &= \int_0^x \{ \text{Re}[f(\zeta) e^{i\frac{\pi}{2}}] + i\xi \text{Im}[f(\zeta) e^{i\frac{\pi}{2}}] \} (\xi^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} d\xi + \\ &\quad + i \frac{1}{4} \text{Im} \left[2\pi i \text{Res}_{\zeta=\infty} \frac{f(\zeta)(\zeta-iy)}{V(z-\zeta)(\bar{z}+\zeta)} \right]. \end{aligned}$$

Отсюда, в частности, следует, что при выполнении условия «б» формулы обращения (101) и (119) выполняются одновременно, только в (119) вместо $\tilde{\Psi}(\lambda)$ подставляется $\tilde{\Psi}(\lambda) - D$. Если $\tilde{\Psi}(\lambda) - D \equiv 0$

при $t \geq N > 0$, где N — достаточно большое число, то указанное выше решение ⁶ задачи 3 при $k = 1$ принимает вид

$$\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y) = \int_0^N \left[\operatorname{Re} \frac{1}{\sqrt{x^2 - (t - iy)^2}} + \right. \\ \left. + i \operatorname{Im} \left(\frac{t - iy}{\sqrt{x^2 - (t - iy)^2}} + i \right) \right] u(t, 0) dt,$$

где $u(t, 0)$ определяется равенствами (121) при условии, что во втором из этих равенств в интеграле в качестве нижнего предела вместо бесконечности подставляется число N и при $\tilde{\Phi}(t) = c = \text{const}$, $\tilde{\Psi}(t) - D \equiv 0$

$$\tilde{f}(z) = c \frac{2}{\pi} \int_0^a \left[\operatorname{Re} \frac{1}{\sqrt{x^2 - (t - iy)^2}} + i \operatorname{Im} \left(\frac{t - iy}{\sqrt{x^2 - (t - iy)^2}} + i \right) \right] dt,$$

или

$$\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y) = c \frac{2}{\pi} [\operatorname{Im} \ln(y + ia + \sqrt{x^2 + (y + ia)^2}) + \\ + i \operatorname{Im}(-\sqrt{x^2 + (y + ia)^2} + ia)].$$

Задача 3'. Условия такие же, как и в задаче 3, только (114) и (115) заменяются краевыми условиями

$$(\alpha_1 x^{k-1} \tilde{u} - \beta_1 \tilde{v})_{y=0} = \tilde{\Phi}(x) x^{k-1}, \quad 0 \leq x \leq a, \quad (114')$$

$$(\alpha_2 x^{k-1} \tilde{u} - \beta_2 \tilde{v})_{y=0} = \tilde{\Psi}(x) x^{k-1}, \quad a \leq x < \infty. \quad (115')$$

Приняв $\tilde{f}(z)$ в виде (100), как и при решении задачи 3, получаем краевые условия (116) и

$$(\alpha_1 u - \beta_1 x v)_{y=0} = \Phi(x), \quad 0 \leq x \leq a, \quad (117')$$

где $\Phi(x)$ — правая часть равенства (101). Предполагая, что $f(z) \in M_1$, из формулы обращения (63) получаем

$$\{\alpha_2 \operatorname{Re} [f(z) e^{-i\pi(\frac{k}{2}-1)}] - \beta_2 x \operatorname{Im} [f(z) e^{-i\pi(\frac{k}{2}-1)}]\}_{y=0} = \Psi(x), \quad (118') \\ a \leq x < \infty,$$

где $\Psi(x)$ — правая часть равенства (119). Записав решение задачи Римана — Гильберта для области g при краевых условиях (116), (117'), (118') в квадратурах и подставив его в (100), получаем решение задачи 3' в явном виде.

⁶ Отметим, что на основе результатов работы [10] задача 3 рассматривалась в работе [98]. Однако в этой работе были допущены некоторые неточности. К решению задачи 3 при $k = 1$, в частности, сводится задача теории осесимметричного потенциала для полупространства, когда на плоскости, ограничивающей полупространство, внутри круга радиуса a с центром в начале координат заданы значения потенциальной функции, а вне этого круга — значение ее нормальной производной. Решение последней задачи теории осесимметричного потенциала получено во многих исследованиях (например, [100—102]).

Задача 3". Условия такие же, как и в задаче 3, только (114) и (115) заменяются краевыми условиями

$$\left(\alpha_1 \tilde{u} - \beta_1 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right)_{y=0} = \tilde{\Phi}(x), \quad 0 \leq x \leq a, \quad (114'')$$

$$\left(\alpha_2 \tilde{u} - \beta_2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right)_{y=0} = \tilde{\Psi}(x), \quad a \leq x < \infty. \quad (115'')$$

Ищем $f(z)$ в виде (100), получаем краевое условие (116). Как и при решении задачи 1''', из формулы обращения (61) находим

$$\left(\alpha_1 \operatorname{Re} f(z) + \beta_1 \operatorname{Im} \frac{df(z)}{dz} \right)_{y=0} = \Phi(x), \quad 0 \leq x \leq a, \quad (117'')$$

где $\Phi(x)$ — правая часть равенства (101). Предполагая, что $f(z) \in M_1$, из формулы обращения (65) получаем

$$\left\{ \alpha_2 \operatorname{Re} [f(z) e^{-i\pi \left(\frac{k}{2} - 1 \right)}] - \beta_2 \operatorname{Im} \left[\frac{df(z)}{dz} e^{-i\pi \frac{k}{2}} \right] \right\}_{y=0} = \Psi(x), \quad (118'')$$

$$a \leq x < \infty,$$

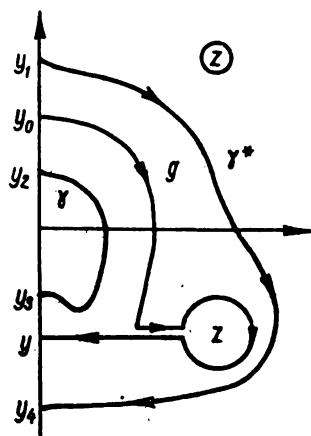


Рис. 15.

где $\Psi(x)$ — функция, определенная правой частью равенства (119).

Таким образом, определение аналитической функции $f(z) \in M_1$ сводится к решению задачи Пуанкаре для области g при краевых условиях (116), (117''), (118''). Эта задача в случаях «а», «б», «в», «г», «д», указанных при решении задачи 2', приводится к задаче Римана — Гильберта для области g . Записав решение последней задачи в квадратурах и подставив $f(z)$ в (100), получаем решение задачи 3" в явном виде.

Лемма 1. Пусть g — область, ограниченная двумя отрезками мнимой оси L ($y_1 \geq y \geq y_2$) и L_1 ($y_3 \geq y \geq y_4$) и двумя контурами γ и γ^* (рис. 15), $\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y)$ — x^k -аналитическая в g функция, определенная интегральным представлением (54) с начальной точкой контура Γ на L , при условии, что $\lim_{z \rightarrow \zeta} \arg(z - \zeta) \times \times (\bar{z} + \bar{\zeta}) = 0$ при $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$, $\xi \rightarrow 0$, $x \rightarrow 0$ ($x > \xi$, $y_1 > y > y_2$). Тогда, если выполняется условие

$$\operatorname{Im} [f(z) e^{-i\pi k}]_{L_1} = 0, \quad (124)$$

то вдоль прямых $y = \text{const}$ $y_3 > y > y_4$, лежащих в g , справедливо представление

$$\tilde{f}(z) = \tilde{f}_1(z) + \tilde{f}_2(z). \quad (125)$$

Здесь $\tilde{f}_1(z) = \tilde{u}_1(x, y) + i\tilde{v}_1(x, y)$ — x^k -аналитическая в g функция

$$\tilde{f}_1(z) = \int_0^x \{x^{1-k} \operatorname{Re} [f(\zeta) e^{-i\pi k}] + i\zeta \operatorname{Im} [f(\zeta) e^{-i\pi k}]\} (x^2 - \zeta^2)^{\frac{k}{2}-1} d\zeta, \quad (126)$$

где $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$, при этом $\tilde{v}_1|_{L_1} = 0$. Функция $\tilde{f}_2(z) = \tilde{u}_2(x, y) + i\tilde{v}_2(x, y)$ x^k -аналитическая вне точек контура γ^* и определяется равенством

$$\begin{aligned} \tilde{f}_2(z) = & \operatorname{Re} \int_{\gamma^*} \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right)^{1-k} f(\zeta) (z - \zeta)^{\frac{k}{2}-1} (\bar{z} + \zeta)^{\frac{k}{2}-1} d\zeta + \\ & + i \operatorname{Im} \int_{\gamma^*} f(\zeta) \left(\zeta - \frac{z - \bar{z}}{2} \right) (z - \zeta)^{\frac{k}{2}-1} (\bar{z} + \zeta)^{\frac{k}{2}-1} d\zeta, \end{aligned} \quad (127)$$

где интегрирование по γ^* ведется в отрицательном направлении (при обходе γ^* в указанном направлении точки области g остаются справа), нормировка $\arg(z - \zeta)$ ($\bar{z} + \zeta$) такая же, как в (54). При этом, если $k = 1$,

$$\tilde{v}_2|_{x=0} = \operatorname{Im} \int_{\gamma^*} f(\zeta) (\zeta - iy) (iy - \zeta)^{-\frac{1}{2}} (-iy + \zeta)^{-\frac{1}{2}} d\zeta = C = \text{const.} \quad (128)$$

В самом деле, по условию $v|_L = 0$ (по самому определению интегрального представления (54), случай «а»). Из (126) в силу условия (124) получаем $\tilde{v}_1|_L = 0$ [10, 11].

Пусть $z = x + iy$ — точка на прямой $y = \text{const}$, лежащей в g ($y_3 > y > y_4$). Введем обозначение

$$\begin{aligned} J(z, S) = & \operatorname{Re} \int_S x^{1-k} f(\zeta) (z - \zeta)^{\frac{k}{2}-1} (\bar{z} + \zeta)^{\frac{k}{2}-1} d\zeta + \\ & + i \operatorname{Im} \int_S f(\zeta) (\zeta - iy) (z - \zeta)^{\frac{k}{2}-1} (\bar{z} + \zeta)^{\frac{k}{2}-1} d\zeta, \end{aligned} \quad (129)$$

где S — любой контур в g , не проходящий через точку $z = x + iy$. Имеем

$$J(z, \Gamma) + J(z, S_1) + J(z, S_2) + J(z, S_3) + J(z, S_4) + J(z, S_5) = 0.$$

Здесь $J(z, \Gamma) = \tilde{f}(z)$, S_1 — окружность $|z - \zeta| = \rho$, обходимая в направлении движения часовой стрелки, S_2 — горизонтальный отрезок, соединяющий указанную окружность с точкой $(0, y)$, S_3 — отрезок мнимой оси, соединяющий точку $(0, y)$ с точкой $(0, y_4)$, S_4 совпадает с контуром γ^* , обходимым в положительном направлении, S_5 — отрезок мнимой оси, соединяющий точку $(0, y_0)$ с точкой

$(0, y_2)$ (см. рис. 15). Из (129), учитывая, что $v|_L = 0$, получаем $J(z, S_5) \equiv 0$. Далее,

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} J(z, S_1) &= 0, \quad J(z, S_2) = -\tilde{f}_1(z), \quad J(z, S_4) = -\tilde{f}_2(z), \\ J(z, S_3) &= \operatorname{Re} \int_{S_3} x^{1-k} f(\xi) e^{-i\pi k} (z - i\eta)^{\frac{k}{2}-1} (\bar{z} + i\eta)^{\frac{k}{2}-1} d\eta + \\ &+ i \operatorname{Im} \int_{S_3} f(\xi) (i\eta - iy) (z - i\eta)^{\frac{k}{2}-1} (\bar{z} + i\eta)^{\frac{k}{2}-1} d\eta \end{aligned}$$

и, следовательно, $J(z, S_3) \equiv 0$. Поэтому равенство (125) справедливо. Равенство (128) очевидно. Лемма доказана.

Следствие. Если контур γ^* вырождается в бесконечно удаленную точку и аналитическая функция $f(z)$ принадлежит M_1 в области g , то представление (125) принимает вид

$$\tilde{f}(z) = \tilde{f}_1(z). \quad (125')$$

Задача 4. Пусть g — правая полуплоскость $z = x + iy$ с разрезом C_1 вдоль отрезка вещественной оси $[0, a]$. Требуется найти функцию $\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y)$, x^k -аналитическую в g , непрерывную на границе g , за исключением, может быть, точек $(0, 0^+)$, $(0, 0^-)$, $(a, 0)$, и удовлетворяющую краевым условиям

$$\tilde{u}|_{y=+0} = \tilde{\Phi}(x), \quad 0 \leq x \leq a, \quad (130)$$

$$\tilde{u}|_{y=-0} = \tilde{\Phi}_1(x), \quad 0 \leq x \leq a, \quad (131)$$

$$\tilde{v}|_{x=0} = 0, \quad 0 \leq y < \infty; \quad \tilde{v}|_{x=0} = 0, \quad -\infty < y \leq 0. \quad (132)$$

Решение задачи ищем в виде (54), принимая за L часть мнимой оси $0 \leq y < \infty$. Поэтому функция $f(z)$ удовлетворяет краевому условию (116). Предположив, что $f(z) \in M_1$, приходим к выводу, что при $y \leq 0$ справедливо представление (125') и выполняется краевое условие

$$\operatorname{Im} [f(z) e^{-i\pi k}]_{x=0} = 0, \quad -\infty < y \leq 0. \quad (133)$$

При помощи формул обращения (59) получаем краевое условие (117) на C_1^+ и

$$\operatorname{Re} [f(z) e^{-i\pi k}]_{y=-0} = \Phi_1(x), \quad 0 \leq x \leq a, \quad (134)$$

где $\Phi_1(x)$ — функция, определенная правой частью равенства (101) при условии, что вместо $\tilde{\Phi}(\xi)$ и $\tilde{\Phi}(x)$ подставляются $\tilde{\Phi}_1(\xi)$ и $\tilde{\Phi}_1(x)$. Записав решение задачи Римана — Гильберта для области g при краевых условиях (116), (117), (133), (134) в квадратурах и подставив его в (54), получаем решение задачи 4 в явном виде. Например, при $k = 1$, пользуясь формулами Сохоцкого, находим решение

задачи Римана — Гильберта (116), (117), (133), (134) в виде ⁷

$$f(z) = \frac{1}{\pi i} \int_0^a \Phi^*(t) \left[\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t+z} \right] dt + \\ + \frac{1}{\sqrt{a^2 - z^2}} \frac{1}{\pi i} \int_0^a \sqrt{a^2 - t^2} \Phi_1^*(t) \left[\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t+z} \right] dt,$$

где

$$\Phi^*(t) = \frac{\Phi(t) + \Phi_1(t)}{2}, \quad \Phi_1^*(t) = \frac{\Phi(t) - \Phi_1(t)}{2},$$

$$\Phi(t) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\tilde{\Phi}(\lambda) \lambda d\lambda}{\sqrt{t^2 - \lambda^2}}, \quad \Phi_1(t) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\tilde{\Phi}_1(\lambda) \lambda d\lambda}{\sqrt{t^2 - \lambda^2}},$$

$\arg(a^2 - t^2) = 0$, а $\arg(a^2 - z^2)$ считается равным нулю, когда точка z лежит на верхнем крае разреза C_1 .

Пусть вначале $\Phi_1^*(t) \equiv 0$. Подставим $f(z)$ в (100), считая $y > 0$. После преобразований полученного выражения, аналогичных преобразованиям, указанным при решении задачи 3, находим

$$\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y) = \\ = \int_0^a \left[\operatorname{Re} \frac{1}{\sqrt{x^2 - (t - iy)^2}} + i \operatorname{Im} \left(\frac{t - iy}{\sqrt{x^2 - (t - iy)^2}} + i \right) \right] \Phi^*(t) dt.$$

Пусть теперь $\Phi^*(t) \equiv 0$. Подставляя $f(z)$ в (100) при $y > 0$, получаем

$$\tilde{f}(z) = \int_{-x}^x \left[\operatorname{Re} \frac{1}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} \frac{1}{2\pi i} \int_0^a \sqrt{a^2 - t^2} \Phi_1^*(t) \left(\frac{1}{t - \xi} - \frac{1}{t + \xi} \right) dt + \right. \\ \left. + i\xi \operatorname{Im} \frac{1}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} \frac{1}{2\pi i} \int_0^a \sqrt{a^2 - t^2} \Phi_1^*(t) \left(\frac{1}{t - \xi} - \frac{1}{t + \xi} \right) dt \right] \times \\ \times \frac{d\xi}{\sqrt{x^2 - \xi^2}}, \quad \xi = \xi + iy,$$

или

$$\tilde{f}(z) = \int_0^a \sqrt{a^2 - t^2} \Phi_1^*(t) \left[\operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_{-x}^x \frac{1}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} \left(\frac{1}{t - \xi} - \frac{1}{t + \xi} \right) \times \right. \\ \left. \times \frac{d\xi}{\sqrt{x^2 - \xi^2}} + i \operatorname{Im} \frac{1}{2\pi i} \int_{-x}^x \frac{1}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} \left(\frac{1}{t - \xi} - \frac{1}{t + \xi} \right) \frac{\xi d\xi}{\sqrt{x^2 - \xi^2}} \right] dt.$$

⁷ При этом мы учли, что построенная функция $f(z)$ удовлетворяет условию «б», указанному при решении задачи 3, т. е. интегральные представления (58) в (126) взаимны с точностью до чисто мнимого постоянного слагаемого.

Таким образом, в общем случае решение задачи 4 при $k = 1$ можно записать в виде

$$\begin{aligned}\tilde{f}(z) &= \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y) = \\ &= \int_0^a \left[\operatorname{Re} \frac{1}{\sqrt{x^2 - (t - iy)^2}} + i \operatorname{Im} \left(\frac{t - iy}{\sqrt{x^2 - (t - iy)^2}} + i \right) \right] \Phi^*(t) dt + \\ &+ \int_0^a \left[\operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_{-x}^x \frac{1}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} \left(\frac{1}{t - \xi} - \frac{1}{t + \xi} \right) \frac{d\xi}{\sqrt{x^2 - \xi^2}} + \right. \\ &\left. + i \operatorname{Im} \frac{1}{2\pi i} \int_{-x}^x \frac{1}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} \left(\frac{1}{t - \xi} - \frac{1}{t + \xi} \right) \frac{\xi d\xi}{\sqrt{x^2 - \xi^2}} \right] \Phi_1^*(t) \sqrt{a^2 - t^2} dt, \\ &\quad \xi = \xi + iy.\end{aligned}\quad (137)$$

При этом только во втором из равенств (132) в правой части вместо нуля может быть некоторая постоянная, определяющаяся вычетом аналитической функции $\tilde{f}(z)$ в бесконечно удаленной точке (равная $2D$, где D определяется равенством (123)).

Задача 4'. Условия такие же, как и в задаче 4, только (130) и (131) заменяются краевыми условиями

$$(\alpha_1 x^{k-1} \tilde{u} - \beta_1 \tilde{v})_{y=+0} = \tilde{\Phi}(x) x^{k-1}, \quad 0 \leq x \leq a, \quad (130')$$

$$(\alpha_2 x^{k-1} \tilde{u} - \beta_2 \tilde{v})_{y=-0} = \tilde{\Phi}_1(x) x^{k-1}, \quad 0 \leq x \leq a. \quad (131')$$

Приняв $\tilde{f}(z)$ в виде (54) и предположив, что $f(z) \subset M_1$, как и в предыдущей задаче, приходим к краевым условиям (116), (133), (117') и

$$\{\alpha_2 \operatorname{Re} [f(z) e^{-i\pi k}] - \beta_2 x \operatorname{Im} [f(z) e^{-i\pi k}]\}_{y=-0} = \Phi_1(x), \quad (134') \\ 0 \leq x \leq a,$$

где $\Phi_1(x)$ — функция, определенная правой частью равенства (101) при условии, что вместо $\tilde{\Phi}(\xi)$ и $\tilde{\Phi}(x)$ подставляются $\tilde{\Phi}_1(\xi)$ и $\tilde{\Phi}_1(x)$. Записав решение задачи Римана — Гильберта (116), (117'), (133), (134') в квадратурах и подставив его в (54), получаем решение задачи 4' в явном виде.

Задача 4''. Условия такие же, как и в задаче 4, только (130) и (131) заменяются краевыми условиями

$$\left(\alpha_1 \tilde{u} - \beta_1 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right)_{y=+0} = \tilde{\Phi}(x), \quad 0 \leq x \leq a, \quad (130'')$$

$$\left(\alpha_2 \tilde{u} - \beta_2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right)_{y=-0} = \tilde{\Phi}_1(x), \quad 0 \leq x \leq a. \quad (131'')$$

Методика решения этой задачи такая же, как и задачи 4', только вместо (117'), (134') в соответствии с формулой обращения (61)

выполняются краевые условия (117") и

$$\left\{ \alpha_2 \operatorname{Re} [f(z) e^{-i\pi k}] + \beta_2 \operatorname{Im} \left[\frac{df(z)}{dz} e^{-i\pi k} \right] \right\}_{y=-0} = \Phi_1(x), \quad (134'')$$

$$0 \leq x \leq a,$$

где $\Phi_1(x)$ — правая часть (101) при условии, что вместо $\tilde{\Phi}(\xi)$ и $\tilde{\Phi}(x)$ подставляются $\tilde{\Phi}_1(\xi)$ и $\tilde{\Phi}_1(x)$. Таким образом, определение функции $f(z) \in M_1$ сводится к решению задачи Пуанкаре для области g при краевых условиях (116), (133), (117"), (134"). Эта задача с помощью сведения к задаче Римана — Гильберта для области g может быть решена в квадратурах в случаях «а» — «д», указанных при решении задачи 2'. Во всех этих случаях, подставляя $f(z)$ в (54), получаем решение задачи 4" в явном виде.

Задача 5. Пусть g — правая полуплоскость $z = x + iy$ с разрезом C_2 вдоль интервала вещественной оси (b, ∞) . Требуется найти функцию $\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y)$, x^k -аналитическую в g , непрерывную на границе g , за исключением, может быть, точки $(b, 0)$, и удовлетворяющую краевым условиям

$$(\alpha_1 x^{k-1} \tilde{u} - \beta_1 \tilde{v})_{y=+0} = \tilde{\Psi}(x) x^{k-1}, \quad b \leq x < \infty, \quad (138)$$

$$(\alpha_2 x^{k-1} \tilde{u} - \beta_2 \tilde{v})_{y=-0} = \tilde{\Psi}_1(x) x^{k-1}, \quad b \leq x < \infty, \quad (139)$$

$$\tilde{v}|_{x=0} = 0, \quad -\infty < y < \infty. \quad (140)$$

Приняв $\tilde{f}(z)$ в виде (100), получаем

$$v|_{x=0} = 0, \quad -\infty < y < \infty. \quad (141)$$

Предположив, что $f(z) \in M_1$, при помощи формулы обращения (63) находим

$$\left\{ \alpha_1 \operatorname{Re} [f(z) e^{-i\pi \left(\frac{k}{2} - 1 \right)}] - \beta_1 x \operatorname{Im} [f(z) e^{-i\pi \left(\frac{k}{2} - 1 \right)}] \right\}_{y=+0} = \Psi(x), \quad (142)$$

$$b \leq x < \infty,$$

$$\left\{ \alpha_2 \operatorname{Re} [f(z) e^{i\pi \left(\frac{k}{2} - 1 \right)}] - \beta_2 x \operatorname{Im} [f(z) e^{i\pi \left(\frac{k}{2} - 1 \right)}] \right\}_{y=-0} = \Psi_1(x), \quad (143)$$

$$b \leq x < \infty,$$

где $\Psi(x)$ — правая часть равенства (119), $\Psi_1(x)$ определяется правой частью равенства (119) при условии, что вместо $\tilde{\Psi}(\xi)$ и $\tilde{\Psi}(x)$ подставляются $\tilde{\Psi}_1(\xi)$ и $\tilde{\Psi}_1(x)$. Записав решение задачи Римана — Гильберта (141), (142), (143) в квадратурах и подставив его в (54), получаем решение задачи 5 в явном виде.

Задача 5'. Условия такие же, как и в задаче 5, только (138) и (139) заменяются краевыми условиями

$$\left(\alpha_1 \tilde{u} - \beta_1 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right)_{y=+0} = \tilde{\Psi}(x), \quad b \leq x < \infty, \quad (138')$$

$$\left(\alpha_2 \tilde{u} - \beta_2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right)_{y=-0} = \tilde{\Psi}_1(x), \quad b \leq x < \infty. \quad (139')$$

Приняв $\tilde{f}(z)$ в виде (100), получаем краевое условие (141). Предположив, что $f(z) \in M_1$, при помощи формулы обращения (165) находим

$$\left\{ \alpha_1 \operatorname{Re} [f(z) e^{-i\pi(\frac{k}{2}-1)}] - \right. \\ \left. - \beta_1 \operatorname{Im} \left[\frac{df(z)}{dz} e^{-i\pi\frac{k}{2}} \right] \right\}_{y=+0} = \Psi(x), \quad (144) \\ b \leq x < \infty,$$

$$\left\{ \alpha_2 \operatorname{Re} [f(z) e^{i\pi(\frac{k}{2}-1)}] - \right. \\ \left. - \beta_2 \operatorname{Im} \left[\frac{df(z)}{dz} e^{i\pi\frac{k}{2}} \right] \right\}_{y=-0} = \Psi_1(x), \quad (145) \\ b \leq x < \infty,$$

где $\Psi(x)$ определяется равенством (119), а $\Psi_1(x)$ — правой частью этого равенства при условии, что вместо $\tilde{\Psi}(\xi)$ и $\tilde{\Psi}(x)$ подставляются

$\tilde{\Psi}_1(\xi)$ и $\tilde{\Psi}_1(x)$. Это означает, что функция $f(z) \in M_1$ должна быть решением задачи Пуанкаре для области g при краевых условиях (141), (144), (145). Последняя задача в случаях «а» — «д», указанных при решении задачи 2', сводится к задаче Римана — Гильберта для области g . В этих случаях $f(z)$ находим в квадратурах. Подставив $f(z)$ в (100), получаем решение задачи 5' в явном виде.

Лемма 2. Пусть g — правая полуплоскость $z = x + iy$ с разрезами C_1 и C_2 вдоль интервалов вещественной оси $(0, a)$ и (b, ∞) ($b > a$) (рис. 16), $\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y)$ — функция, x -аналитическая в g , определенная интегральным представлением (54)

$$\tilde{f}(z) = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z f(\zeta) (z - \zeta)^{-\frac{1}{2}} (\bar{z} + \zeta)^{-\frac{1}{2}} d\zeta + \\ + i \operatorname{Im} \int_{z_0}^z f(\zeta) \left(\zeta - \frac{z - \bar{z}}{2} \right) (z - \zeta)^{-\frac{1}{2}} (\bar{z} + \zeta)^{-\frac{1}{2}} d\zeta \quad (54')$$

при условии, что в качестве L берется часть мнимой оси $0 \leq y < \infty$. Тогда, если $f(z) \in M_1$ в g , т. е. $f(z) = O(|z|^{-1-\varepsilon})$ ($\varepsilon = \text{const} > 0$),

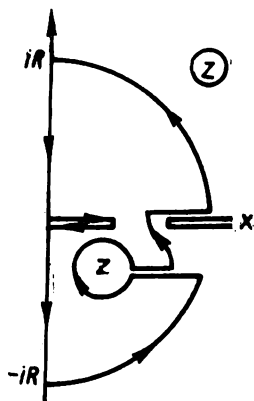


Рис. 16.

то при $\text{Im } z < 0$ справедливы представления

$$\tilde{f}(z) = \tilde{f}_1(z) + \tilde{f}_2(z), \quad (146)$$

$$\tilde{f}(z) = \tilde{f}_1^*(z) + \tilde{f}_2^*(z), \quad (147)$$

где

$$\tilde{f}_1(z) = \tilde{u}_1(x, y) + i\tilde{v}_1(x, y), \quad \tilde{f}_2(z) = \tilde{u}_2(x, y) + i\tilde{v}_2(x, y),$$

$$\tilde{f}_1^*(z) = \tilde{u}_1^*(x, y) + i\tilde{v}_1^*(x, y), \quad \tilde{f}_2^*(z) = \tilde{u}_2^*(x, y) + i\tilde{v}_2^*(x, y)$$

являются x -аналитическими функциями, определенными равенствами

$$\tilde{f}_1(z) = \int_0^x (-u(\xi, y) - i\xi v(\xi, y)) (x^2 - \xi^2)^{-\frac{1}{2}} d\xi, \quad (148)$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_2(z) = & \text{Re} \int_{\infty}^b [f(\xi) e^{i\frac{\pi}{2}}]^{\pm} (\xi - z)^{-\frac{1}{2}} (\bar{z} + \xi)^{-\frac{1}{2}} d\xi + \\ & + i \text{Im} \int_{\infty}^b [f(\xi) e^{i\frac{\pi}{2}}]^{\pm} (\xi - iy) (\xi - z)^{-\frac{1}{2}} (\bar{z} + \xi)^{-\frac{1}{2}} d\xi, \end{aligned} \quad (149)$$

$$\tilde{f}_1^*(z) = \int_{\infty}^x (v(\xi, y) - i\xi u(\xi, y)) (\xi^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} d\xi, \quad (150)$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_2^*(z) = & \text{Re} \int_0^a [f(\xi)]^{\pm} (z - \xi)^{-\frac{1}{2}} (\bar{z} + \xi)^{-\frac{1}{2}} d\xi + \\ & + i \text{Im} \int_0^a [f(\xi)]^{\pm} (\xi - iy) (z - \xi)^{-\frac{1}{2}} (\bar{z} + \xi)^{-\frac{1}{2}} d\xi. \end{aligned} \quad (151)$$

В частности, на вещественной оси

$$\begin{aligned} \tilde{u}_2(x, 0) + i\tilde{v}_2(x, 0) = & \int_{\infty}^b (-[v]^{\pm} + i\xi [u]^{\pm}) (\xi^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} d\xi, \quad (149') \\ & 0 \leq x \leq b, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}_2^*(x, 0) + i\tilde{v}_2^*(x, 0) = & \int_0^a ([u]^{\pm} + i\xi [v]^{\pm}) (x^2 - \xi^2)^{-\frac{1}{2}} d\xi, \quad (151') \\ & a \leq x < \infty. \end{aligned}$$

В самом деле, равенство (146) непосредственно получается из (125), если в качестве γ^* взять разрез C_2 и учесть, что $f(z) \in M_1$. Равенство (147) получается точно так же, если взять интеграл (129) по замкнутому контуру, указанному на рис. 16, деформируя его за счет неограниченного увеличения R .

Задача 6. Пусть g — правая полуплоскость $z = x + iy$ с разрезами C_1 и C_2 вдоль интервалов вещественной оси $(0, a)$ и (b, ∞) (см. рис. 16). Требуется найти функцию $\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y)$, x -аналитическую в g , непрерывную на границе g , за исключением, может быть, точек $(0, 0^+)$, $(0, 0^-)$, $(a, 0)$, $(b, 0)$, и удовлетворяющую краевым условиям

$$\tilde{u}|_{y=+0} = \tilde{\Phi}(x), \quad \tilde{u}|_{y=-0} = \tilde{\Phi}_1(x), \quad 0 \leq x \leq a, \quad (152)$$

$$\tilde{v}|_{y=+0} = \tilde{\Psi}(x), \quad \tilde{v}|_{y=-0} = \tilde{\Psi}_1(x), \quad b \leq x < \infty, \quad (153)$$

$$\tilde{v}|_{x=0} = 0, \quad 0 \leq y < \infty, \quad \tilde{v}|_{x=0} = C, \quad -\infty < y \leq 0, \quad (154)$$

где C — некоторая постоянная (заранее не задается). Решение задачи ищем в виде (54'), предполагая, что $f(z) \in M_1$ в области g . При $\text{Im } z > 0$

$$\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y) = \int_0^x (u(\xi, y) + i\xi v(\xi, y)) (x^2 - \xi^2)^{-\frac{1}{2}} d\xi. \quad (155)$$

Отсюда следует, что первое из краевых условий (154) выполняется. На C_1^+ из формулы обращения (59), учитывая, что $\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \pi$, получаем

$$u|_{y=+0} = \Phi(x) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\tilde{\Phi}(\xi) \xi d\xi}{\sqrt{x^2 - \xi^2}}, \quad 0 \leq x \leq a. \quad (156)$$

Из формулы обращения (63) на C_2^+ находим

$$u|_{y=+0} = \Psi(x) = -\frac{2}{\pi} \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \int_\infty^x \frac{\tilde{\Psi}(\xi) \xi d\xi}{\sqrt{\xi^2 - x^2}}, \quad b \leq x < \infty. \quad (157)$$

Для скачка $[v]^\pm = v(x, +0) - v(x, -0)$ из (59'), (63') получаем

$$\mu(x) = [v]^\pm = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{\tilde{\Phi}(\xi) - \tilde{\Phi}_1(\xi)}{\sqrt{\xi^2 - x^2}} \xi d\xi, \quad 0 \leq x \leq a, \quad (158)$$

$$\mu^*(x) = [v]^\pm = \frac{2}{\pi} \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \int_b^x \frac{\tilde{\Psi}(\xi) - \tilde{\Psi}_1(\xi)}{\sqrt{x^2 - \xi^2}} \xi d\xi, \quad b \leq x < \infty. \quad (159)$$

В дополнение к условию $v(0, y) = 0$ при $0 < y < \infty$, вытекающему из (155), будем считать, что

$$v|_{x=0} = 0, \quad -\infty < y < 0, \quad 0 < y < \infty. \quad (160)$$

Тогда, в соответствии с леммой 2, при $\text{Im} z < 0$ будут справедливы представления (146), (147). Из (148) и (149) получаем

$$\tilde{v}_1|_{x=0} = 0, \quad \tilde{v}_2|_{x=0} = \int_{-\infty}^b [u]^\pm d\xi, \quad -\infty < y < \infty,$$

и, следовательно, второе из краевых условий (154) выполняется при

$$C = \int_{-\infty}^b [u]^\pm d\xi. \quad (161)$$

Из (149), (151) находим

$$\tilde{u}_2(x, 0) = \int_{-\infty}^b -\mu^*(\xi) (\xi^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} d\xi, \quad 0 \leq x < b, \quad (162)$$

$$\tilde{v}_2^*(x, 0) = \int_0^a \mu(\xi) \xi (x^2 - \xi^2)^{-\frac{1}{2}} d\xi, \quad a < x < \infty. \quad (163)$$

Учитывая (146), (147), на C_1^- получаем

$$\tilde{u}_1(x, -0) = \tilde{\Phi}_1(x) - \tilde{u}_2(x, 0), \quad 0 \leq x \leq a, \quad (164)$$

на C_2^- —

$$\tilde{v}_1^*(x, -0) = \tilde{\Psi}_1(x) - \tilde{v}_2^*(x, 0). \quad (165)$$

Правые части равенств (164), (165) известны, и поэтому, применяя к (164) формулу обращения (59), а к (165) — формулу обращения (63), на C_1^- получаем

$$u|_{y=-0} = \Phi_1(x) = -\frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\tilde{\Phi}_1(\xi) - \tilde{u}_2(\xi, 0)}{\sqrt{x^2 - \xi^2}} \xi d\xi, \quad 0 \leq x \leq a, \quad (166)$$

на C_2^- —

$$u|_{y=-0} = \Psi_1(x) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x \frac{\tilde{\Psi}_1(\xi) - \tilde{v}_2^*(\xi, 0)}{\sqrt{\xi^2 - x^2}} \xi d\xi, \quad b \leq x < \infty. \quad (167)$$

Таким образом, определение аналитической функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, принадлежащей M_1 , сводится к решению задачи Римана — Гильберта для области g (см. рис. 16) при краевых условиях (156), (157), (160), (166), (167). Записав $f(z)$ в квадратурах и подставив ее в (54'), получаем решение задачи в явном виде.

Задача 6'. Условия такие же, как и в задаче 6, только (152) и (153) заменяются краевыми условиями

$$\tilde{v}|_{y=+0} = \tilde{\Phi}(x), \quad \tilde{v}|_{y=-0} = \tilde{\Phi}_1(x), \quad 0 \leq x \leq a, \quad (152')$$

$$\tilde{u}|_{y=+0} = \tilde{\Psi}(x), \quad \tilde{u}|_{y=-0} = \tilde{\Psi}_1(x), \quad b \leq x < \infty. \quad (153')$$

Поступая точно так же, как и при решении задачи 6, и предполагая, что $f(z) \subset M_1$, из формул обращения (59) и (63) находим

$$v|_{y=+0} = \Phi(x) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\tilde{\Phi}(\xi) \xi d\xi}{\sqrt{x^2 - \xi^2}}, \quad 0 \leq x \leq a, \quad (156')$$

$$v|_{y=+0} = \Psi(x) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_{\infty}^x \frac{\tilde{\Psi}(\xi) \xi d\xi}{\sqrt{\xi^2 - x^2}}, \quad b \leq x < \infty. \quad (157')$$

Для скачка $[u]^\pm = u(x, +0) - u(x, -0)$ из (59') и (63') на C_1 получаем

$$\lambda(x) = [u]^\pm = -\frac{2}{\pi} \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{\tilde{\Phi}(\xi) - \tilde{\Phi}_1(\xi)}{\sqrt{\xi^2 - x^2}} \xi d\xi, \quad 0 \leq x \leq a, \quad (158')$$

на разрезе C_2 —

$$\lambda^*(x) = [u]^\pm = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_b^x \frac{\tilde{\Psi}(\xi) - \tilde{\Psi}_1(\xi)}{\sqrt{x^2 - \xi^2}} \xi d\xi, \quad b \leq x < \infty. \quad (159')$$

Считая, что краевое условие (160) выполняется, приходим к выводу, что краевое условие (154) будет выполняться при

$$C = \int_{\infty}^b (\tilde{\Psi}(\xi) - \tilde{\Psi}_1(\xi)) d\xi. \quad (161')$$

Из (149'), (151') находим

$$\tilde{v}_2(x, 0) = \int_{\infty}^b \lambda^*(\xi) (\xi^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \xi d\xi, \quad 0 \leq x < b, \quad (162')$$

$$\tilde{u}_2^*(x, 0) = \int_0^a \lambda(\xi) (x^2 - \xi^2)^{-\frac{1}{2}} d\xi, \quad a \leq x < \infty. \quad (163')$$

Учитывая (146) и (147), получаем

$$\tilde{v}_1(x, -0) = \tilde{\Phi}_1(x) - \tilde{v}_2(x, 0), \quad 0 \leq x \leq a, \quad (164')$$

$$\tilde{u}_1^*(x, -0) = \tilde{\Psi}_1(x) - \tilde{u}_2^*(x, 0), \quad b \leq x < \infty. \quad (165')$$

Применяя к (164'), (165') формулы обращения (59) и (63), находим

$$v|_{y=-0} = \Phi_1(x) = -\frac{2}{\pi} \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\tilde{\Phi}_1(\xi) - \tilde{v}_2(\xi, 0)}{\sqrt{x^2 - \xi^2}} \xi d\xi, \quad (166')$$

$$0 \leq x \leq a,$$

$$v|_{y=-0} = \Psi_1(x) = -\frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_{\infty}^x \frac{\tilde{\Psi}_1(\xi) - \tilde{u}_2^*(\xi, 0)}{\sqrt{\xi^2 - x^2}} \xi d\xi, \quad b \leq x < \infty. \quad (167')$$

Таким образом, записав решение $f(z)$ задачи Римана — Гильберта для области g при краевых условиях (156'), (157'), (160),

(166'), (167') в квадратурах и подставив $f(z)$ в (54'), получаем решение задачи 6' в явном виде.

Задача 6". Условия такие же, как и в задаче 6, только (152) и (153) заменяются краевыми условиями

$$\tilde{v}|_{y=+0} = \tilde{\Phi}(x), \quad \tilde{v}|_{y=-0} = \tilde{\Phi}_1(x), \quad 0 \leq x \leq a, \quad (152'')$$

$$\tilde{v}|_{y=+0} = \tilde{\Psi}(x), \quad \tilde{v}|_{y=-0} = \tilde{\Psi}_1(x), \quad b \leq x < \infty. \quad (153'')$$

Решение задачи ищем в виде (54'), считая, что $f(z) \in M_1$ и выполняются краевые условия (160). Тогда краевые условия (154) будут выполняться при постоянной C , определенной равенством (161), и решение задачи 6" сводится к решению следующей краевой задачи теории аналитических функций.

Задача А. В классе функций, аналитических в области g (см. рис. 16), требуется найти функцию $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$, принадлежащую M_1 (т. е. $f(z) = O(|z|^{-1-\varepsilon})$, $\varepsilon = \text{const} > 0$, при $z \rightarrow \infty$), по таким условиям: а) выполняются краевые условия (160), б) на C_1^+ заданы значения $v(x, +0) = \Phi(x)$ (156'), в) на C_2^+ заданы значения $u(x, +0) = \Psi(x)$ (157), г) на C_1 задан скачок $[u]^+ = \lambda(x)$ (158'), д) на C_2 задан скачок $[v]^\pm = \mu^*(x)$ (159). Эта задача не является ни задачей Римана — Гильберта, ни задачей Гильберта, ни задачей Пуанкаре и вообще ранее в литературе не встречалась [15, 16]⁸. Поэтому укажем один из возможных способов решения поставленной задачи А.

Будем искать решение задачи А в виде интеграла типа Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{\lambda(t) + i\mu(t)}{t-z} dt + \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{-\infty}^{-b} + \int_b^{\infty} \right] \frac{\lambda^*(t) + i\mu^*(t)}{t-z} dt, \quad (168)$$

где $\lambda(t)$ — заданная четная функция (158'), $\mu^*(t)$ — заданная нечетная функция (159), $\mu(t)$ — неизвестная нечетная функция при $-a \leq t \leq a$, $\lambda^*(t)$ — неизвестная четная функция при $-\infty < t < -b$, $b < t < \infty$. Очевидно, что интеграл типа Коши (168) удовлетворяет краевому условию (160), и поэтому задача сводится к нахождению $\mu(t)$ и $\lambda^*(t)$.

Вместо $f(z)$ введем новую неизвестную функцию $F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ при помощи равенства

$$F(z) = f(z) - H(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{i\mu(t) dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{-\infty}^{-b} + \int_b^{\infty} \right] \frac{\lambda^*(t) dt}{t-z}, \quad (169)$$

⁸ Отметим, что если вместо краевых условий (152''), (153'') задать значения скачков $[\tilde{f}(z)]^\pm$ на разрезах C_1 , C_2 , то по формулам (59'), (63') можно определить на этих разрезах $[f(z)]^\pm$ и записать $f(z)$ в виде интеграла типа Коши, а следовательно, по формуле (54') определить $\tilde{f}(z)$ в явном виде.

где $H(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ — известная функция,

$$H(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{\lambda(t) dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{-\infty}^{-b} + \int_b^{\infty} \right] \frac{i\mu^*(t) dt}{t-z}. \quad (170)$$

В силу условий «б» и «в» на C_1^+ и на C_2^+ соответственно имеем

$$V|_{y=+0} = \Phi(x) - Q(x, +0), \quad 0 \leq x \leq a, \quad (171)$$

$$U|_{y=+0} = \Psi(x) - P(x, +0), \quad b \leq x < \infty. \quad (172)$$

Пользуясь формулами Сохоцкого, для предельных значений интеграла типа Коши на C_1^+ и на C_2^+ соответственно получаем

$$F(z^+) = \frac{i\mu(x)}{2} + \frac{1}{2\pi i} \int_0^a \frac{i\mu(t) 2tdt}{t^2 - x^2} + \frac{1}{2\pi i} \int_b^{\infty} \frac{\lambda^*(t) 2xdx}{t^2 - x^2}, \quad (173)$$

$$0 < x < a,$$

$$F(z^+) = \frac{\lambda^*(x)}{2} + \frac{1}{2\pi i} \int_0^a \frac{i\mu(t) 2tdt}{t^2 - x^2} + \frac{1}{2\pi i} \int_b^{\infty} \frac{\lambda^*(t) 2xdx}{t^2 - x^2}, \quad (174)$$

$$b < x < \infty.$$

Отсюда и из (171), (172) получаем интегральные соотношения, связывающие значения $\mu(x)$ при $0 < x < a$ и значения $\lambda^*(x)$ при $b < x < \infty$:

$$\mu(x) = \frac{2}{\pi} \int_b^{\infty} \frac{\lambda^*(t) xdt}{t^2 - x^2} + 2(\Phi(x) - Q(x, +0)), \quad 0 < x < a, \quad (175)$$

$$\lambda^*(x) = -\frac{2}{\pi} \int_0^a \frac{\mu(t) tdt}{t^2 - x^2} + 2(\Psi(x) - P(x, +0)), \quad b < x < \infty. \quad (176)$$

Подставляя (176) в (175), находим

$$\mu(x) = -\frac{4}{\pi^2} \int_b^{\infty} \frac{x}{t^2 - x^2} \int_0^a \frac{\mu(\xi) \xi d\xi}{\xi^2 - t^2} dt + \omega(x), \quad (177)$$

где $\omega(x)$ — известная функция в интервале $(0, a)$,

$$\omega(x) = 2(\Phi(x) - Q(x, +0)) + \frac{4x}{\pi} \int_b^{\infty} \frac{\Psi(t) - P(t, +0)}{t^2 - x^2} dt, \quad 0 < x < a. \quad (178)$$

Изменяя в (177) порядок интегрирования, получаем

$$\mu(x) = \omega(x) + \frac{1}{\pi^2} \int_0^a K(x, \xi) \mu(\xi) d\xi, \quad (179)$$

где

$$K(x, \xi) = \frac{2}{x^2 - \xi^2} \left(\xi \ln \frac{b-x}{b+x} - x \ln \frac{b-\xi}{b+\xi} \right). \quad (180)$$

Равенство (179) представляет собой интегральное уравнение Фредгольма второго рода с симметричным непрерывным ядром. Решив его, по формуле (176) можем найти $\lambda^*(x)$. Подставив $\mu(t)$ и $\lambda^*(t)$ в (168), получим решение $f(z)$ задачи A . Подставив $f(z)$ в (54'), найдем решение задачи $6''$.

Задача $6'''$. Условия такие же, как и в задаче 6, только (152) и (153) заменяются краевыми условиями

$$\tilde{u}|_{y=+0} = \tilde{\Phi}(x), \quad \tilde{u}|_{y=-0} = \tilde{\Phi}_1(x), \quad 0 \leq x \leq a, \quad (152''')$$

$$\tilde{u}|_{y=+0} = \tilde{\Psi}(x), \quad \tilde{u}|_{y=-0} = \tilde{\Psi}_1(x), \quad b \leq x < \infty. \quad (153''')$$

Решение задачи ищем в виде (54'), считая, что $f(z) \in M_1$ и выполняются краевые условия (160). Тогда краевые условия (154) будут выполняться при известной постоянной C , определенной равенством (161), и решение задачи $6'''$ сводится к решению следующей краевой задачи теории аналитических функций.

Задача A' . В классе функций, аналитических в g (см. рис. 16) и принадлежащих M_1 , требуется найти функцию $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ по следующим условиям: а) выполняются краевые условия (160), б) на C_1^+ заданы значения $u(x, +0) = \Phi(x)$ (156), в) на C_2^+ заданы значения $v(x, +0) = \Psi(x)$ (157'), г) на C_1 задан скачок $[v]^\pm = \mu(x)$ (158), д) на C_2 задан скачок $[u]^\pm = \lambda^*(x)$ (159'). Считая функции $\lambda(x)$ и $\lambda^*(x)$ четными, а функции $\mu(x)$ и $\mu^*(x)$ нечетными, ищем решение задачи A' в виде (168). В отличие от предыдущего случая функция $F(z)$, определенная равенством (169), известна, а функция $H(z) = P(x, y) + i Q(x, y)$ неизвестна. На C_1^+ и C_2^+ функция $H(z)$ удовлетворяет соответственно краевым условиям

$$P|_{y=+0} = \Phi(x) - U(x, +0), \quad 0 \leq x < a, \quad (181)$$

$$Q|_{y=+0} = \Psi(x) - V(x, +0), \quad b \leq x < \infty. \quad (182)$$

На C_1^+ и на C_2^+ соответственно

$$H(z^+) = \frac{\lambda(x)}{2} + \frac{1}{2\pi i} \int_0^a \frac{\lambda(t) 2x dt}{t^2 - x^2} + \frac{1}{2\pi i} \int_b^\infty \frac{i\mu^*(t) 2t dt}{t^2 - x^2}, \quad (183)$$

$$0 \leq x \leq a,$$

$$H(z^+) = \frac{i\mu^*(x)}{2} + \frac{1}{2\pi i} \int_0^a \frac{\lambda(t) 2x dt}{t^2 - x^2} + \frac{1}{2\pi i} \int_b^\infty \frac{i\mu^*(t) 2t dt}{t^2 - x^2}, \quad (184)$$

$$b \leq x < \infty.$$

Отсюда, учитывая (181), (182), получаем

$$\lambda(x) = -\frac{2}{\pi} \int_b^{\infty} \frac{\mu^*(t) t dt}{t^2 - x^2} + 2(\Phi(x) - U(x, +0)), \quad 0 \leq x \leq a, \quad (185)$$

$$\mu^*(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^a \frac{\lambda(t) x dt}{t^2 - x^2} + 2(\Psi(x) - V(x, +0)), \quad b \leq x < \infty. \quad (186)$$

Подставляя (186) в (185), получаем интегральное уравнение Фредгольма второго рода с симметричным непрерывным ядром

$$\lambda(x) = w(x) + \frac{1}{\pi^2} \int_0^a K(x, \xi) \lambda(\xi) d\xi, \quad (179')$$

где

$$K(x, \xi) = \frac{2}{x^2 - \xi^2} \left[\xi \ln \frac{b - \xi}{b + \xi} - x \ln \frac{b - x}{b + x} \right], \quad (180')$$

$$w(x) = 2(\Phi(x) - U(x, +0)) - \frac{4}{\pi} \int_b^{\infty} \frac{\Psi(t) - V(t, +0)}{t^2 - x^2} t dt, \quad (178')$$

$$0 \leq x \leq a.$$

Если решение интегрального уравнения (179') найдено, то $\mu^*(x)$ можно определить равенством (186). Подставив $\lambda(x)$ и $\mu^*(x)$ в (168), получим решение $f(z)$ задачи A' . С помощью подстановки $f(z)$ в (54') находим решение задачи $6'''$.

Таким образом, замечаем, что решение задачи $6'''$ полностью сводится к решению интегрального уравнения второго рода с симметричным непрерывным ядром $K(x, \xi)$, определенным равенством (180').

Решение краевых задач в полярных координатах

Пусть в дальнейшем $\tilde{\Phi}(\theta)$, $\tilde{\Phi}_1(\theta)$, $\tilde{\Psi}(\theta)$ и $\tilde{\Psi}_1(\theta)$ — заданные достаточное число раз непрерывно дифференцируемые функции от θ при $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ и соответственно при $\alpha \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, где $\alpha = \text{const}$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}\right)$, $\tilde{\chi}(x)$ и $\tilde{\chi}_1(x)$ — заданные достаточное число раз непрерывно дифференцируемые функции при $0 \leq x \leq x_1$ и соответственно при $x_1 \leq x < \infty$, $x_1 = \text{const}$. Далее, $\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y)$ — искомая функция, x^k -аналитическая в области g и непрерывная на границе g , за исключением, может быть, отдельных точек, которые мы будем называть исключительными точками.

Задача 7. Пусть g — полукруг в правой полуплоскости $z = x + iy$, ограниченный дугой окружности $z = \rho e^{i\theta} \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$ и отрезком мнимой оси $[-\rho, \rho]$. Краевые условия для функции $\tilde{f}(z)$:

$$\tilde{u}|_{z=\rho e^{i\theta}} = \tilde{\Phi}(\theta), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad (187)$$

$$\tilde{v}|_{x=0} = 0, \quad -\rho \leq y \leq \rho. \quad (188)$$

исключительные точки: $(0, -\rho)$, $(0, \rho)$. Ищем $\tilde{f}(z)$ в виде (54), принимая за L отрезок мнимой оси $[-\rho, \rho]$ и считая, что $f(z) \subset M$ в g . Записав (54) в виде (100), получаем

$$v|_{x=0} = 0, \quad -\rho \leq y \leq \rho, \quad (189)$$

и краевое условие (188) выполняется. Записав (54) в виде (69) и воспользовавшись формулой обращения (70), находим

$$\operatorname{Re} [f(z) e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \frac{k}{2}}]_{z=\rho e^{i\theta}} = \Phi(\theta), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad (190)$$

где

$$\Phi(\theta) = \begin{cases} \mu \rho^{1-k} \frac{d}{d\theta} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} \frac{d^m \tilde{\Phi}(\varphi) \xi^{k-1}}{(d^2 \sin \varphi)^m} \frac{\cos \varphi d\varphi}{(2 \sin \theta - 2 \sin \varphi)^{\frac{k}{2}-m}}, & k \neq 2m, \\ \mu \rho^{1-k} \cos \theta \frac{d^m \tilde{\Phi}(\theta) x^{k-1}}{(d^2 \sin \theta)^m}, & k = 2m. \end{cases} \quad (191)$$

Записав решение $f(z)$ задачи Римана — Гильберта для области g (189), (190) в квадратурах и подставив его в (54) или (100), получаем решение задачи 7 в явном виде.

В качестве примера полученного решения задачи 7 рассмотрим подробнее случай $k = 1$. В этом случае задача Римана — Гильберта для области g (189) сводится к задаче Римана — Гильберта для круга $|z| < \rho$ при краевом условии

$$\operatorname{Re} [f^*(t) e^{-i\omega(\theta)}]_{t=\rho e^{i\theta}} = \Phi^*(\theta), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2},$$

где

$$\Phi^*(\theta) = \begin{cases} \Phi(\theta) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{d\theta} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} \frac{\tilde{\Phi}(\varphi) \cos \varphi d\varphi}{\sqrt{2 \sin \theta - 2 \sin \varphi}}, & -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \\ \Phi(\pi - \theta), & \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}, \end{cases} \quad (191')$$

$$\omega(\theta) = \begin{cases} \omega_0(\theta) = -\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \frac{1}{2}, & -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \\ -\omega_0(\pi - \theta) = \left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) \frac{1}{2}, & \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}. \end{cases} \quad (191'')$$

Полагая $\omega^* = 2\omega(\theta)$ и выбирая скачки α_1 и α_2 функции $\frac{1}{2}\omega^*$ в точках $\theta = \frac{\pi}{2}$ и $\theta = \frac{3\pi}{2}$ так, как указано в § 1 (см. неравенства (10)), получаем $\omega^* = -\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$ при $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$ и индекс $\kappa = -1$. По формулам (26) и (17') (§ 1) находим

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\rho} i \left[-\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) - (-\varphi + \pi) \right] \left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{2t} \right) dt =$$

$$= -i \frac{3\pi}{4},$$

$$X(z) = e^{-i \frac{3\pi}{4}},$$

и, следовательно, искомое решение задачи Римана — Гильберта существует, единственно и в соответствии с (29) записывается

$$f(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{|t|=\rho} \frac{\Phi^*(\varphi) e^{i\omega(\varphi)}}{t-z} dt, \quad t = \rho e^{i\varphi}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2},$$

или

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \right] \Phi^*(\varphi) e^{i\omega(\varphi)} \frac{\rho e^{i\varphi} d\varphi}{\rho e^{i\varphi} - z}.$$

Полагая в последнем интеграле $\varphi = \pi - \varphi_1$ ($-\frac{\pi}{2} \leq \varphi_1 \leq \frac{\pi}{2}$), находим⁹

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Phi(\varphi) \left[\frac{e^{-i\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{2}} e^{i\varphi}}{\rho e^{i\varphi} - z} + \frac{\rho e^{i\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{2}} e^{i\varphi}}{\rho e^{-i\varphi} + z} \right] \rho d\varphi,$$

⁹ Можно непосредственно убедиться в том, что построенная функция $f(z)$ действительно является искомым решением задачи Римана — Гильберта: сразу же видно, что $\operatorname{Im} \hat{f}(z)|_{x=0} = 0$. Далее, в соответствии с формулами Сохоцкого на дуге $t_0 = \rho e^{i\varphi_0}$ ($-\frac{\pi}{2} < \varphi_0 < \frac{\pi}{2}$)

$$f^+(t_0) = \Phi(\varphi_0) e^{-i\left(\varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{2}} + \frac{1}{\pi i} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Phi(\varphi) \left[\frac{e^{i\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{2}}}{\rho e^{i\varphi} - \rho e^{i\varphi_0}} + \right.$$

$$\left. + \frac{e^{-i\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{2}}}{\rho e^{-i\varphi} + \rho e^{i\varphi_0}} \right] \frac{\rho d\varphi}{t},$$

или

$$f(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Phi(\varphi) \left[\frac{e^{i\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{2}}}{\rho e^{i\varphi} - z} + \frac{e^{-i\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{2}}}{\rho e^{-i\varphi} + z} \right] \frac{\rho dt}{t}, \quad t = \rho e^{i\varphi}.$$

Подставляя последнее равенство в (100) и учитывая, что $u(\xi, y)$ и $\xi v(\xi, y)$ — четные функции от ξ , получаем

$$\begin{aligned} \tilde{f}(z) = & \int_{-x}^x \left\{ \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Phi(\varphi) \left[\frac{e^{i\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{2}}}{\rho e^{i\varphi} - \zeta} + \frac{e^{-i\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{2}}}{\rho e^{-i\varphi} + \zeta} \right] \frac{\rho dt}{t} + \right. \\ & \left. + i\xi \operatorname{Im} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Phi(\varphi) \left[\frac{e^{i\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{2}}}{\rho e^{i\varphi} - \zeta} + \frac{e^{-i\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{2}}}{\rho e^{-i\varphi} + \zeta} \right] \frac{\rho dt}{t} \right\} \frac{d\xi}{\sqrt{x^2 - \xi^2}}, \end{aligned}$$

$$\zeta = \xi + iy.$$

Отсюда после изменения порядка интегрирования по ξ и φ находим

$$\begin{aligned} \tilde{f}(z) = & \operatorname{Re} \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Phi(\varphi) \left[\frac{e^{i\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{2}}}{\sqrt{x^2 - (\rho e^{i\varphi} - iy)^2}} - \frac{e^{-i\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{2}}}{\sqrt{x^2 - (\rho e^{-i\varphi} + iy)^2}} \right] \frac{\rho dt}{t} + \\ & + i \operatorname{Im} \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Phi(\varphi) \left\{ e^{i\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{2}} \left[\frac{\rho e^{i\varphi} - iy}{\sqrt{x^2 - (\rho e^{i\varphi} - iy)^2}} + i \right] + \right. \\ & \left. + e^{-i\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{2}} \left[\frac{\rho e^{-i\varphi} + iy}{\sqrt{x^2 - (\rho e^{-i\varphi} + iy)^2}} - i \right] \right\} \frac{\rho dt}{t}, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} f^+(t_0) e^{i\left(\varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{2}} = & \Phi(\varphi_0) + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Phi(\varphi) \left[\frac{1}{e^{i\frac{\varphi - \varphi_0}{2}} - e^{i\frac{\varphi_0 - \varphi}{2}}} + i \frac{1}{e^{-i\frac{\varphi_0 + \varphi}{2}} + e^{i\frac{\varphi_0 + \varphi}{2}}} \right] d\varphi, \end{aligned}$$

т. е.

$$\operatorname{Re} [f^+(t_0) e^{i\left(\varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{2}}] = \Phi(\varphi_0) \left(-\frac{\pi}{2} < \varphi_0 < \frac{\pi}{2} \right).$$

$$\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\operatorname{Re} \frac{e^{i\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{2}}}{\sqrt{x^2 - (\rho e^{i\varphi} - iy)^2}} + \right. \\ \left. + i \operatorname{Im} e^{i\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{2}} \left(\frac{\rho e^{i\varphi} - iy}{\sqrt{x^2 - (\rho e^{i\varphi} - iy)^2}} + i \right) \right] \Phi(\varphi) \rho d\varphi. \quad (192)$$

Задача 7'. Условия такие же, как и в задаче 7, только (187) заменяется краевым условием

$$\tilde{v}|_{z=\rho e^{i\theta}} = \tilde{\Phi}(\theta), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}. \quad (187')$$

Поступая так же, как и при решении задачи 7, для определения аналитической функции $f(z)$ получаем задачу Пуанкаре для области g при краевых условиях (189) и

$$\operatorname{Im} \left[\frac{df(z)}{dz} e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{k}{2} + 1\right)} \right]_{z=\rho e^{i\theta}} = \Phi(\theta), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad (193)$$

где в соответствии с формулой обращения (70)

$$\Phi(\theta) = \begin{cases} \mu 2\rho^{-1-k} \frac{d}{d\theta} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} \frac{d^{m+1}\tilde{\Phi}(\varphi)}{(d2 \sin \varphi)^{m+1}} \frac{\cos \varphi d\varphi}{(2 \sin \theta - 2 \sin \varphi)^{\frac{k}{2}-m}}, & k \neq 2m, \\ \mu 2\rho^{-1-k} \cos \theta \frac{d^{m+1}\tilde{\Phi}(\theta)}{(d2 \sin \theta)^{m+1}}, & k = 2m. \end{cases} \quad (194)$$

Записав (189) в виде

$$\operatorname{Re} \left[\frac{df(z)}{dz} \right]_{x=0} = 0, \quad -\rho \leq y \leq \rho, \quad (189')$$

приходим к задаче Римана — Гильберта для области g при краевых условиях (189'), (194). Записав решение этой задачи в квадратурах и подставив его в (54) или (100), получаем решение задачи 7' в явном виде.

Задача 7''. Условия такие же, как и в задаче 7, только (187) заменяется краевым условием

$$\left(\alpha_1 \tilde{u} - \beta_1 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \rho} \right)_{z=\rho e^{i\theta}} = \tilde{\Phi}(\theta), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}. \quad (187'')$$

Поступая так же, как и при решении задачи 7, для определения $f(z)$ получаем задачу Пуанкаре для области g при краевых условиях (189) и

$$\left\{ \alpha_1 \operatorname{Re} [f(z) e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\frac{k}{2}}] - \beta_1 \operatorname{Im} \left[\frac{df(z)}{dz} e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{k}{2} + 1\right)} \right] \right\}_{z=\rho e^{i\theta}} = \Phi(\theta), \\ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad (195)$$

где в соответствии с формулой обращения (72) $\Phi(\theta)$ определяется равенством (191). Эта задача сводится к задаче Римана — Гильберта для области g при краевых условиях

$$\operatorname{Im}[F(z)]_{x=0} = 0, \quad -\rho \leq x \leq \rho, \quad (189'')$$

$$\operatorname{Re}[F(z)e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})\frac{k}{2}}]_{z=\rho e^{i\theta}} = \Phi(\theta), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad (195')$$

где

$$F(z) = \alpha_1 f(z) - \beta_1 \frac{z}{\rho} \frac{df(z)}{dz}. \quad (196)$$

Записав $F(z)$, а затем $f(z)$ в квадратурах и подставив $f(z)$ в (54) или (100), получаем решение задачи 7'' в явном виде.

Задача 7'''. Условия такие же, как и в задаче 7'', только краевое условие (187) выполняется при $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \alpha$, а при $\alpha \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ задано краевое условие

$$\left(\alpha_2 \tilde{u} - \beta_2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \rho}\right)_{z=\rho e^{i\theta}} = \tilde{\Psi}(\theta), \quad \alpha \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}; \quad (187''')$$

к числу исключительных точек добавляется точка $z = \rho e^{i\alpha}$. Поступаем точно так же, как и при решении задачи 7'', только для определения $f(z)$ получаем задачу Пуанкаре для области g при краевом условии (195) при $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \alpha$, а также при краевых условиях (187) и

$$\left\{ \alpha_2 \operatorname{Re}[f(z)e^{i(\theta - \frac{\pi}{2})\frac{k}{2}}] + \beta_2 \operatorname{Im}\left[\frac{df(z)}{dz} e^{i(\theta - \frac{\pi}{2})\left(\frac{k}{2} + 1\right)}\right] \right\}_{z=\rho e^{i\theta}} = \Psi(\theta),$$

$$\alpha \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad (197)$$

где в соответствии с формулой обращения (75)

$$\Psi(\theta) = \begin{cases} (-1)^m \mu \rho^{1-k} \frac{d}{d\theta} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \frac{d^m \tilde{\Psi}(\varphi) \xi^{k-1}}{(d2 \sin \varphi)^m} \frac{\cos \varphi d\varphi}{(2 \sin \varphi - 2 \sin \theta)^{\frac{k}{2} - m}}, & k \neq 2m, \\ (-1)^m \mu \rho^{1-k} \cos \theta \frac{d^m \tilde{\Psi}(\theta) x^{k-1}}{(d2 \sin \theta)^m}, & k = 2m. \end{cases} \quad (198)$$

Подставив решение этой задачи Пуанкаре в (54) или (100), находим решение задачи 7'''.

Задача 8. Пусть g — область в правой полуплоскости $z = x + iy$, ограниченная дугой окружности $z = \rho e^{i\theta}$ ($-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) и от-

резками мнимой оси $-\infty \leq y \leq -\rho$, $\rho \leq y \leq \infty$. Краевые условия для функции $\tilde{f}(z)$:

$$\tilde{u}|_{z=\rho e^{i\theta}} = \tilde{\Phi}(\theta), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad (199)$$

$$\tilde{v}|_{x=0} = 0, \quad -\infty < y \leq -\rho, \quad \rho \leq y < \infty; \quad (200)$$

исключительные точки: $(0, -\rho)$, $(0, \rho)$. Решение задачи ищем в виде (54), принимая за L отрезок мнимой оси $\rho \leq y \leq \infty$. Тогда в силу (100) второе из краевых условий (200) выполняется. Предполагаем, что $f(z) \subset M_1$ и $\text{Im}[f(z)e^{-i\pi k}]_{x=0} = 0$ при $-\infty < y \leq -\rho$. Тогда при $y \leq -\rho$ справедливо представление (125') и первое из условий (200) выполняется. Таким образом, приходим к задаче Римана — Гильберта для области g при краевых условиях

$$v|_{x=0} = 0 \quad (\rho \leq y < \infty), \quad \text{Im}[f(z)e^{-i\pi k}]_{x=0} = 0, \quad -\infty < y \leq -\rho, \quad (201)$$

$$\text{Re}[f(z)e^{i(\theta - \frac{\pi}{2})\frac{k}{2}}]_{z=\rho e^{i\theta}} = \Phi(\theta), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad (202)$$

где $\Phi(\theta)$ в соответствии с формулой обращения (74) определяется равенством

$$\Phi(\theta) = \begin{cases} (-1)^m \mu \rho^{1-k} \frac{d}{d\theta} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \frac{d^m \tilde{\Phi}(\varphi) \xi^{k-1}}{(d2 \sin \varphi)^m} \frac{\cos \varphi d\varphi}{(2 \sin \varphi - 2 \sin \theta)^{\frac{k}{2}-m}}, & k \neq 2m, \\ (-1)^m \mu \rho^{1-k} \cos \theta \frac{d^m \tilde{\Phi}(\theta) x^{k-1}}{(d2 \sin \theta)^m}, & k = 2m. \end{cases} \quad (203)$$

Записав решение $f(z)$ задачи Римана-Гильберта (201), (202) в квадратурах и подставив его в (54), получаем решение задачи 8 в явном виде.

Задача 8'. Условия такие же, как и в задаче 8, только (199) заменяется краевым условием

$$\tilde{v}|_{z=\rho e^{i\theta}} = \tilde{\Phi}(\theta), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}. \quad (199')$$

Поступая так же, как и при решении задачи 8, приходим к задаче Пуанкаре для области g при краевых условиях (201) и

$$\text{Im} \left[\frac{df(z)}{dz} e^{i(\theta - \frac{\pi}{2})(\frac{k}{2}+1)} \right]_{z=\rho e^{i\theta}} = \Phi(\theta), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad (202')$$

где в соответствии с формулой обращения (75)

$$\Phi(\theta) = \begin{cases} (-1)^{m-1} \mu 2\rho^{-1-k} \frac{d}{d\theta} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \frac{d^{m+1}\tilde{\Phi}(\varphi)}{(d^2 \sin^2 \varphi)^{m+1}} \frac{\cos \varphi d\varphi}{(2 \sin \varphi - 2 \sin \theta)^{\frac{k}{2}-m}}, \\ k \neq 2m, \\ (-1)^{m-1} \mu 2\rho^{-1-k} \cos \theta \frac{d^{m+1}\tilde{\Phi}(\theta)}{(d^2 \sin^2 \theta)^{m+1}}, \quad k = 2m. \end{cases} \quad (204)$$

Краевые условия (201) можно записать в виде

$$\operatorname{Re} \left. \frac{df(z)}{dz} \right|_{x=0} = 0 \quad (\rho \leq y < \infty), \quad \operatorname{Re} \left[\frac{df(z)}{dz} e^{-i\pi k} \right]_{x=0} = 0, \quad (201') \\ -\infty < y < -\rho.$$

Поэтому $\frac{df(z)}{dz}$ можно найти в квадратурах как решение задачи Римана — Гильберта для области g (201'), (202'). Подставляя $f(z)$ в (54) или в (100), получаем решение задачи 8' в явном виде.

Задача 8''. Условия такие же, как и в задаче 8, только (199) заменяется краевым условием

$$\left(\alpha_1 \tilde{u} - \beta_1 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \rho} \right)_{z=\rho e^{i\theta}} = \tilde{\Phi}(\theta), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}. \quad (199'')$$

Поступая так же, как и при решении задачи 8, приходим к задаче Пуанкаре для области g при краевых условиях (201) и

$$\left\{ \alpha_1 \operatorname{Re} [f(z) e^{i\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\frac{k}{2}}] + \beta_1 \operatorname{Im} \left[\frac{df(z)}{dz} e^{i\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{k}{2}+1\right)} \right] \right\}_{z=\rho e^{i\theta}} = \Phi(\theta), \\ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad (202'')$$

где $\Phi(\theta)$ в соответствии с формулой обращения (75) определяется правой частью равенства (203). Пользуясь обозначением (196), можем записать (201), (202'') в виде

$$\operatorname{Im} F(z)|_{x=0} = 0 \quad (\rho \leq y < \infty), \quad \operatorname{Im} [F(z) e^{-i\pi k}]_{x=0} = 0, \quad (201'') \\ -\infty < y < -\rho,$$

$$\operatorname{Re} [F(z) e^{i\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\frac{k}{2}}]_{z=\rho e^{i\theta}} = \Phi(\theta), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}. \quad (205)$$

Функцию $F(z)$ можно записать в квадратурах как решение задачи Римана — Гильберта для области g (201''), (205). Следовательно, $f(z)$ тоже находится в квадратурах. Подставив $f(z)$ в (54), получаем решение задачи 8'' в явном виде.

Задача 8'''. Условия такие же, как и в задаче 8'', только краевое условие (199'') выполняется при $\alpha \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, а при $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \alpha$

справедливо краевое условие

$$\left(\alpha_2 \tilde{u} - \beta_2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \rho} \right)_{z=\rho e^{i\theta}} = \tilde{\Phi}_1(\theta), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \alpha; \quad (199''')$$

к числу исключительных точек добавляется точка $z = \rho e^{i\alpha}$. Поступаем точно так же, как и при решении задачи 8'', только для определения $f(z)$ получаем задачу Пуанкаре для области g при краевых условиях (201), при краевом условии (202''), если $\alpha \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, и краевом условии

$$\left\{ \alpha_2 \operatorname{Re} [f(z) e^{i(\theta - \frac{3\pi}{2}) \frac{k}{2}}] - \beta_2 \operatorname{Im} \left[\frac{df(z)}{dz} e^{i(\theta - \frac{3\pi}{2})(\frac{k}{2} + 1)} \right] \right\}_{z=\rho e^{i\theta}} = \Phi_1(\theta), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \alpha, \quad (202''')$$

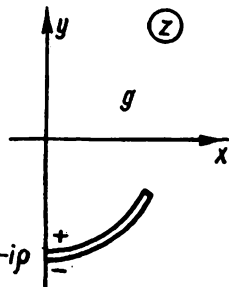


Рис. 17.

где $\Phi_1(\theta)$ в соответствии с (72) — правая часть равенства (191) при условии, что вместо $\tilde{\Phi}(\varphi)$ и $\tilde{\Phi}(\theta)$ подставляется $\tilde{\Phi}_1(\varphi)$ и $\tilde{\Phi}_1(\theta)$. Подставив $f(z)$ в (54), получаем решение задачи 8''.

Задача 9. Пусть g — правая полуплоскость $z = x + iy$ с разрезом C_1 вдоль дуги окружности $z = \rho e^{i\theta}$ ($-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$) (рис. 17), краевые условия для $\tilde{f}(z)$:

$$\tilde{u}|_{|z|=\rho-0} = \tilde{\Phi}(\theta), \quad \tilde{u}|_{|z|=\rho+0} = \tilde{\Phi}_1(\theta), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \alpha, \quad (206)$$

$$\tilde{v}|_{x=0} = 0, \quad -\infty \leq y \leq -\rho, \quad -\rho \leq y \leq \infty; \quad (207)$$

исключительные точки: $(0, -\rho + 0)$, $(0, -\rho - 0)$, $\rho e^{i\alpha}$. Решение задачи ищем в виде (54), принимая за L отрезок мнимой оси $-\rho \leq y \leq \infty$. Предполагаем, что $f(z) \subset M_1$ и

$$v|_{x=0} = 0 \quad (-\rho \leq y < \infty), \quad \operatorname{Im} [f(z) e^{-i\pi h}]_{x=0} = 0, \quad (208)$$

$$-\infty < y \leq -\rho.$$

Тогда при $y \leq -\rho$ справедливо представление (125') и краевые условия (207) выполняются. На C_1^+ ($|z| = \rho - 0$) из формулы обращения (70) получаем

$$\operatorname{Re} [f(z) e^{i(\theta + \frac{\pi}{2}) \frac{k}{2}}]_{z=\rho e^{i\theta}} = \Phi(\theta), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \alpha, \quad (209)$$

где $\Phi(\theta)$ — правая часть равенства (191). На C_1^- ($|z| = \rho + 0$) в соответствии с (125')

$$\begin{aligned} \tilde{f}(z^-) = & \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} x^{1-k} \rho^{k-1} \operatorname{Re} [f(\xi^-) e^{-i\pi k} e^{i\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \frac{k}{2}}] (2 \sin \theta - 2 \sin \varphi)^{\frac{k}{2}-1} d\varphi + \\ & + i \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} \frac{1}{k} \rho^{k+1} \operatorname{Im} \left[\frac{df(\xi^-)}{d\xi^-} e^{-i\pi k} e^{i\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \left(\frac{k}{2} + 1\right)} \right] (2 \sin \theta - 2 \sin \varphi)^{\frac{k}{2}} d\varphi. \end{aligned} \quad (210)$$

Применяя к этому интегральному представлению формулу обращения (72), на C_1^- получаем

$$\operatorname{Re} [f(z^-) e^{i\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right) \frac{k}{2}}]_{|z=\rho e^{i\theta}} = \Phi_1(\theta), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \alpha, \quad (211)$$

где $\Phi_1(\theta)$ — функция, определенная правой частью равенства (191) при условии, что вместо $\Phi(\varphi)$ и $\tilde{\Phi}(\theta)$ подставляются $\tilde{\Phi}_1(\varphi)$ и $\tilde{\Phi}_1(\theta)$. Таким образом, $f(z)$ можно записать в квадратурах как решение задачи Римана — Гильберта для области g при краевых условиях (208), (209), (211). Подставив $\tilde{f}(z)$ в (54), получаем решение задачи 9 в явном виде.

Например, при $k = 1$, $\tilde{\Phi}_1(\theta) \equiv \tilde{\Phi}(\theta)$ для этого решения справедливо равенство

$$\begin{aligned} \tilde{f}(z) = & \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y) = \\ = & \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \left[\operatorname{Re} \frac{e^{i\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \frac{1}{2}}}{\sqrt{x^2 - (\rho e^{i\varphi} - iy)^2}} + i \operatorname{Im} \frac{e^{i\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \frac{1}{2}}}{\sqrt{x^2 - (\rho e^{i\varphi} - iy)^2}} \times \right. \\ & \left. \times \left(\frac{\rho e^{i\varphi} - iy}{\sqrt{x^2 - (\rho e^{i\varphi} - iy)^2}} + i \right) \right] \Phi(\varphi) \rho d\varphi, \end{aligned} \quad (212)$$

где

$$\Phi(\varphi) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{d\varphi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\varphi} \tilde{\Phi}(\theta) \frac{\cos \vartheta d\theta}{\sqrt{2 \sin \varphi - 2 \sin \theta}}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \alpha < \frac{\pi}{2}. \quad (212')$$

В самом деле, так же как и при решении задачи 7, при $k = 1$ убеждаемся, что аналитическая функция

$$\begin{aligned} f(z) = & u(x, y) + iv(x, y) = \\ = & \frac{1}{\pi i} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \Phi(\varphi) \left[\frac{e^{i\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \frac{1}{2}}}{\rho e^{i\varphi} - z} + \frac{e^{-i\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \frac{1}{2}}}{\rho e^{-i\varphi} + z} \right] \frac{\rho dt}{t}, \quad t = \rho e^{i\varphi}, \end{aligned}$$

удовлетворяет краевым условиям (208), (209) и условию «б», указанному при решении задачи 3. На C_1^- ($|z| = \rho + 0$)

$$f^-(t_0) = -\Phi(\varphi_0) e^{-i\left(\varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) \frac{1}{2}} + \\ + \frac{1}{\pi i} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \Phi(\varphi) \left[\frac{e^{i\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \frac{1}{2}}}{\rho e^{i\varphi} - \rho e^{i\varphi_0}} + \frac{e^{-i\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \frac{1}{2}}}{\rho e^{-i\varphi} + \rho e^{i\varphi_0}} \right] \frac{\rho dt}{t}, \quad t_0 = \rho e^{i\varphi_0},$$

или

$$f^-(t_0) e^{i\left(\varphi_0 - \frac{3\pi}{2}\right) \frac{1}{2}} = \Phi(\varphi_0) - \\ - \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \Phi(\varphi) \left[\frac{1}{e^{\frac{i(\varphi - \varphi_0)}{2}} - e^{\frac{i(\varphi_0 - \varphi)}{2}}} + \frac{i}{e^{-\frac{i(\varphi_0 + \varphi)}{2}} + e^{\frac{i(\varphi_0 + \varphi)}{2}}} \right] d\varphi,$$

и, следовательно, краевое условие (211) выполняется. Подставляя $f(z)$ в (100) и учитывая, что $u(\xi, y)$ и $\xi v(\xi, y)$ — четные функции от ξ , получаем

$$\tilde{f}(z) = \int_{-x}^x \left\{ \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \Phi(\varphi) \left[\frac{e^{i\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \frac{1}{2}}}{\rho e^{i\varphi} - \zeta} + \frac{e^{-i\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \frac{1}{2}}}{\rho e^{-i\varphi} + \zeta} \right] \frac{\rho dt}{t} + \right. \\ + i\xi \operatorname{Im} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \Phi(\varphi) \left[\frac{e^{i\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \frac{1}{2}}}{\rho e^{i\varphi} - \zeta} + \right. \\ \left. \left. + \frac{e^{-i\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \frac{1}{2}}}{\rho e^{-i\varphi} + \zeta} \right] \frac{\rho dt}{t} \right\} \frac{d\xi}{\sqrt{x^2 - \xi^2}}, \quad \zeta = \xi + iy.$$

Изменяя здесь порядок интегрирования по φ и ξ и вычисляя интеграл по ξ точно так же, как мы это делали при решении задачи 7, получаем формулу (212).

Отметим, в частности, что если $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то формула (212) является решением задач 7 и 8 (при $k = 1$). Первое из этих утверждений было установлено при рассмотрении задачи 7, второе утверждение вытекает непосредственно из приведенных выкладок.

В общем случае при $k = 1$, $\tilde{\Phi}_1(\theta) \neq \tilde{\Phi}(\theta)$ решение задачи 9 можно записать следующим образом:

$$\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y) =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \left[\operatorname{Re} \frac{e^{i\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{2}}}{\sqrt{x^2 - (\rho e^{i\varphi} - iy)^2}} + i \operatorname{Im} e^{i\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{2}} \times \right. \\
&\quad \times \left. \left(\frac{\rho e^{i\varphi} - iy}{\sqrt{x^2 - (\rho e^{i\varphi} - iy)^2}} + i \right) \right] \Phi^*(\varphi) \rho d\varphi + \\
&+ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_{-x}^x \frac{1}{\sqrt{G(\zeta)}} \left[\frac{e^{i\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{2}}}{e^{i\varphi} - \zeta} + \frac{e^{-i\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{2}}}{\rho e^{-i\varphi} + \zeta} \right] \frac{d\zeta}{\sqrt{x^2 - \zeta^2}} + \right. \\
&\quad \left. + i \operatorname{Im} \frac{1}{2\pi i} \int_{-x}^x \frac{1}{\sqrt{G(\zeta)}} \left[\frac{e^{i\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{2}}}{\rho e^{i\varphi} - \zeta} + \frac{e^{-i\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{2}}}{\rho e^{-i\varphi} + \zeta} \right] \frac{\zeta d\zeta}{\sqrt{x^2 - \zeta^2}} \right\} \times \\
&\quad \times \Phi_1^*(\varphi) \sqrt{G(t)} \rho dt, \quad \zeta = \xi + iy, \quad t = \rho e^{i\varphi}, \quad (213)
\end{aligned}$$

где

$$\Phi^*(\varphi) = \frac{1}{2} [\Phi(\varphi) + \Phi_1(\varphi)], \quad \Phi_1^*(\varphi) = \frac{1}{2} [\Phi(\varphi) - \Phi_1(\varphi)], \quad (213')$$

$\Phi(\varphi)$ определяется равенством (212'), $\Phi_1(\varphi)$ — этим же равенством при условии, что в его правой части вместо $\tilde{\Phi}(\vartheta)$ подставляется $\tilde{\Phi}_1(\vartheta)$

$$G(z) = \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \frac{1}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \frac{1}{2}} \right)^2 - \left(i \frac{\rho i + z}{\rho i - z} \right)^2, \quad (213'')$$

$$G(t) = G(z)|_{z=\rho e^{i\varphi}} = \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \frac{1}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \frac{1}{2}} \right)^2 - \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \frac{1}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \frac{1}{2}} \right)^2. \quad (213''')$$

При этом считается, что $\arg G(t) = 0$ и $\arg G(z)$ обращается в нуль, когда точка z лежит на C_1^+ ($|z| = \rho - 0$). В самом деле, на основании сказанного выше первое слагаемое правой части равенства (213) представляет собой x -аналитическую функцию, удовлетворяющую краевому условию (207) (при $-\infty < y < -\rho$ вместо нуля в правой части равенства (207) в общем случае будет некоторая постоянная), а также первому и второму краевым условиям (209) при одной и той же правой части $\Phi^*(\vartheta)$. $\Phi^*(\varphi)$ определяется правой частью равенства (212'') при условии, что вместо $\tilde{\Phi}(\vartheta)$ подставля-

ется $\tilde{\Phi}^*(\vartheta) = \frac{1}{2}[\tilde{\Phi}(\vartheta) + \tilde{\Phi}_1(\vartheta)]$. Аналитическая функция

$$f_1(z) = \frac{1}{\sqrt{G(z)}} \frac{1}{\pi i} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \sqrt{G(t)} \Phi_1^*(\varphi) \left[\frac{e^{i\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{2}}}{\rho e^{i\varphi} - z} + \frac{e^{-i\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{2}}}{\rho e^{-i\varphi} + z} \right] \frac{\rho dt}{t},$$

$$t = \rho e^{i\varphi},$$

удовлетворяет краевому условию (208) и на C_1^+ ($|z| = \rho - 0$) — краевому условию (209) при правой части, равной $\Phi_1^*(\vartheta)$. Функция $\omega(z) = i \frac{\rho i + z}{\rho i - z}$ конформно и однолистно отображает плоскость z на плоскость ω . При этом разрез C_1 переходит в разрез вдоль ве-

щественной оси от точки $\omega = 0$ до точки $\omega = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \frac{1}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \frac{1}{2}}$.

Функция $G(z) = \omega^2(\rho e^{i\alpha}) - \omega^2(z)$ в точке $z = \rho e^{i\alpha}$ имеет нуль первого порядка, и поэтому ее аргумент на C_1^- ($|z| = \rho + 0$) равен 2π . Учитывая это, в соответствии с формулами Сохоцкого на C_1^- , получаем

$$\begin{aligned} \bar{f}_1(t_0) &= \Phi_1^*(\varphi_0) e^{-i\left(\varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{2}} - \frac{1}{\sqrt{G(t_0)}} \frac{1}{\pi i} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\alpha} G(t) \Phi_1^*(\varphi) \times \\ &\times \left[\frac{e^{i\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{2}}}{\rho e^{i\varphi} - \rho e^{i\varphi_0}} + \frac{e^{-i\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{2}}}{\rho e^{-i\varphi} + \rho e^{i\varphi_0}} \right] \frac{\rho dt}{t}, \quad t_0 = \rho e^{i\varphi_0}, \quad t = \rho e^{i\varphi}, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \bar{f}_1(t_0) e^{i\left(\varphi_0 - \frac{3\pi}{2}\right)\frac{1}{2}} &= -\Phi_1^*(\varphi_0) + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{G(t_0)}} \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \sqrt{G(t)} \Phi_1^*(\varphi) \left[\frac{e^{i\left(\varphi + \varphi_0\right)\frac{1}{2}}}{e^{i\varphi} - e^{i\varphi_0}} + \frac{e^{i\left(\varphi_0 - \varphi\right)\frac{1}{2}}}{e^{-i\varphi} + e^{i\varphi_0}} \right] d\varphi. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{Re} [\bar{f}_1(t_0) e^{i\left(\varphi_0 - \frac{3\pi}{2}\right)\frac{1}{2}}] = -\Phi_1^*(\varphi_0).$$

Далее, функция $f_1(z)$ удовлетворяет условию «б», указанному при решении задачи 3. Подставляя $f_1(z)$ в (100) (при $-\rho < y < \infty$) или в (54), получаем x -аналитическую функцию $\tilde{f}_1(z)$, которая

совпадает со вторым слагаемым правой части равенства (213) и обладает такими свойствами: удовлетворяет краевому условию (207) (в правой части равенства (207) при $-\infty < y < -\rho$ вместо нуля может быть некоторая постоянная, определяющаяся вычетом функции $f_1(z)$ в бесконечно удаленной точке) и обоим краевым условиям (206) соответственно при правых частях $\tilde{\Phi}_1^*(\theta)$ и $-\tilde{\Phi}_1^*(\theta)$, причем $\Phi_1^*(\theta)$ определяется функцией $\tilde{\Phi}_1^*(\theta) = \frac{1}{2} [\tilde{\Phi}(\theta) - \tilde{\Phi}_1(\theta)]$ при помощи равенства (212').

Таким образом, x -аналитическая функция $\tilde{f}(z)$, определенная формулой (213), удовлетворяет краевому условию (207) (с заменой в общем случае при $-\infty < y < -\rho$ нуля в правой части равенства (207) некоторой постоянной), первому из краевых условий (206) при правой части, равной $\tilde{\Phi}(\theta) = \tilde{\Phi}^*(\theta) + \tilde{\Phi}_1^*(\theta)$, и второму краевому условию (206) при правой части, равной $\tilde{\Phi}_1(\theta) = \tilde{\Phi}^*(\theta) - \tilde{\Phi}_1^*(\theta)$. Высказанное утверждение доказано¹⁰.

Задача 9'. Условия такие же, как и в задаче 9, только (206) заменяется краевыми условиями

$$\tilde{v}|_{|z|=\rho-0} = \tilde{\Phi}(\theta), \quad \tilde{v}|_{|z|=\rho+0} = \tilde{\Phi}_1(\theta), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}. \quad (206')$$

Поступая так же, как и при решении задачи 9, для определения аналитической функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, принадлежащей множеству M_1 , получаем задачу Пуанкаре для области g при краевых условиях (208) и

$$\operatorname{Im} \left[\frac{df(z^+)}{dz^+} e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{k}{2} + 1\right)} \right]_{z=\rho e^{i\theta}} = \Phi(\theta), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \alpha, \quad (209')$$

$$\operatorname{Im} \left[\frac{df(z^-)}{dz^-} e^{i\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right)\frac{k}{2}} e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} \right]_{z=\rho e^{i\theta}} = \Phi_1(\theta), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \alpha, \quad (211')$$

где в соответствии с (70) $\Phi(\theta)$ — правая часть равенства (194), $\Phi_1(\theta)$ определяется правой частью равенства (198) при условии, что вместо $\tilde{\Phi}(\varphi)$ и $\tilde{\Phi}(\theta)$ подставляются $\tilde{\Phi}_1(\varphi)$ и $\tilde{\Phi}_1(\theta)$. Записав

¹⁰ Задачу о нахождении вещественной части функции $\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y)$ в данном случае можно рассматривать как задачу теории осесимметричного потенциала о нахождении потенциала сферического кругового диска. Однако в отличие от решения задачи о потенциале плоского кругового диска решения задачи теории осесимметричного потенциала и приводимых ниже задач о разрезе вдоль дуги окружности в плоскости осевого сечения до настоящего времени в явном виде, насколько нам известно, в литературе не приводились, несмотря на классический характер и бесспорную важность их как задач математической физики.

(208) в виде

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} \frac{df(z)}{dz} \Big|_{x=0} &= 0, & -\rho \leq y < \infty, \\ \operatorname{Im} \left[\frac{df(z)}{dz} e^{-i\pi k} \right]_{x=0} &= 0, & -\infty < y < -\rho, \end{aligned} \right\} \quad (208')$$

можно найти $\frac{df(z)}{dz}$ в квадратурах как решение задачи Римана — Гильберта для области g (208'), (209'), (211'). Подставив $f(z)$ в (54), получаем решение задачи 9' в явном виде.

Задача 9". Условия такие же, как и в задаче 9, только (206) заменяется краевыми условиями

$$\left(\alpha_1 \tilde{u} - \beta_1 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \rho} \right)_{|z|=\rho-0} = \tilde{\Phi}(\theta), \quad \left(\alpha_2 \tilde{u} - \beta_2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \rho} \right)_{|z|=\rho+0} = \tilde{\Phi}_1(\theta), \quad (206'')$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \alpha.$$

Поступая так же, как и при решении задачи 9 для определения $f(z) \in M_1$, приходим к задаче Пуанкаре для области g при краевых условиях (208) и

$$\left\{ \alpha_1 \operatorname{Re} [f(z^+) e^{i(\theta + \frac{\pi}{2}) \frac{k}{2}}] - \beta_1 \operatorname{Im} \left[\frac{df(z^+)}{dz^+} e^{i(\theta + \frac{\pi}{2}) (\frac{k}{2} + 1)} \right] \right\}_{z=\rho e^{i\theta}} = \Phi(\theta),$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \alpha, \quad (209'')$$

$$\left\{ \alpha_2 \operatorname{Re} [f(z^-) e^{i(\theta - \frac{3\pi}{2}) \frac{k}{2}}] - \right.$$

$$\left. - \beta_2 \operatorname{Im} \left[\frac{df(z^-)}{dz^-} e^{i(\theta - \frac{3\pi}{2}) \frac{k}{2}} e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})} \right] \right\}_{z=\rho e^{i\theta}} = \Phi_1(\theta), \quad (211'')$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \alpha,$$

где $\Phi(\theta)$ — правая часть равенства (191), $\Phi_1(\theta)$ — также правая часть (191), но при условии, что вместо $\tilde{\Phi}(\varphi)$ и $\tilde{\Phi}(\theta)$ подставляются $\tilde{\Phi}_1(\varphi)$, $\tilde{\Phi}_1(\theta)$. Эта задача Пуанкаре в случаях 1) $\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 = 0$, 2) $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, 3) $\beta_1 = \beta_2 = 0$ сводится к задаче Римана — Гильберта для области g . Например, при $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$ краевые условия указанной задачи Римана — Гильберта имеют вид

$$\operatorname{Im} F(z) \Big|_{x=0} = 0, \quad -\rho \leq y < \infty, \quad \operatorname{Im} [F(z) e^{-i\pi k}]_{x=0} = 0, \quad (214)$$

$$-\infty < y < -\rho,$$

$$\operatorname{Re} [F(z^+) e^{i(\theta + \frac{\pi}{2}) \frac{k}{2}}]_{z=\rho e^{i\theta}} = \Phi(\theta), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \alpha, \quad (215)$$

$$\operatorname{Re} [F(z^-) e^{i(\theta - \frac{3\pi}{2}) \frac{k}{2}}]_{z=\rho e^{i\theta}} = \Phi_1(\theta), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \alpha, \quad (216)$$

где $F(z)$ — функция, определенная равенством (196). Подставив $f(z)$ в (54), получаем решение задачи 9", причем в случаях 1—3 это решение выражается в квадратурах.

Задача 10. Пусть g — область, ограниченная дугой окружности $|z| = \rho$, прямолинейным горизонтальным отрезком и отрезком мнимой оси (рис. 18, а), краевые условия для $\tilde{f}(z)$:

$$\left(\alpha_1 \tilde{u} - \beta_1 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \rho} \right)_{z=\rho e^{i\theta}} = \tilde{\Phi}(\theta), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \alpha, \quad (217)$$

$$\left(\alpha_2 \tilde{u} - \beta_2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right)_{y=y_1} = \tilde{\chi}(x), \quad 0 \leq x \leq x_1, \quad (218)$$

$$\tilde{v}|_{x=0} = 0, \quad -\rho \leq y \leq y_1; \quad (219)$$

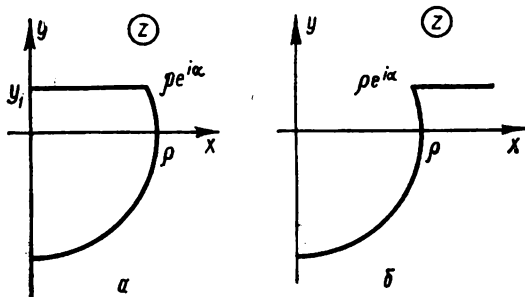


Рис. 18.

исключительные точки: $(0, -\rho)$, $(0, y_1)$, $\rho e^{i\alpha}$, где $x_1 = \rho \cos \alpha$, $y_1 = \rho \sin \alpha$, $\alpha = \text{const}$ $\left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$. Принимаем искомое решение в виде (54), за L — отрезок мнимой оси $-\rho \leq y \leq y_1$. Для определения $\tilde{f}(z) \in M$ получаем задачу Пуанкаре для области g при краевых условиях

$$v|_{x=0} = 0, \quad -\rho \leq y \leq y_1, \quad (220)$$

$$\left\{ \alpha_1 \text{Re}[f(z) e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\frac{k}{2}}] - \beta_1 \text{Im} \left[\frac{df(z)}{dz} e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{k}{2} + 1\right)} \right] \right\}_{z=\rho e^{i\theta}} = \Phi(\theta), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \alpha, \quad (221)$$

$$\left(\alpha_1 \text{Re} f(z) + \beta_1 \text{Im} \frac{df(z)}{dz} \right)_{y=y_1} = \chi(x), \quad 0 \leq x \leq x_1, \quad (222)$$

где $\Phi(\theta)$ — правая часть равенства (191) (в соответствии с формулой обращения (72)), $\chi(x)$ — известная функция, определенная правой частью равенства (101) при условии, что вместо $\tilde{\Phi}(\xi)$ и $\tilde{\Phi}(x)$ подставляются $\tilde{\chi}(\xi)$ и $\tilde{\chi}(x)$. Эта задача Пуанкаре сводится к задаче Римана — Гильберта для области g , если: а) $\beta_1 = \beta_2 = 0$, б) $\alpha_1 =$

$= \alpha_2 = 0$, в) $\beta_2 = \alpha_1 = 0$, г) $\beta_1 = \alpha_2 = 0$. Во всех этих случаях функция $f(z)$ находится в квадратурах. Подставив ее в (54) или (100), получаем решение задачи 10 в явном виде.

Замечание. Если краевое условие (216) задачи 10 заменить краевым условием

$$(\alpha_1 x^{k-1} \tilde{u} - \beta_1 \tilde{v})_{y=y_1} = \tilde{\chi}(x) x^{k-1}, \quad 0 \leq x \leq x_1, \quad (218')$$

методика решения будет такая же, как и в случае задачи 10, только краевое условие (222) заменится краевым условием

$$(\alpha_1 u - \beta_1 x v)_{y=y_1} = \chi(x), \quad 0 \leq x \leq x_1, \quad (222')$$

где $\chi(x)$ — правая часть равенства (101) при условии, что вместо $\tilde{\Phi}(\xi)$ и $\tilde{\Phi}(x)$ подставляются $\tilde{\chi}(\xi)$ и $\tilde{\chi}(x)$.

Задача 11. Пусть g — область в правой полуплоскости $z = x + iy$, внешняя по отношению к области, рассмотренной в задаче 10 (см. рис. 18, а), краевые условия для $f(z)$: (217), (218) и

$$\tilde{v}|_{x=0} = 0, \quad -\infty < y \leq -\rho, \quad y_1 \leq y < \infty; \quad (223)$$

исключительные точки те же, что и в задаче 10. Решение задачи ищем в виде (54). Принимаем за L отрезок мнимой оси $y_1 \leq y < \infty$. Считаем, что $f(z) \in M_1$ и

$$\left. \begin{aligned} v|_{x=0} &= 0, \quad y_1 \leq y < \infty; \\ \operatorname{Im} [f(z) e^{-i\pi k}]_{x=0} &= 0, \quad -\rho \leq y < \infty. \end{aligned} \right\} \quad (224)$$

Приходим к задаче Пуанкаре для области g при краевых условиях (224), (222) и

$$\left\{ \begin{aligned} &\alpha_1 \operatorname{Re} [f(z) e^{i\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right) \frac{k}{2}}] - \\ &- \beta_1 \operatorname{Im} \left[\frac{df(z)}{dz} e^{i\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right) \left(\frac{k}{2} + 1\right)} \right] \Big|_{z=\rho e^{i\theta}} = \Phi(\theta), \end{aligned} \right. \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \alpha, \quad (225)$$

где $\Phi(\theta)$ — правая часть равенства (191) (в соответствии с формулой обращения (72)). Эта задача в тех же случаях, что и предыдущая, сводится к задаче Римана — Гильберта для области g и решается в квадратурах. Подставив $f(z)$ в (54), получаем в указанных случаях решение задачи 11 в явном виде.

Замечание. Если краевое условие (218) задачи 11 заменить краевым условием (218'), все остается без изменений — только краевое условие (222) заменится краевым условием (222').

Задача 12. Пусть g — область, ограниченная дугой окружности $z = \rho e^{i\theta} \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \alpha\right)$, отрезком мнимой оси $-\rho \leq y < \infty$ и прямой горизонтальным отрезком $x_1 \leq x \leq \infty$, $y = y_1$, где

$x_1 = \rho \cos \alpha$, $y_1 = \rho \sin \alpha$ $\left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 18, б), краевые условия для $\tilde{f}(z)$: (217) и

$$\left(\alpha_2 \tilde{u} - \beta_2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}\right)_{y=y_1} = \tilde{\chi}_1(x), \quad x_1 \leq x < \infty, \quad (226)$$

$$v|_{x=0} = 0, \quad -\rho \leq y < \infty; \quad (227)$$

исключительные точки: $(0, -\rho)$, $\rho e^{i\alpha}$. Приняв $\tilde{f}(z)$ в виде (54), за L — часть мнимой оси $-\rho \leq y < \infty$ и предположив, что $f(z) \subset \subset M_1$, приходим к задаче Пуанкаре для области g при краевых условиях (221) и

$$v|_{x=0} = 0, \quad -\rho \leq y < \infty, \quad (228)$$

$$\left\{\alpha_2 \operatorname{Re} [f(z) e^{-i\pi\left(\frac{k}{2}-1\right)}] - \beta_2 \operatorname{Im} \left[\frac{df(z)}{dz} e^{-i\pi\frac{k}{2}} \right] \right\}_{y=y_1} = \chi_1(x), \quad (229)$$

$$x_1 \leq x < \infty,$$

где $\chi_1(x)$ определяется правой частью равенства (119) при условии, что вместо $\tilde{\Psi}(\xi)$ и $\tilde{\Psi}(x)$ подставляются $\tilde{\chi}_1(\xi)$ и $\tilde{\chi}_1(x)$. Эта задача Пуанкаре в случаях «а» — «г», указанных при решении задачи 10, сводится к задаче Римана — Гильберта для области g . Записав решение $f(z)$ в квадратурах и подставив его в (54), получаем решение задачи 12 в явном виде.

Замечание. Если краевое условие (266) задачи 12 заменить краевым условием

$$(\alpha_2 x^{k-1} \tilde{u} - \beta_2 \tilde{v})_{y=y_1} = \tilde{\chi}_1(x) x^{k-1}, \quad x_1 \leq x < \infty, \quad (226')$$

то все остается без изменений, только краевое условие (229) в соответствии с (63) заменяется краевым условием

$$\left\{\alpha_2 \operatorname{Re} [f(z) e^{-i\pi\left(\frac{k}{2}-1\right)}] - \beta_2 x \operatorname{Im} [f(z) e^{-i\pi\left(\frac{k}{2}-1\right)}] \right\}_{y=y_1} = \chi_1(x), \quad (229')$$

$$x_1 \leq x < \infty,$$

где $\chi_1(x)$ определяется правой частью равенства (119) при условии, что вместо $\tilde{\Psi}(\xi)$ и $\tilde{\Psi}(x)$ подставляются $\tilde{\chi}_1(\xi)$ и $\tilde{\chi}_1(x)$.

Задача 13. Пусть g — область, ограниченная отрезком мнимой оси $-\infty \leq y \leq -\rho$, дугой окружности и прямолинейным горизонтальным отрезком, указанными в условиях задачи 12 (см. рис. 18, б). Краевые условия для $\tilde{f}(z)$: (117), (226) и

$$\tilde{v}|_{x=0} = 0, \quad -\infty < y \leq -\rho; \quad (230)$$

исключительные точки: $(0, -\rho)$, $\rho e^{i\alpha}$. Ищем решение в виде (54), принимая за L часть мнимой оси $-\infty < y \leq -\rho$ и считая, что функция $f(z) \subset M_1$. Приходим к задаче Пуанкаре для области g

при краевых условиях (221) и

$$v|_{x=0} = 0, \quad -\infty < y \leq -\rho, \quad (231)$$

$$\left\{ \alpha_2 \operatorname{Re} [f(z) e^{i\pi(\frac{k}{2}-1)}] - \beta_2 \operatorname{Im} \left[\frac{df(z)}{dz} e^{i\pi\frac{k}{2}} \right] \right\}_{y=y_1} = \chi_1(x), \quad (232)$$

$$x_1 \leq x < \infty,$$

где $\chi_1(x)$ определяется правой частью равенства (119) при условии, что вместо $\tilde{\Psi}(\xi)$ и $\tilde{\Psi}(x)$ подставляются $\tilde{\chi}_1(\xi)$ и $\tilde{\chi}_1(x)$. Эта задача Пуанкаре в случаях «а» — «г», указанных при решении задачи 10,

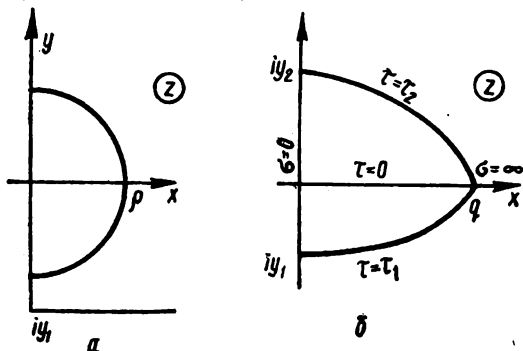


Рис. 19.

сводится к задаче Римана — Гильберта для области g . Записав решение $f(z)$ в квадратурах и подставив его в (54), получаем решение задачи 13 в явном виде.

Замечание. Если краевое условие (226) задачи 13 заменить краевым условием (226), то все остается без изменений, только краевое условие (232) в соответствии с (63) заменяется краевым условием

$$\left\{ \alpha_2 \operatorname{Re} [f(z) e^{i\pi(\frac{k}{2}-1)}] - \beta_2 x \operatorname{Im} [f(z) e^{i\pi(\frac{k}{2}-1)}] \right\}_{y=y_1} = \chi_1(x), \quad (232')$$

$$x_1 \leq x < \infty,$$

где $\chi_1(x)$ определяется правой частью равенства (119) при условии, что вместо $\tilde{\Psi}(\xi)$ и $\tilde{\Psi}(x)$ подставляются $\tilde{\chi}_1(\xi)$ и $\tilde{\chi}_1(x)$.

Задача 14. Пусть g — область, ограниченная полуокружностью $|z| = \rho$, прямолинейным горизонтальным отрезком $0 \leq x \leq \infty$, $y = y_1$ и отрезками мнимой оси $\rho \leq y \leq \infty$, $y_1 \leq y \leq -\rho$ (рис. 19, а). Требуется найти функцию $\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y)$, x -аналитическую в g при краевых условиях (199'') и

$$\left(\alpha_2 \tilde{u} - \beta_2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right)_{y=y_1} = \tilde{\chi}(x), \quad 0 \leq x < \infty, \quad (233)$$

$$\tilde{v}|_{x=0} = 0, \quad y_1 \leq y \leq -\rho; \quad \tilde{v}|_{x=0} = C, \quad \rho \leq y < \infty, \quad (234)$$

где C — постоянная (заранее не задается). Исключительные точки: $(0, \rho)$, $(0, -\rho)$, $(0, y_1)$.

Решение задачи ищем в виде (54'), принимая за L отрезок мнимой оси $y_1 \leq y \leq -\rho$. Предполагая, что $f(z) \in M_1$, по аналогии с (146) и (125), при $y > \rho$ получаем

$$\tilde{f}(z) = \tilde{f}_1(z) + \tilde{f}_2(z), \quad (235)$$

где $\tilde{f}_1(z) = \tilde{u}_1(x, y) + i\tilde{v}(x, y)$ — функция (148),

$$\begin{aligned} \tilde{f}_2(z) = \tilde{u}_2(x, y) + i\tilde{v}_2(x, y) = \operatorname{Re} \int_0^\infty f(\xi)(z - \xi)^{-\frac{1}{2}} (\bar{z} + \xi)^{-\frac{1}{2}} d\xi + \\ + i \operatorname{Im} \int_0^\infty f(\xi)(\xi - iy)(z - \xi)^{-\frac{1}{2}} (\bar{z} + \xi)^{-\frac{1}{2}} d\xi, \quad \xi = \xi + iy_1. \end{aligned} \quad (236)$$

Очевидно, что $\tilde{v}_2(0, y) = C = \operatorname{const}$, и поэтому краевые условия (234) выполняются, если положить

$$v|_{x=0} = 0, \quad y_1 \leq y \leq -\rho, \quad \rho \leq y < \infty. \quad (237)$$

Таким образом, для определения функции $f(z) \in M_1$ получаем задачу Пуанкаре для области g при краевых условиях (237), (195) и при краевом условии (222), взятом при $0 \leq x < \infty$ ($k=1$). Эта задача в случаях «а» — «г», указанных при решении задачи 10, сводится к задаче Римана — Гильберта для области g . Записав решение $f(z)$ в квадратурах и подставив его в (54'), получаем решение задачи 14 в явном виде.

Замечание. Если краевое условие (233) задачи 14 заменить краевым условием

$$(\alpha_2 x^{k-1} \tilde{u} - \beta_2 \tilde{v})_{y=y_1} = \tilde{\chi}(x) x^{k-1}, \quad 0 \leq x < \infty, \quad (233')$$

то все остается без изменений, только краевое условие (222) (при $0 \leq x < \infty$) в соответствии с (59) заменяется краевым условием

$$(\alpha_2 u - \beta_2 x v)_{y=y_1} = \chi(x), \quad 0 \leq x < \infty, \quad (222'')$$

где $\chi(x)$ определяется правой частью равенства (101) при условии, что вместо $\tilde{\Phi}(\xi)$ и $\tilde{\Phi}(x)$ подставляются $\tilde{\chi}(\xi)$ и $\tilde{\chi}(x)$.

Задача 15. Пусть область g в правой полуплоскости $z = x + iy$ представляет собой полукольцо, ограниченное дугами окружностей $|z| = \rho$, $|z| = \rho_1$ ($\rho_1 > \rho$) и отрезками мнимой оси $-\rho_1 \leq y \leq -\rho$, $\rho \leq y \leq \rho_1$. Требуется найти функцию $\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y)$, x -аналитическую в g при краевых условиях (199'') и

$$\left(\alpha_2 \tilde{u} - \beta_2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \rho} \right)_{z=\rho_1 e^{i\theta}} = \tilde{\Phi}_1(\theta), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad (238)$$

$$\tilde{v}|_{x=0} = 0, \quad -\rho_1 \leq y \leq -\rho; \quad \tilde{v}|_{x=0} = C, \quad \rho \leq y \leq \rho_1, \quad (239)$$

где C — постоянная (заранее не задается). Исключительные точки: $(0, \rho)$, $(0, -\rho)$, $(0, \rho_1)$, $(0, -\rho_1)$. Решение задачи ищем в виде (54'), принимая за L отрезок мнимой оси $-\rho_1 \leq y \leq -\rho$. При $\rho \leq y \leq \rho_1$ выполняется представление (235), отличие состоит в том, что

$$\begin{aligned} \tilde{f}_2(z) = \tilde{u}_2(x, y) + i\tilde{v}_2(x, y) = \operatorname{Re} \int_{\gamma} f(\zeta) (z - \zeta)^{-\frac{1}{2}} (\bar{z} + \zeta)^{-\frac{1}{2}} d\zeta + \\ + i \operatorname{Im} \int_{\gamma} f(\zeta) (\zeta - iy) (z - \zeta)^{-\frac{1}{2}} (\bar{z} + \zeta)^{-\frac{1}{2}} d\zeta, \end{aligned} \quad (236')$$

где γ — полуокружность, $z = \rho_1 e^{i\theta}$ ($-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$). Очевидно,

что $\tilde{v}_2(0, y) = C = \operatorname{const}$, $\tilde{v}_1(0, y) = 0$. Поэтому краевые условия (239) выполняются, если положить

$$v|_{x=0} = 0, \quad -\rho_1 \leq y \leq \rho, \quad \rho \leq y \leq \rho_1. \quad (240)$$

Таким образом, для определения $f(z)$ получаем задачу Пуанкаре для области g при краевых условиях (240), (195) ($k = 1$) и

$$\begin{aligned} \left\{ \alpha_2 \operatorname{Re} [f(z) e^{i(\theta + \frac{\pi}{2}) \frac{1}{2}}] - \beta_2 \operatorname{Im} \left[\frac{df(z)}{dz} e^{i(\theta + \frac{\pi}{2}) \frac{3}{2}} \right] \right\}_{z=\rho_1 e^{i\theta}} = \Phi_1(\theta), \\ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \end{aligned} \quad (241)$$

где $\Phi_1(\theta)$ определяется равенством (191) ($k = 1$) при условии, что вместо $\tilde{\Phi}(\varphi)$, $\tilde{\Phi}(\theta)$ и ρ подставляются $\tilde{\Phi}_1(\varphi)$, $\tilde{\Phi}_1(\theta)$ и ρ_1 . Эта задача при $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 0$ сводится к задаче Римана — Гильберта для области g с неизвестной функцией $F(z)$, введенной ранее при помощи равенства (196). Записав $F(z)$, а также $f(z)$ в квадратурах и подставив $f(z)$ в (54'), получаем решение задачи 15 в явном виде.

Решение краевых задач в биполярных и видоизмененных биполярных координатах

Пусть σ и τ — биполярные координаты, $\tilde{\Phi}(\sigma)$ и $\tilde{\Phi}_1(\sigma)$ — заданные достаточное число раз непрерывно дифференцируемые функции при $0 \leq \sigma < \infty$.

Задача 16. Пусть g — область в правой полуплоскости $z = x + iy$, ограниченная дугами окружностей $0 \leq \sigma < \infty$, $\tau = \tau_1$ и $0 \leq \tau \leq \infty$, $\tau = \tau_2$ ($\tau_2 > \tau_1$) и отрезком мнимой оси $y_1 \leq y \leq y_2$ (рис. 19, б). Краевые условия для x^* -аналитической функции $\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y)$:

$$\tilde{u}|_{\tau=\tau_1} = \tilde{\Phi}(\sigma), \quad 0 \leq \sigma < \infty, \quad (242)$$

$$\tilde{u}|_{\tau=\tau_1} = \tilde{\Phi}_1(\sigma), \quad 0 \leq \sigma \leq \infty, \quad (243)$$

$$\tilde{v}|_{x=0} = 0, \quad y_1 \leq y \leq y_2; \quad (244)$$

исключительные точки: $(q, 0)$, $(0, y_1)$, $(0, y_2)$. Решение задачи ищем в виде (54), принимая за L отрезок мнимой оси $y_1 \leq y \leq y_2$. Приходим к задаче Римана — Гильберта для области g с неизвестной функцией $f(z) \subset M$ при таких краевых условиях:

$$v|_{x=0} = 0, \quad y_1 \leq y \leq y_2, \quad (245)$$

$$\operatorname{Re} \left[f(z) \operatorname{ch}^{-k} \frac{\sigma + i\tau}{2} \right]_{\tau=\tau_1} = \Phi(\sigma), \quad 0 \leq \sigma \leq \infty, \quad (246)$$

$$\operatorname{Re} \left[f(z) \operatorname{ch}^{-k} \frac{\sigma + i\tau}{2} \right]_{\tau=\tau_2} = \Phi_1(\sigma), \quad 0 \leq \sigma \leq \infty, \quad (247)$$

где в соответствии с формулой обращения (83)

$$\Phi(\sigma) = \begin{cases} \mu \frac{d}{d\sigma} \int_0^\sigma \frac{d^m \tilde{\Phi}(\lambda) \operatorname{sh}^{k-1} \lambda (\operatorname{ch} \lambda + \cos \tau_1)^{-\frac{k}{2}}}{(d \operatorname{ch} \lambda)^m} \frac{\operatorname{sh} \lambda d\lambda}{(\operatorname{ch} \sigma - \operatorname{ch} \lambda)^{\frac{k}{2}-m}}, & k \neq 2m, \\ \mu \operatorname{sh} \sigma \frac{d^m \tilde{\Phi}(\sigma) \operatorname{sh}^{k-1} \sigma (\operatorname{ch} \sigma - \cos \tau_1)^{-\frac{k}{2}}}{(d \operatorname{ch} \sigma)^m}, & k = 2m, \end{cases} \quad (248)$$

$\Phi_1(\sigma)$ определяется правой частью равенства (248) при условии, что вместо $\tilde{\Phi}(\lambda)$, $\tilde{\Phi}(\sigma)$ и τ_1 подставляются $\tilde{\Phi}_1(\lambda)$, $\tilde{\Phi}_1(\sigma)$ и τ_2 . Записав $f(z)$ в квадратурах и подставив ее в (54) или (100), получаем решение задачи 16 в явном виде.

Задача 16'. Условия такие же, как в задаче 16, только (242) и (305) заменяются краевыми условиями

$$\tilde{v}|_{\tau=\tau_1} = \tilde{\Phi}(\sigma), \quad 0 \leq \sigma \leq \infty, \quad (242')$$

$$\tilde{v}|_{\tau=\tau_2} = \tilde{\Phi}_1(\sigma), \quad 0 \leq \sigma \leq \infty. \quad (243')$$

Поступаем точно так же, как и при решении задачи 16, только краевые условия (246), (247) заменяем краевыми условиями

$$\operatorname{Im} \left[\frac{df(z)}{dz} \operatorname{ch}^{-k-2} \frac{\sigma + i\tau}{2} \right]_{\tau=\tau_1} = \Phi(\sigma), \quad 0 \leq \sigma \leq \infty, \quad (246')$$

$$\operatorname{Im} \left[\frac{df(z)}{dz} \operatorname{ch}^{-k-2} \frac{\sigma + i\tau}{2} \right]_{\tau=\tau_2} = \Phi_1(\sigma), \quad 0 \leq \sigma \leq \infty, \quad (247')$$

где в соответствии с формулой обращения (83)

$$\Phi(\sigma) = \begin{cases} \mu 2q^{-k-1} \frac{d}{d\sigma} \int_0^\sigma \frac{d^{m+1} \tilde{\Phi}(\lambda) (\operatorname{ch} \lambda + \cos \tau_1)^{\frac{k}{2}}}{(d \operatorname{ch} \lambda)^{m+1}} \frac{\operatorname{sh} \lambda d\lambda}{(\operatorname{ch} \sigma - \operatorname{ch} \lambda)^{\frac{k}{2}-m}}, & k \neq 2m, \\ \mu 2q^{-k-1} \operatorname{sh} \sigma \frac{d^{m+1} \tilde{\Phi}(\sigma) (\operatorname{ch} \sigma + \cos \tau_1)^{\frac{k}{2}}}{(d \operatorname{ch} \sigma)^{m+1}}, & k = 2m, \end{cases} \quad (249)$$

$\Phi_1(\sigma)$ определяется правой частью равенства (249) при условии, что вместо $\tilde{\Phi}(\lambda)$, $\tilde{\Phi}(\sigma)$ и τ_1 подставляются $\tilde{\Phi}_1(\lambda)$, $\tilde{\Phi}_1(\sigma)$ и τ_2 . Записав (245) в виде

$$\operatorname{Re} \frac{df(z)}{dz} \Big|_{x=0} = 0, \quad y_1 \leq y \leq y_2, \quad (245')$$

замечаем, что $\frac{df(z)}{dz}$ находится в квадратурах как решение задачи Римана — Гильберта для области g (246'), (247'), (245'). Подставив $f(z)$ в (54) или (100), получаем решение задачи 16' в явном виде.

Задача 16''. Условия такие же, как в задаче 16, краевые условия для $\tilde{f}(z)$: (242'), (243), (244). Определение $f(z)$ сводится к задаче Пуанкаре для области g при краевых условиях (246'), (247), (245). Подставив решение этой задачи в (54) или (100), получаем решение задачи 16''.

Задача 16'''. Условия такие же, как в задаче 16, краевые условия для $\tilde{f}(z)$: (242), (243'), (245). Определение $f(z)$ сводится к задаче Пуанкаре для области g при краевых условиях (246), (247'), (243). Подставив решение этой задачи в (54) или (100), находим решение задачи 16'''.

Задача 17. Пусть g — область в правой полуплоскости $z = x + iy$, внешняя по отношению к контуру, ограничивающему область, рассмотренную в задаче 16 (см. рис. 19, б). Краевые условия для x^k -аналитической функции $\tilde{f}(z)$: (242), (243) и

$$\tilde{v}|_{x=0} = 0, \quad -\infty \leq y \leq y_1, \quad y_2 \leq y < \infty; \quad (250)$$

исключительные точки: $(q, 0)$, $(0, y_1)$, $(0, y_2)$. Принимаем $\tilde{f}(z)$ в виде (54), за L — часть мнимой оси $-\infty \leq y \leq y_1$. Предполагая, что $\tilde{f}(z) \subset M_1$, и считая, что

$$\left. \begin{aligned} v|_{x=0} = 0, \quad -\infty \leq y \leq y_1; \quad \operatorname{Im} [f(z) e^{i\pi k}]|_{x=0} = 0, \\ y_2 \leq y < \infty, \end{aligned} \right\} \quad (251)$$

приходим к задаче Римана — Гильберта для области g при краевых условиях (251), (247) и

$$\operatorname{Re} \left[f(z) e^{i\pi k} \operatorname{ch}^{-k} \frac{\sigma + i\tau}{2} \right]_{\tau=\tau_2} = \Phi_1(\sigma), \quad 0 \leq \sigma \leq \infty, \quad (252)$$

где $\Phi_1(\sigma)$ — правая часть равенства (248) при условии, что вместо $\tilde{\Phi}(\lambda)$, $\tilde{\Phi}(\sigma)$ и τ_1 подставляются $\tilde{\Phi}_1(\lambda)$, $\tilde{\Phi}_1(\sigma)$ и τ_2 . Записав $f(z)$ в квадратурах и подставив ее в (54), получаем решение задачи 17 в явном виде.

Задача 17'. Условия такие же, как в задаче 17, краевые условия для $\tilde{f}(z)$: (242'), (243'), (250). Поступая так же, как при решении задачи 17, приходим к задаче Пуанкаре для области g при краевых условиях (251), (246') и

$$\operatorname{Im} \left[\frac{df(z)}{dz} e^{i\pi k} \operatorname{ch}^{-k-2} \frac{\sigma + i\tau}{2} \right]_{\tau=\tau_2} = \Phi_1(\sigma), \quad 0 \leq \sigma \leq \infty, \quad (253)$$

где $\Phi_1(\sigma)$ — правая часть равенства (249) при условии, что вместо $\tilde{\Phi}(\lambda)$, $\tilde{\Phi}(\sigma)$ и τ_1 подставляются $\tilde{\Phi}_1(\lambda)$, $\tilde{\Phi}_1(\sigma)$ и τ_2 . Записав (251) в виде

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} \frac{df(z)}{dz} \Big|_{x=0} &= 0, & -\infty \leq y \leq y_1, \\ \operatorname{Re} \left[\frac{df(z)}{dz} e^{i\pi k} \right]_{x=0} &= 0, & y_2 \leq y \leq \infty, \end{aligned} \right\} \quad (251')$$

можем найти $\frac{df(z)}{dz}$ в квадратурах как решение задачи Римана — Гильберта для области g при краевых условиях (251'), (246'), (253). Подставив $f(z)$ в (54), получаем решение задачи 17' в явном виде.

Задача 17''. Условия такие же, как в задаче 17, краевые условия для $\tilde{f}(z)$: (242'), (243), (250). Определение $f(z) \subset M_1$ сводится к решению задачи Пуанкаре для области g при краевых условиях (251), (246'), (252). Подставив $f(z)$ в (54), находим решение задачи 17''.

Задача 17'''. Условия такие же, как в задаче 17, краевые условия для $\tilde{f}(z)$: (242), (243'), (250). Определение $f(z) \subset M_1$ сводится к решению задачи Пуанкаре для области g при краевых условиях (251), (246), (253). Подставив $f(z)$ в (54), получаем решение задачи 17'''.

Задача 18. Пусть g — область в правой полуплоскости $z = x + iy$, ограниченная полуокружностями $\sigma = \sigma_2$ ($0 \leq \tau \leq \pi$) и $\sigma = \sigma_1$ ($0 \leq \tau \leq \pi$) ($\sigma_2 > 0$, $\sigma_1 < 0$), где σ , τ — видоизмененные биполярные координаты, и отрезками мнимой оси $-\infty \leq y \leq y_1$, $y_2 \leq y \leq y_3$, $y_4 \leq y \leq \infty$ (рис. 20, а). Требуется найти функцию $\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y)$, x -аналитическую в g , непрерывную на границе g , за исключением, может быть, точек $(0, y_1)$, $(0, y_2)$, $(0, y_3)$, $(0, y_4)$, и удовлетворяющую краевым условиям

$$\tilde{u}|_{\sigma=\sigma_2} = \tilde{\Phi}(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq \pi, \quad (254)$$

$$\tilde{u}|_{\sigma=\sigma_1} = \tilde{\Phi}_1(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq \pi, \quad (255)$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{v}|_{x=0} &= 0, & -\infty < y \leq y_1, & & y_4 \leq y < \infty, \\ \tilde{v}|_{x=0} &= C, & y_2 < y \leq y_3, \end{aligned} \right\} \quad (256)$$

где $\tilde{\Phi}(\tau)$ и $\tilde{\Phi}_1(\tau)$ — заданные достаточное число раз непрерывно дифференцируемые функции при $0 \leq \tau \leq \pi$, C — постоянная (заранее не задается). Решение задачи ищем в виде (54'), принимая за L часть мнимой оси $y_4 \leq y \leq \infty$ и предполагая, что $f(z) \in M_1$. Тогда при $y_4 \leq y < \infty$ справедливо представление (100) ($k=1$), при $-\infty \leq y \leq y_3$ — представление (135'), при $y_3 \leq y \leq y_3$ — представление (146) при условии, что в равенстве (149), определяющем $\tilde{f}_2(z)$, в качестве контура интегрирования берется полуокружность $\sigma = \sigma_1$ ($0 \leq \tau \leq \pi$). Из (149) вы-

дим, что $\tilde{v}_2(0, y) = C = \text{const.}$ Поэтому краевые условия (256) выполняются, если положить

$$\begin{aligned} v|_{x=0} &= 0, & -\infty \leq y \leq y_1, \\ y_2 \leq y \leq y_3, & & y_4 \leq y < \infty. \end{aligned} \quad (257)$$

Из формулы обращения (91) получаем

$$\text{Re} \left[f(z) \text{sh}^{-1} \frac{\sigma + i\tau}{2} \right]_{\sigma=\sigma_1} = \Phi(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq \pi, \quad (258)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(\tau) &= \frac{2}{\pi} \frac{d}{d\tau} \int_0^\tau \tilde{\Phi}(v) (\text{ch } \sigma_2 - \\ &- \cos v)^{-\frac{1}{2}} \frac{\sin v dv}{\sqrt{\cos v - \cos \tau}}. \end{aligned} \quad (259)$$

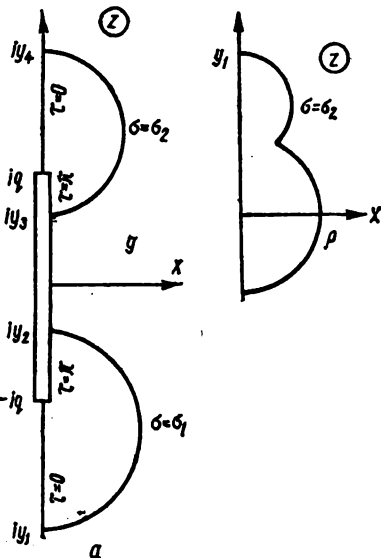


Рис. 20.

Если интегральное представление (125') записать в видоизмененных биполярных координатах, то получится равенство (90), в котором вместо $f(\xi^+)$ и $\frac{df(\xi^+)}{d\xi^+}$ подставлены $f(\xi^+)e^{-i\pi k}$ и $\frac{df(\xi^+)}{d\xi^+}e^{-i\pi k}$. Применяя к этому равенству при $k=1$ формулу обращения (91) с заменой σ_2 на σ_1 , получаем

$$\text{Re} \left[-f(z) \text{sh}^{-1} \frac{\sigma + i\tau}{2} \right]_{\sigma=\sigma_1} = \Phi_1(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq \pi, \quad (260)$$

где $\Phi_1(\tau)$ — правая часть равенства (259) при условии, что вместо $\Phi(v)$ и σ_2 подставляются $\Phi_1(v)$ и σ_1 . Записав $f(z)$ в квадратурах как решение задачи Римана — Гильберта для области g при крайних условиях (257), (258), (260) и подставив ее в (54'), получаем решение задачи 18 в явном виде.

Задача 18'. Условия такие же, как в задаче 18, только в краевых условиях (254) и (255) вместо $\tilde{u}$ подставляется $\tilde{v}$. Поступаем точно так же, как и при решении задачи 18, краевые условия (258) и (260) заменяются краевыми условиями

$$\operatorname{Im} \left[\frac{df(z)}{dz} \operatorname{sh}^{-3} \frac{\sigma + i\tau}{2} \right]_{\sigma=\sigma_2} = \Phi(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq \pi, \quad (258')$$

$$\operatorname{Im} \left[-\frac{df(z)}{dz} \operatorname{sh}^{-3} \frac{\sigma + i\tau}{2} \right]_{\sigma=\sigma_1} = \Phi_1(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq \pi, \quad (260')$$

где в соответствии с формулой обращения (191)

$$\Phi(\tau) = -\frac{4}{\pi q^2} \frac{d}{d\tau} \int_0^\tau \frac{d\tilde{\Phi}(v) (\operatorname{ch} \sigma_2 - \cos v)^{\frac{1}{2}}}{d \cos v} \frac{\sin v dv}{\sqrt{\cos v - \cos \tau}}, \quad (261)$$

$\Phi_1(\tau)$ определяется правой частью равенства (261) при условии, что вместо $\tilde{\Phi}(v)$ и σ_2 подставляются $\tilde{\Phi}_1(v)$, σ_1 . Записав краевое условие (257) в виде

$$\operatorname{Re} \frac{df(z)}{dz} \Big|_{x=0} = 0, \quad -\infty < y \leq y_1, \quad y_2 \leq y \leq y_3, \quad y_4 \leq y < \infty, \quad (257')$$

замечаем, что $\frac{df(z)}{dz}$ определяется в квадратурах как решение задачи Римана — Гильберта для области g при краевых условиях (257'); (258'), (260'). Подставив $f(z)$ в (54'), получаем решение задачи 18 в явном виде.

Задача 18". Условия такие же, как и в задаче 18, только в краевом условии (254) вместо $\tilde{u}$ подставляется $\tilde{v}$. Поступая так же, как и при решении задачи 18, для определения $f(z)$ приходим к задаче Пуанкаре для области g при краевых условиях (258'), (260'), (257'). Подставив $f(z)$ в (54'), получаем решение задачи 18".

Задача 18'''. Условия такие же, как в задаче 18, только в краевом условии (255) вместо $\tilde{u}$ подставляется $\tilde{v}$. Поступая так же, как и при решении задачи 18, для определения $f(z)$ получаем задачу Пуанкаре для области g при краевых условиях (258), (260'), (257). Подставив $f(z)$ в (54'), находим решение задачи 18'''.

Задача 19. Пусть g — область в правой полуплоскости $z = x + iy$, ограниченная отрезком мнимой оси, дугами окружностей $|z| = \rho$ и $\sigma = \sigma_2$, $0 \leq \tau \leq \tau_0 < \pi$, где σ и τ — видоизмененные биполярные координаты (рис. 20, б). Требуется найти функцию $\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y)$, x^k -аналитическую в g , непрерывную на границе g , за исключением, может быть, точек $(0, y_1)$, $(0, -\rho)$, $\rho e^{i\alpha}$ $(0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2})$, при выполнении краевых условий

$$\tilde{u}|_{\sigma=\sigma_2} = \tilde{\Phi}(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq \tau_0, \quad (262)$$

$$\left(\alpha_1 \tilde{u} - \beta_1 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \rho} \right)_{z=\rho e^{i\theta}} = \tilde{\Phi}_1(\theta), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \alpha, \quad (263)$$

$$\tilde{v}|_{x=0} = 0, \quad -\rho \leq y \leq y_1, \quad (264)$$

где σ_2 , τ_0 — видоизмененные биполярные координаты точки $\rho e^{i\alpha}$, $\tilde{\Phi}(\tau)$ и $\tilde{\Phi}_1(\theta)$ — заданные достаточно число раз непрерывно дифференцируемые функции соответственно при $0 \leq \tau \leq \tau_0$ и $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \alpha$. Принимая искомое решение задачи в виде (54), приходим к задаче Пуанкаре для области g при краевых условиях

$$v|_{x=0} = 0, \quad -\rho \leq y \leq y_1, \quad (265)$$

$$\operatorname{Re} \left[f(z) \operatorname{sh}^{-k} \frac{\sigma + i\tau}{2} \right]_{\sigma=\sigma_2} = \Phi(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq \tau_0, \quad (266)$$

$$\left\{ \alpha_1 \operatorname{Re} [f(z) e^{i(\theta + \frac{\pi}{2}) \frac{k}{2}}] - \beta_1 \operatorname{Im} \left[\frac{df(z)}{dz} e^{i(\theta + \frac{\pi}{2}) (\frac{k}{2} + 1)} \right] \right\}_{z=\rho e^{i\theta}} = \\ = \Phi_1(\theta), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \alpha, \quad (267)$$

где $\Phi_1(\theta)$ в соответствии с формулой обращения (72) определяется правой частью равенства (191) при условии, что вместо $\tilde{\Phi}(\varphi)$ и $\tilde{\Phi}(\theta)$ подставляются $\tilde{\Phi}_1(\varphi)$, $\tilde{\Phi}_1(\theta)$, а функция $\Phi(\tau)$ в соответствии с формулой обращения (91) определяется равенством

$$\Phi(\tau) = \begin{cases} (-1)^m \mu \frac{d}{d\tau} \int_0^\tau \frac{d^m \tilde{\Phi}(v) \sin^{k-1} v (\operatorname{ch} \sigma_2 - \cos v)^{-\frac{k}{2}}}{(d \cos v)^m} \times \\ \times \frac{\sin v dv}{(\cos v - \cos \tau)^{\frac{k}{2} - m}}, \quad k \neq 2m, \\ (-1)^m \mu \sin \tau \frac{d^m \tilde{\Phi}(\tau) \sin^{k-1} \tau (\operatorname{ch} \sigma_2 - \cos \tau)^{-\frac{k}{2}}}{(d \cos \tau)^m}, \quad k = 2m. \end{cases} \quad (268)$$

Подставляя решение $f(z)$ этой задачи Пуанкаре в (54) или (100), получаем решение задачи 19.

Задача 19'. Условия такие же, как в задаче 19, только в краевом условии (262) вместо $\tilde{u}$ подставляется $\tilde{v}$. Как и при решении задачи 19, определение $f(z)$ сводится к решению задачи Пуанкаре (при $\beta_1 = 0$ — к задаче Римана — Гильберта) для области g при краевых условиях (265), (267) и

$$\operatorname{Im} \left[\frac{df(z)}{dz} \operatorname{sh}^{-k-2} \frac{\sigma + i\tau}{2} \right]_{\sigma=\sigma_2} = \Phi(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq \tau_0, \quad (266')$$

где $\Phi(\tau)$ в соответствии с (91) определяется равенством

$$\Phi(\tau) = \begin{cases} (-1)^{m-1} \mu 2q^{-k-1} \frac{d}{d\tau} \int_0^\tau \frac{d^{m+1} \tilde{\Phi}(v) (\operatorname{ch} \sigma_2 - \cos v)^{\frac{k}{2}}}{(d \cos v)^{m+1}} \times \\ \times \frac{\sin v dv}{(\cos v - \cos \tau)^{\frac{k}{2}-m}}, & k \neq 2m, \\ (-1)^{m-1} \mu 2q^{-k-1} \sin \tau \frac{d^{m-1} \tilde{\Phi}(\tau) (\operatorname{ch} \sigma_2 - \cos \tau)^{\frac{k}{2}}}{(d \cos \tau)^{m+1}}, & k = 2m. \end{cases} \quad (269)$$

Подставив $f(z)$ в (54) или (100), находим решение задачи 19'.

Задача 20. Пусть g — область в правой полуплоскости $z = x + iy$, внешняя по отношению к контуру, ограничивающему область, рассмотренную в задаче 19 (см. рис. 20, б). Требуется найти функцию $\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y)$, x^k -аналитическую в g , непрерывную на границе g , за исключением, может быть, точек $(0, y_1)$, $(0, -\rho)$, $\rho e^{i\alpha}$, и удовлетворяющую краевым условиям (262), (263) и

$$\tilde{v}|_{x=0} = 0, \quad -\infty < y \leq \rho, \quad y_1 \leq y < \infty. \quad (270)$$

Решение задачи ищем в виде (54), принимая за L часть мнимой оси $y_1 \leq y < \infty$. Считая, что $f(z) \in M_1$ и

$$\left. \begin{aligned} v|_{x=0} &= 0, & y_1 \leq y < \infty, \\ \operatorname{Im} [f(z) e^{-i\pi k}]|_{x=0} &= 0, & -\infty < y \leq -\rho, \end{aligned} \right\} \quad (271)$$

приходим к задаче Пуанкаре (при $\beta_1 = 0$ — к задаче Римана — Гильберта) для области g при краевых условиях (266), (271) и

$$\left\{ \alpha_1 \operatorname{Re} [f(z) e^{i\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right)\frac{k}{2}}] - \beta_1 \operatorname{Im} \left[\frac{df(z)}{dz} e^{i\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right)\left(\frac{k}{2}+1\right)} \right] \right\}_{z=\rho e^{i\theta}} = \\ = \Phi_1(\theta), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \alpha, \quad (272)$$

где $\Phi_1(\theta)$ определяется правой частью равенства (191) при условии, что вместо $\tilde{\Phi}(\varphi)$ и $\tilde{\Phi}(\theta)$ подставляются $\tilde{\Phi}_1(\varphi)$ и $\tilde{\Phi}_1(\theta)$. Подставив $f(z)$ в (54), получаем решение задачи 20.

Задача 20'. Условия такие же, как в задаче 20, только в краевом условии (262) вместо $\tilde{u}$ подставляется $\tilde{v}$. Как и в предыдущем случае, для определения аналитической функции $f(z) \in M_1$ получаем задачу Пуанкаре (при $\beta_1 = 0$ — задачу Римана — Гильберта) для области g при краевых условиях (271), (272), (266'). Подставляя $f(z)$ в (54), получаем решение задачи 20.

Задача 21. Условия такие же, как в задаче 18, только вместо σ_1 подставляется $\sigma_2 > 0$ ($\sigma_2 < \sigma_2$) (рис. 21), краевые условия (255)

и (256) заменяются соответственно краевыми условиями

$$\tilde{u}|_{\sigma=\sigma'_2} = \tilde{\Phi}_1(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq \pi, \quad (273)$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{v}|_{x=0} &= 0, & y_4 \leq y \leq y_1, \\ \tilde{v}|_{x=0} &= C, & y_2 \leq y \leq y_3, \end{aligned} \right\} \quad (274)$$

где $\tilde{\Phi}_1(\tau)$ и C имеют тот же смысл, что и в задаче 18. Решение задачи ищем в виде (54'), принимая за L отрезок мнимой оси $y_4 \leq y \leq y_1$. Учитывая, что при $y_2 \leq y \leq y_3$ выполняется представление (125) при условии, что в (127) в качестве контура интегрирования берется полуокружность $\sigma = \sigma'_2$ ($0 \leq \tau \leq \pi$), приходим к задаче Римана — Гильберта для области g (эксцентричного полукольца) при краевых условиях (258) и

$$v|_{x=0} = 0, \quad y_2 \leq y \leq y_3, \quad y_4 \leq y \leq y_1. \quad (275)$$

$$\operatorname{Re} \left[f(z) \operatorname{sh}^{-1} \frac{\sigma + i\tau}{2} \right]_{\sigma=\sigma'_2} = \Phi_1(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq \pi, \quad (276)$$

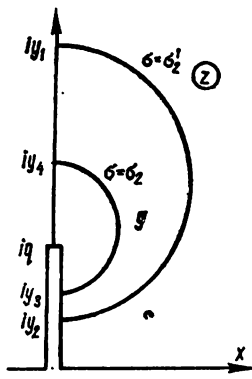


Рис. 21.

где $\tilde{\Phi}_1(\tau)$ — правая часть равенства (259) при

условии, что вместо $\tilde{\Phi}(v)$ и σ_2 подставляются $\tilde{\Phi}_1(v)$, σ'_2 . Записав $f(z)$ в квадратурах и подставив ее в (54), получаем решение задачи 21 в явном виде.

Задача 21'. Условия такие же, как в задаче 21, только в краевых условиях (254) и (273) вместо $\tilde{u}$ подставляется $\tilde{v}$. Решение задачи получается в явном виде так же, как и решение задачи 21, только краевые условия (258) и (276) заменяются краевыми условиями (258') и (260'), при этом вместо σ_1 подставляется σ'_2 .

Задача 21''. Условия такие же, как в задаче 21, только в краевом условии (254) вместо $\tilde{u}$ подставляется $\tilde{v}$. Поступая так же, как и при решении задачи 21, для определения $f(z)$ получаем задачу Пуанкаре для области g при краевых условиях (258'), (276), (275). Подставив $f(z)$ в (54'), получаем решение задачи 21''.

Задача 21'''. Условия такие же, как в задаче 21, только в краевом условии (273) вместо $\tilde{u}$ подставляется $\tilde{v}$. Решение задачи получается так же, как и решение задачи 21'', только краевыми условиями задачи Пуанкаре являются (275), (258) и (260), при этом вместо σ_1 подставляется σ'_2 . Подставив $f(z)$ в (54'), находим решение задачи 21'''.

**§ 5. ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ
ОПЕРАТОРНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПО СОПРЯЖЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ,
СООТВЕТСТВУЮЩЕЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ $p = x^k$**

Пусть G^* — область в правой полуплоскости $\omega = \alpha + i\beta$, ограниченная отрезком L^* мнимой оси и кривой, монотонной по α , N — множество функций $F(\omega) = U(\alpha, \beta) + iV(\alpha, \beta)$, непрерывно дифференцируемых по α и β в области G^* , $\tilde{N}$ — множество функций, определенных в G^* интегральным представлением

$$\tilde{F}(\omega) = \tilde{U}(\alpha, \beta) + i\tilde{V}(\alpha, \beta) = P_\omega(F(\omega)) =$$

$$= \int_0^\alpha [U(\xi, \beta) \alpha^{1-k} + i\tilde{V}(\xi, \beta)] (\alpha^2 - \xi^2)^{\frac{k}{2}-1} d\xi, \quad k = \text{const} > 0, \quad (277)$$

или

$$\tilde{F}(\omega) = \int_0^1 [U(\alpha t, \beta) + i\alpha^k V(\alpha t, \beta)] (1 - t^2)^{\frac{k}{2}-1} dt, \quad (277')$$

и в частности

$$\tilde{U}(0, \beta) = \frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)} U(0, \beta), \quad \tilde{V}(0, \beta) = 0. \quad (277'')$$

Формула обращения интегрального представления (277) в силу (55), (56), (59) (см. § 4) имеет вид

$$U(\alpha, \beta) + i\alpha V(\alpha, \beta) =$$

$$= \begin{cases} \mu \frac{d}{d\alpha} \int_0^\alpha \frac{d^m [\tilde{U}(\xi, \beta) \xi^{k-1} + i\tilde{V}(\xi, \beta)]}{(d\xi^2)^m} \frac{\xi d\xi}{(\alpha^2 - \xi^2)^{\frac{k}{2}-m}}, & k \neq 2m, \\ \mu \alpha \frac{d^m [U(\alpha, \beta) \alpha^{k-1} + iV(\alpha, \beta)]}{(d\alpha^2)^m}, & k = 2m, \end{cases} \quad (278)$$

где m и μ имеют тот же смысл, что и в (59).

Множество функций $\tilde{N}$ будем называть множеством или классом начальных функций, множество N — множеством или классом изображений функций, принадлежащих $\tilde{N}$.

Введем операции дифференцирования

$$\frac{\bar{d}_{\lambda, \nu} F(\omega)}{d\omega} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial \beta} - \lambda \frac{\partial V}{\partial \alpha} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial \beta} + \nu \frac{\partial U}{\partial \alpha} \right), \quad (279)$$

$$\frac{\tilde{d}_{\lambda, \nu} \tilde{F}(\omega)}{d\omega} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \beta} - \frac{\lambda}{\alpha^k} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \alpha} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \beta} + \nu \alpha^k \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \alpha} \right), \quad (280)$$

где λ и ν — вещественные постоянные. Первую из этих операций можно назвать операторной производной с индексами λ, ν , вторую — операторной производной с индексами λ, ν и характеристикой α^k . Обе эти операции справедливы в классе всевозможных функций комплексного переменного $\omega = \alpha + i\beta$, имеющих частные производные по α и β . Полагая

$$\frac{\bar{d}_{\lambda, \nu} F(\omega)}{d\omega} = U^*(\alpha, \beta) + iV^*(\alpha, \beta), \quad \frac{\tilde{d}_{\lambda, \nu} \tilde{F}(\omega)}{d\omega} = \tilde{U}^*(\alpha, \beta) + i\tilde{V}^*(\alpha, \beta), \quad (281)$$

из (277'), получаем

$$\begin{aligned} \tilde{U}^*(\alpha, \beta) = & \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{\partial U(\alpha t, \beta)}{\partial \beta} - \right. \\ & \left. - \lambda \left(\frac{\partial V(\alpha t, \beta)}{\partial \alpha t} t^2 + \frac{kt}{\alpha} V(\alpha t, \beta) \right) \right] (1 - t^2)^{\frac{k}{2}-1} dt. \end{aligned} \quad (282)$$

Отсюда, замечая, что

$$\begin{aligned} \frac{k}{\alpha} \int_0^1 V(\alpha t, \beta) t (1 - t^2)^{\frac{k}{2}-1} dt &= \frac{1}{\alpha} [-V(\alpha t, \beta) (1 - t^2)^{\frac{k}{2}}]_0^1 + \\ &+ \int_0^1 \frac{\partial V(\alpha t, \beta)}{\partial \alpha t} (1 - t^2)^{\frac{k}{2}} dt, \end{aligned}$$

находим

$$\begin{aligned} \tilde{U}^*(\alpha, \beta) = & -\frac{\lambda}{2\alpha} V(0, \beta) + \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{\partial U(\alpha t, \beta)}{\partial \beta} - \lambda \frac{\partial V(\alpha t, \beta)}{\partial \alpha t} \right] \times \\ & \times (1 - t^2)^{\frac{k}{2}-1} dt, \end{aligned}$$

или

$$\tilde{U}^*(\alpha, \beta) = -\frac{\lambda}{2\alpha} V(0, \beta) + \int_0^\alpha \alpha^{1-k} U^*(\xi, \beta) (\alpha^2 - \xi^2)^{\frac{k}{2}-1} d\xi. \quad (283)$$

Далее получаем

$$\tilde{V}^*(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\alpha^k t \frac{\partial V(\alpha t, \beta)}{\partial \beta} + \nu \alpha^k \frac{\partial U(\alpha t, \beta)}{\partial \alpha t} t \right] (1 - t^2)^{\frac{k}{2}-1} dt,$$

или

$$\tilde{V}^*(\alpha, \beta) = \int_0^\alpha \xi V^*(\xi, \beta) (\alpha^2 - \xi^2)^{\frac{k}{2}-1} d\xi. \quad (283')$$

Объединяя (283) и (283'), приходим к интегральному представлению

$$\frac{\tilde{d}_{\lambda, \nu} \tilde{F}(\omega)}{d\omega} = -\frac{\lambda}{2\alpha} V(0, \beta) + P_\omega \left(\frac{\bar{d}_{\lambda, \nu} F(\omega)}{d\omega} \right). \quad (284)$$

Равенство (284) означает, что операции дифференцирования $\frac{\tilde{d}_{\lambda, \nu} \tilde{F}(\omega)}{d\omega}$ в классе начальных функций соответствует операция дифференцирования $\frac{\tilde{d}_{\lambda, \nu} F(\omega)}{d\omega}$ в классе изображений (с точностью до слагаемого $-\frac{\lambda}{2\alpha} V(0, \beta)$, если $V(0, \beta) \neq 0$). Поэтому в некоторых случаях при решении краевых задач для систем дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами вполне определенного вида можно переходить к более простым краевым задачам для систем уравнений с постоянными коэффициентами. Например, система уравнений с переменными коэффициентами

$$\frac{\tilde{d}_{\lambda, \nu} \tilde{F}(\omega)}{d\omega} = A\tilde{F} + B\bar{\tilde{F}} + \tilde{\Phi}(\omega), \quad (285)$$

где A и B — вещественные постоянные, $\tilde{\Phi}(\omega)$ — заданная функция от $\omega = \alpha + i\beta$, в предположении, что $V(0, \beta) = 0$, преобразуется в систему уравнений с постоянными коэффициентами в классе изображений

$$\frac{\tilde{d}_{\lambda, \nu} F(\omega)}{d\omega} = AF + B\bar{F} + \Phi(\omega), \quad (286)$$

где $\Phi(\omega)$ — изображение функции $\tilde{\Phi}(\omega)$. Аналогично уравнение

$$\frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \beta^2} + \frac{k}{\alpha} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial t^2} = \tilde{\Phi}(\alpha, \beta, t), \quad (287)$$

где $\tilde{\Phi}(\alpha, \beta, t)$ — заданная вещественная функция от α, β, t , можно записать в виде

$$-4 \frac{\tilde{d}_{-1,1}}{d\omega} \left(\frac{\tilde{d}_{1,-1} \tilde{U}}{d\omega} \right) + \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial t^2} = \tilde{\Phi}(\alpha, \beta, t) \quad (288)$$

или в классе изображений (в предположении, что $\text{Im} \frac{\partial U}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = 0$)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial \beta^2} + \frac{\partial U}{\partial t^2} = \Phi(\alpha, \beta, t), \quad (289)$$

где $\Phi(\alpha, \beta, t)$ — изображение функции $\tilde{\Phi}(\alpha, \beta, t)$.

Пусть теперь $\omega = \alpha + i\beta = \omega(z)$ — аналитическая функция от $z = x + iy$, отображающая заданную область G в плоскости $z = x + iy$ на область G^* в плоскости $\omega = \alpha + i\beta$, p — заданная в G функция, зависящая только от α , $p > 0$. Тогда сопряженные переменные, соответствующие данной характеристике $p = p(\alpha)$ и такие, что интеграл по этим сопряженным переменным от p -аналитической функции является также p -аналитической функцией, запишем в виде (гл. 1, § 3)

$$Z = X + iY = \beta - i \int \frac{d\alpha}{p}, \quad \bar{Z} = \bar{X} + i\bar{Y} = \beta - i \int p d\alpha. \quad (290)$$

Операторная производная по сопряженной переменной

$$\frac{\hat{d}_p \tilde{f}(z)}{dZ} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{X}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{Y}} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{X}} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{Y}} \right), \quad (291)$$

где $\tilde{f}(z) = \tilde{u} + i\tilde{v}$ — функция, определенная и имеющая производные по x и y в области G , принимает вид

$$\frac{\hat{d}_p \tilde{f}(z)}{dZ} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \beta} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \alpha} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \beta} + \rho \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \alpha} \right). \quad (292)$$

Пусть в дальнейшем $\rho = \alpha^k$ ($k = \text{const} > 0$). Сопоставляя (292) и (280), приходим к равенствам

$$\frac{\hat{d}_p \tilde{f}(z)}{dZ} = \frac{\tilde{d}_{1,1} \tilde{f}(z)}{d\omega}, \quad \frac{\hat{d}_p \tilde{f}(z)}{d\bar{Z}} = \frac{\tilde{d}_{-1,-1} \tilde{f}(z)}{d\omega}. \quad (293)$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\hat{d}_p \tilde{f}(z)}{dZ} = -\frac{1}{2\alpha} v(0, \beta) + P_\omega \left(-\frac{\hat{d}f(z)}{id\omega} \right), \quad (294)$$

$$\frac{\hat{d}_p \tilde{f}(z)}{d\bar{Z}} = \frac{1}{2\alpha} v(0, \beta) + P_\omega \left(\frac{\hat{d}f(z)}{id\bar{\omega}} \right), \quad (295)$$

где $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ — изображение функции $\tilde{f}(z)$. При $\rho = x^k$, в частности, $\omega = \alpha + i\beta = iz$ и

$$Z = y - i \frac{x^{1-k}}{1-k}, \quad \bar{Z} = y - i \frac{x^{k+1}}{k+1}, \quad (296)$$

$$\frac{\hat{d}_p \tilde{f}(z)}{dZ} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} - \frac{1}{x^k} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + x^k \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right), \quad (297)$$

$$\frac{\hat{d}_p \tilde{f}(z)}{d\bar{Z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \frac{1}{x^k} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} - x^k \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right). \quad (298)$$

Интегральное представление (277) и равенства (294) и (295) соответственно принимают вид

$$\begin{aligned} \tilde{f}(z) &= \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y) = P(f(z)) = \\ &= \int_0^x [x^{1-k} u(\xi, y) + i\xi^k v(\xi, y)] (x^2 - \xi^2)^{\frac{k}{2}-1} d\xi, \end{aligned} \quad (299)$$

$$\frac{\hat{d}_p \tilde{f}(z)}{dZ} = -\frac{1}{2x} v(0, y) + P \left(-\frac{\hat{d}f(z)}{idz} \right), \quad (300)$$

$$\frac{\hat{d}_p \tilde{f}(z)}{d\bar{Z}} = -\frac{1}{2x} v(0, y) + P \left(\frac{\hat{d}f(z)}{id\bar{z}} \right). \quad (301)$$

Вместо (277") получаем

$$\tilde{u}(0, y) = \frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{k}{2} + \frac{1}{2}\right)} u(0, y), \quad \tilde{v}(0, y) = 0. \quad (302)$$

Приведем пример на построение элементарных x^k -аналитических функций при помощи интегрального представления (299).

Аналитическая функция $f(z) = e^{itz}$, где t — вещественная постоянная, является решением задачи

$$-\frac{df(z)}{dz} + tf(z) = 0, \quad f(0) = 1. \quad (303)$$

Поэтому, учитывая (300) и условие $\operatorname{Im} f(z)|_{x=0} = 0$, соответствующую x^k -аналитическую функцию $\tilde{f}(z) = {}'e^{itz}$ ищем как решение задачи

$$\frac{\tilde{d}_p \tilde{f}(z)}{dz} + t\tilde{f}(z) = \tilde{0}, \quad \tilde{f}(0) = 1. \quad (304)$$

В результате находим

$$\begin{aligned} {}'e^{itz} &= \frac{2\Gamma\left(\frac{k}{2} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} P(e^{itz}) = \\ &= \frac{2\Gamma\left(\frac{k}{2} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^x e^{-ty} [x^{1-k} \cos t\xi + i\xi \sin t\xi] (x^2 - \xi^2)^{\frac{k}{2}-1} d\xi, \end{aligned}$$

или

$${}'e^{itz} = \frac{2\Gamma\left(\frac{k}{2} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} e^{-ty} \int_0^1 (\cos tx\beta + ix^k\beta \sin tx\beta) (1 - \beta^2)^{\frac{k}{2}-1} d\beta. \quad (305)$$

При помощи интегрального представления Пуассона функций Бесселя первого рода

$$J_\nu(x) = \frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^1 \cos x\beta (1 - \beta^2)^{\nu-\frac{1}{2}} d\beta \quad (306)$$

НАХОДИМ

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}'e^{itz} &= \Gamma\left(\frac{k}{2} + \frac{1}{2}\right) e^{-ty} \left(\frac{xt}{2}\right)^{-\frac{k-1}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(xt), \\ \operatorname{Im}'e^{itz} &= -\frac{2\Gamma\left(\frac{k}{2} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} e^{-ty} x^k t^{-1} \frac{d}{dx} \int_0^1 \cos tx\beta (1-\beta^2)^{\frac{k}{2}-1} d\beta = \\ &= -\Gamma\left(\frac{k}{2} + \frac{1}{2}\right) e^{-ty} x^k t^{-1} \frac{d}{dx} \left[\left(\frac{xt}{2}\right)^{-\frac{k-1}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(xt) \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, для показательной x^k -аналитической функции $'e^{itz}$ получаем выражение

$$\begin{aligned} 'e^{itz} &= \Gamma\left(\frac{k}{2} + \frac{1}{2}\right) e^{-ty} \left\{ \left(\frac{xt}{2}\right)^{-\frac{k-1}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(xt) - \right. \\ &\quad \left. - ix^k t^{-1} \frac{d}{dx} \left[\left(\frac{xt}{2}\right)^{-\frac{k-1}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(xt) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (307)$$

Точно таким же способом при помощи интегрального представления (299) можно получить всевозможные элементарные x^k -аналитические функции, являющиеся аналогами элементарных аналитических функций, удовлетворяющих, как функции от $\omega = iz$, обыкновенным дифференциальным уравнениям с постоянными вещественными коэффициентами и обращающихся в нуль при $x = 0$.

Замечание. Из приведенных выкладок видно, что если интегральное представление (277) заменить интегральным представлением

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\omega) &= \tilde{U}(\alpha, \beta) + i\tilde{V}(\alpha, \beta) = P_{\omega}^*(F(\omega)) = \\ &= \int_{\alpha}^{\infty} [U(\xi, \beta) \xi^{1-k} + i\xi V(\xi, \beta)] (\xi^2 - \alpha^2)^{\frac{k}{2}-1} d\xi \end{aligned} \quad (308)$$

и предположить, что $V(\alpha, \beta) \alpha^k|_{\alpha=\infty} = 0$, то вместо (284), (294), (295) и (299) соответственно получим

$$\frac{\tilde{d}_{\lambda, \nu} \tilde{F}(\omega)}{d\omega} = P_{\omega}^* \left(\frac{\bar{d}_{\lambda, \nu} F(\omega)}{d\omega} \right), \quad (309)$$

$$\frac{\hat{d}_p \tilde{f}(z)}{dZ} = P_{\omega}^* \left(-\frac{\hat{d}f(z)}{id\omega} \right), \quad (310)$$

$$\frac{\hat{d}_p \tilde{f}(z)}{d\bar{Z}} = P_{\omega}^* \left(\frac{\hat{d}f(z)}{id\bar{\omega}} \right), \quad (311)$$

$$\begin{aligned}\tilde{f}(z) &= \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y) = P^*(f(z)) = \\ &= \int_x^\infty [x^{1-k}u(\xi, y) + i\xi v(\xi, y)] (\xi^2 - x^2)^{\frac{k}{2}-1} d\xi.\end{aligned}\quad (312)$$

Равенства (300) и (301) совпадают соответственно с (310) и (311) при условии, что вместо P_ω^* подставляется P^* , $\omega = z = x + iy$.

Интегральное представление (312), как и интегральное представление (299), можно использовать для введения элементарных x^k -аналитических функций, являющихся аналогами элементарных аналитических функций $f(z) = u + iv$, которые, как функции от $\omega = iz$, представляют собой решения обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными вещественными коэффициентами и $v(x, y)x^k|_{x=\infty} = 0$.

§ 6. О ФОРМУЛАХ ОБРАЩЕНИЯ ОСНОВНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ p -АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С ХАРАКТЕРИСТИКОЙ $p = x^k$ ВДОЛЬ ПРОИЗВОЛЬНЫХ КОНТУРОВ

Вторая каноническая форма основного интегрального представления x^k -аналитических функций

Пусть $\tilde{f}(x, y) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y)$ — x^k -аналитическая функция от $z = x + iy$, определенная основным интегральным представлением (54) в области G ,

$$f^*(z) = u^*(x, y) + iv^*(x, y) = \tilde{u}(x, y) + i \frac{\tilde{v}(x, y)}{x^k} \quad (313)$$

является соответствующей ей присоединенной p -аналитической функцией от $z = x + iy$ с характеристикой $p = x^k$ (см. гл. 1, § 11; замечание 2), удовлетворяющей в силу (200) (гл. 1, § 11) уравнению

$$\frac{\widehat{d}f^*}{dz} = \frac{k}{2(z + \bar{z})} (\bar{f}^* - f^*). \quad (314)$$

На основании результатов, полученных в работах [103, 104], замечаем, что если мнимую часть основного интегрального представления (54) разделить на x^k , то его можно записать в эквивалентной форме

$$\begin{aligned}f^*(z) &= u^*(x, y) + iv^*(x, y) = \\ &= \frac{1}{2x^k} \int_{z_0}^z f(\xi)(z - \bar{\xi})^{\frac{k}{2}-1} (\bar{z} + \bar{\xi})^{\frac{k}{2}} d\xi + \bar{f}(\bar{\xi}) (\bar{z} - \bar{\xi})^{\frac{k}{2}} (z + \bar{\xi})^{\frac{k}{2}-1} d\bar{\xi},\end{aligned}\quad (315)$$

$$f^*(z) = u^*(x, y) + iv^*(x, y) = \int_{z_0}^z u(\xi, \eta) d\bar{Z} + iv(\xi, \eta) dZ, \quad (315')$$

где Z и $\bar{Z}$ — сопряженные переменные от $\zeta = \xi + i\eta$ с характеристикой $\rho = 1$,

$$\left. \begin{aligned} d\bar{Z} &= (z - \zeta)^{\frac{k}{2}-1} (\bar{z} + \bar{\zeta})^{\frac{k}{2}} \frac{d\bar{\zeta}}{2x^k} + (\bar{z} - \bar{\zeta})^{\frac{k}{2}} (z + \zeta)^{\frac{k}{2}-1} \frac{d\bar{\zeta}}{2x^k}, \\ dZ &= (z - \zeta)^{\frac{k}{2}-1} (\bar{z} + \bar{\zeta})^{\frac{k}{2}} \frac{d\zeta}{2x^k} - (\bar{z} - \bar{\zeta})^{\frac{k}{2}} (z + \zeta)^{\frac{k}{2}-1} \frac{d\zeta}{2x^k}. \end{aligned} \right\} \quad (315'')$$

Равенство (315) или (315') будем называть второй канонической формой основного интегрального представления ρ -аналитических функций от $z = x + iy$ с характеристикой $\rho = x^k$. В отличие от этого равенство (54) иногда будем называть первой канонической формой указанного основного интегрального представления. Равенство (315) или (315') можно также назвать основным интегральным представлением присоединенных ρ -аналитических функций от $z = x + iy$ с характеристикой $\rho = x^k$. При этом для интегрального представления (315) или (315'), так же как и для интегрального представления (54), существует три случая: а) область G в составе своей границы содержит отрезок L мнимой оси, $v|_L = 0$, z_0 — любая (нефиксированная) точка на L ($f(z) \subset M$); б) $z_0 = \infty$ и при $z \rightarrow \infty$ $f(z) = O(|z|^{-k-\varepsilon})$, $\varepsilon = \text{const} > 0$ ($f(z) \subset M_1$); в) $z_0 \neq \infty$ и при $z \rightarrow z_0$ $f(z) = O(|z - z_0|^{-1+\varepsilon})$ ($f(z) \subset M_2$).

Замечание 1. Если $k > 2$, $f^*(z)$ — присоединенная x^k -аналитическая функция, определенная основным интегральным представлением присоединенных x^k -аналитических функций (315), то

$$f_1^*(z) = \frac{1}{x^{k-2}} \frac{\hat{d}^2}{dzdz} (x^k f^*(z)) \quad (316)$$

является присоединенной x^{k-2} -аналитической функцией.

Справедливость этого утверждения вытекает из представления $\left[\left(\frac{k}{2} - 1\right) \frac{k}{2}\right]^{-1} f_1^*(z)$ в виде правой части равенства (315) при условии, что вместо k подставляется $k - 2$. В этом также можно легко убедиться, например, при $k = 3$ с помощью непосредственной проверки равенства (314).

Формулы обращения

основного интегрального представления

x^k -аналитических функций при целых нечетных k

При помощи формулы Дирихле перестановки порядка интегрирования можно получить важные интегральные тождества. Например, она позволяет решить интегральное уравнение Абеля, установить формулы обращения основного интегрального представления

x^k -аналитических функций в декартовых, полярных, биполярных и видоизмененных биполярных координатах (см. § 3), для интеграла

$$\Phi(z, \bar{z}) = -\frac{2}{\pi|z - \bar{z}|} \int_z^{\zeta} \varphi(\zeta) \sqrt{\frac{\zeta - \bar{z}}{\zeta - z}} d\zeta, \quad \Phi(\bar{z}, z) = \overline{\Phi(z, \bar{z})}, \quad (317)$$

($\varphi(z)$ — аналитическая функция в области, симметричной относительно оси x , $\varphi(\bar{z}) = \overline{\varphi(z)}$, контур интеграции любой лежащий в указанной области и пересекающий ось x в одной точке) получить формулу обращения [105]

$$\varphi(z) = \frac{1}{2} \frac{d}{dz} \int_z^{\bar{z}} \Phi(\zeta, \bar{\zeta}) \sqrt{\frac{z - \bar{\zeta}}{z - \zeta}} h(z, \zeta) d\zeta, \quad (318)$$

где $h(z, \zeta) = \text{sign} [-(z - \bar{z})(\zeta - \bar{\zeta})]$.

Поставим задачу о нахождении формул обращения основного интегрального представления x^k -аналитических функций (54) вдоль произвольных контуров. В отличие от формул обращения, полученных в § 3 и называемых в дальнейшем формулами первого рода, условимся формулы обращения основного интегрального представления (54) вдоль произвольных контуров называть формулами обращения второго рода.

Рассмотрим [106] формулу Дирихле перестановки порядка интегрирования в комплексной форме и покажем, что при целых нечетных k с помощью этой формулы полностью решается поставленная задача о нахождении формул обращения основного интегрального представления (54) второго рода.

Рассмотрим интегралы

$$F(z) = \int_{z_0}^z \varphi(\zeta) P(z, \zeta) d\zeta + \bar{\varphi}(\bar{\zeta}) Q(z, \zeta) d\bar{\zeta}, \quad (319)$$

$$\Phi(z) = \int_{z_0}^z F(t) P^*(z, t) dt + \bar{F}(\bar{t}) Q^*(z, t) d\bar{t}, \quad (320)$$

где z_0 и контур интеграции Γ такие же, как и в (315), $\varphi(\zeta)$, $P(z, \zeta)$, $Q(z, \zeta)$, $P^*(z, t)$, $Q^*(z, t)$ — заданные функции соответственно от ζ и t , определенные и непрерывные на Γ , причем такие, что интегралы правых частей равенств (319) и (320) сходятся и перестановка порядка интегрирования в двойном интеграле (320) законна. Если $z_0 \neq \infty$, то правая часть равенства (320), где $F(t)$ представляется в виде (319), является двойным интегралом по дуговым абсциссам σ и τ точек ζ и t , измеряемым от точки z_0 , в области $0 < \sigma < \tau$, $0 < \tau < s$ (s — дуговая абсцисса точки z). При $z_0 = \infty$ правая часть равенства (320) является двойным интегралом по дуговым абсциссам σ и τ точек ζ и t , измеряемым от точки z , в области $0 < \tau < \infty$, $\tau < \sigma < \infty$. Перестановка порядка интегрирования

в (320) по формулам Дирихле приводит к равенству

$$\Phi(z) = \int_{z_0}^z \varphi(\zeta) R(z, \zeta) d\zeta + \bar{\varphi}(\zeta) S(z, \zeta) d\bar{\zeta}, \quad (321)$$

где

$$R(z, \zeta) = \int_{\zeta}^z P^*(z, t) P(t, \zeta) dt + Q^*(z, t) \bar{Q}(t, \zeta) d\bar{t}, \quad (321')$$

$$S(z, \zeta) = \int_{\zeta}^z P^*(z, t) Q(t, \zeta) dt + Q^*(z, t) \bar{P}(t, \zeta) d\bar{t}. \quad (321'')$$

Равенство (321) можно истолковать как формулу Дирихле перестановки порядка интегрирования в комплексной форме.

При $k = 1$ основное интегральное представление (54) или (315) принимает вид

$$f^*(z) = u^*(x, y) + iv^*(x, y) = \frac{1}{2x} \int_{z_0}^z f(\zeta) \sqrt{\frac{\bar{z} + \zeta}{z - \zeta}} d\zeta + \\ + \bar{f}(\zeta) \sqrt{\frac{\bar{z} - \zeta}{z + \zeta}} d\bar{\zeta}. \quad (322)$$

Полагая

$$\varphi(\zeta) = f(\zeta), \quad P(z, \zeta) = \frac{1}{2x} \sqrt{\frac{\bar{z} + \zeta}{z - \zeta}}, \quad Q(z, \zeta) = \frac{1}{2x} \sqrt{\frac{\bar{z} - \zeta}{z + \zeta}}, \quad (323)$$

$$F(z) = f^*(z), \quad P^*(z, t) = \sqrt{\frac{\bar{t} + z}{t - z}}, \quad Q^*(z, t) = \sqrt{\frac{\bar{t} - z}{t + z}}, \quad (323')$$

получаем равенства (320), (321), в которых вместо $F(t)$ и $\varphi(\zeta)$ подставлено $f^*(t)$ и $f(\zeta)$, и в соответствии с (321') (321'')

$$R(z, \zeta) = \int_{\zeta}^z \frac{1}{t + \bar{t}} \left[\sqrt{\frac{\bar{t} + z}{t - z}} \sqrt{\frac{\bar{t} + \zeta}{t - \zeta}} dt + \sqrt{\frac{\bar{t} - z}{t + z}} \sqrt{\frac{\bar{t} - \zeta}{t + \zeta}} d\bar{t} \right], \\ S(z, \zeta) = R(z, -\bar{\zeta}).$$

Полагая

$$\Omega(z, \zeta, t) = 2 \ln \left[\sqrt{\frac{(t - \zeta)(\bar{t} + z)}{t + \bar{t}}} + \sqrt{\frac{(t - z)(\bar{t} + \zeta)}{t + \bar{t}}} \right]$$

и проводя разрез вдоль контура интеграции Γ , находим

$$S(z, \zeta) = 0, \quad R(z, \zeta) = \Omega(z, \zeta, t) \Big|_{t=\zeta}^{t=z} = \ln(z - \zeta) - \ln(\zeta - z) = \mp i\pi,$$

в последнем равенстве знаки «минус» и «плюс» относятся соответственно к левому и правому краям разреза. В силу этого формулу обращения основного интегрального представления (54) при $k = 1$

или (322) можно записать в виде

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = \mp \frac{1}{\pi i} \frac{d}{dz} \int_{z_0}^z f^*(t) \sqrt{\frac{\bar{t}+z}{t-z}} dt + \\ + \bar{f}^*(t) \sqrt{\frac{t-z}{\bar{t}+z}} d\bar{t}, \quad (324)$$

или

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = \\ = \mp \frac{1}{\pi i} \frac{d}{dz} \int_{z_0}^z \tilde{u}(\xi, \eta) d\tilde{Z} + i\tilde{v}(\xi, \eta) dZ, \quad (324')$$

где $\tilde{Z}$ и Z — сопряженные переменные от $t = \xi + i\eta$ с характеристикой $\rho = \xi$,

$$\tilde{Z} = 2 \sqrt{(t-z)(\bar{t}+z)}, \quad Z = 4 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{t-z}{\bar{t}+z}}, \quad (324'')$$

знаки «минус» и «плюс» относятся к случаям, когда под подынтегральными выражениями подразумеваются их значения соответственно на левом и правом краях разреза вдоль Γ .

Пусть теперь $k = 2m + 1$, где m — целое положительное число. Учитывая замечание 1, получаем формулу обращения основного интегрального представления (54) или (315) в виде

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = \\ = \mp \frac{1}{\pi i} \frac{d}{dz} \int_{z_0}^z f_1^*(t) \sqrt{\frac{\bar{t}+z}{t-z}} dt + \bar{f}_1^*(t) \sqrt{\frac{t-z}{\bar{t}+z}} d\bar{t}, \quad (325)$$

или

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = \\ = \mp \frac{1}{\pi i} \frac{d}{dz} \int_{z_0}^z \tilde{u}_1(\xi, \eta) d\tilde{Z} + i\tilde{v}_1(\xi, \eta) dZ, \quad (325')$$

где

$$f_1^*(z) = u_1^*(x, y) + iv_1^*(x, y) = \frac{c}{x} \frac{\hat{d}^{2m}}{dz^m d\bar{z}^m} (x^k f^*(z)), \quad (326) \\ c = \left[\left(\frac{k}{2} - 1 \right) \frac{k}{2} \left(\frac{k}{2} - 2 \right) \left(\frac{k}{2} - 1 \right) \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \right]^{-1},$$

$$\tilde{f}_1(z) = \tilde{u}_1(x, y) + i\tilde{v}_1(x, y) = u_1^*(x, y) + ixv_1^*(x, y). \quad (326')$$

Остальные обозначения такие же, как и в (324), (324').

Замечание 2. Пусть в равенстве (322) контур интеграции Γ — часть заданного фиксированного контура Γ^* с фиксированными начальной и конечной точками z_0, z_1 , лежащими, как и Γ^* , в правой полуплоскости $z = x + iy$, и пусть $f^*(z) = u^*(x, y) + iv^*(x, y)$ — непрерывная функция длины дуги контура Γ^* , заданная на ле-

вом или правом крае разреза вдоль Γ^* и такая, что при условиях (323), (323') перестановка порядка интегрирования в (320) законна. Тогда, если равенство (322) рассматривать как интегральное уравнение относительно неизвестной функции $f(z)$ на левом или на правом крае разреза вдоль Γ^* , то равенство (324), в котором интегрирование от z_0 до z ведется вдоль Γ по соответствующему краю разреза, следует рассматривать как решение этого интегрального уравнения.

**Формулы обращения второго рода
основного интегрального представления
 x^k -аналитических функций
при произвольных положительных значениях k**

Итак, мы рассмотрели задачу о нахождении формул обращения второго рода основного интегрального представления (54) или (315) при k , равном единице или целому нечетному числу. Приведем теперь полученное в работах [103, 107—109] решение этой же задачи при произвольных положительных значениях k . Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. Если $\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y)$ — функция, x^k -аналитическая в области G , то

$$\begin{aligned}\tilde{F}(z) &= \tilde{U}(x, y) + i\tilde{V}(x, y) = \\ &= x^{k-1} \tilde{u}(x, y) + i \int x^{1-k} \frac{\partial \tilde{v}(x, y)}{\partial x} dx + \left(x^{1-k} \frac{\partial \tilde{v}(x, y)}{\partial y} + \right. \\ &\quad \left. + (k-1) \tilde{u}(x, y) \right) dy\end{aligned}\quad (327)$$

является $x^{k'}$ -аналитической функцией в G , где $k' = 2 - k$.

В самом деле, подставляя в уравнение x^k -гармоничности

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} + \frac{k}{x} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = 0$$

функцию $\tilde{u} = x^{1-k} U$, убеждаемся, что $\tilde{U}$ является $x^{k'}$ -гармонической функцией от x и y . Из условий x^k -аналитичности функции $\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y)$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = \frac{1}{x^k} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} = -\frac{1}{x^k} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}$$

находим

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} &= -\frac{1-k}{x} \tilde{U} + \frac{1}{x} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = \frac{1}{x^{k'}} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial y}, \\ \frac{\partial \tilde{U}}{\partial y} &= -\frac{1}{x} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} = -\frac{1}{x^{k'}} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x}.\end{aligned}$$

Определяя отсюда $\frac{\partial \tilde{V}}{\partial x}$ и $\frac{\partial \tilde{V}}{\partial y}$, приходим к выводу, что функция

$\tilde{F}(z) = \tilde{U}(x, y) + i\tilde{V}(x, y)$ (327) является $x^{k'}$ -аналитической.

Пусть в дальнейшем k удовлетворяет условию

$$0 < k < 2. \quad (328)$$

Лемма 2. Если $F^*(z) = U^*(x, y) + iV^*(x, y)$ — присоединенная $x^{k'}$ -аналитическая функция,

$$F^*(z) = U^*(x, y) + iV^*(x, y) = \tilde{U}(x, y) + i \frac{1}{x^{k'}} \tilde{V}(x, y), \quad (329)$$

то интеграл

$$J(z) = \int_{z_0}^z F^*(t) (t-z)^{\frac{k'}{2}-1} (\bar{t}+z)^{\frac{k'}{2}} dt + \\ + \bar{F}^*(t) (t-z)^{\frac{k'}{2}} (\bar{t}+z)^{\frac{k'}{2}-1} d\bar{t} \quad (330)$$

не зависит от контура Γ , соединяющего точки z_0 и z , и является функцией от $z = x + iy$, аналитической в области G .

Действительно, справедливость первой части утверждения вытекает из тождества

$$\frac{\hat{d}}{d\bar{t}} (F^*(t) (t-z)^{\frac{k'}{2}-1} (\bar{t}+z)^{\frac{k'}{2}}) = \frac{\hat{d}}{dt} (F^*(t) (t-z)^{\frac{k'}{2}} (\bar{t}+z)^{\frac{k'}{2}-1}), \quad (331)$$

которое легко проверяется, если учесть уравнение (314) (с подстановкой k' вместо k и F^* — вместо f^*). Проводя вдоль Γ разрез и понимая под подынтегральными функциями в (330) (как и в (54)) их значения на левом (или правом) крае разреза, находим

$$J(z) [1 - e^{\mp i2\pi(\frac{k'}{2}-1)}] = \int_{\gamma} F^*(t) (t-z)^{\frac{k'}{2}-1} (\bar{t}+z)^{\frac{k'}{2}} dt + \\ + \bar{F}^*(t) (t-z)^{\frac{k'}{2}} (\bar{t}+z)^{\frac{k'}{2}-1} d\bar{t}, \quad (332)$$

где γ — контур, идущий из точки z_0 на левом (или правом) крае разреза, обходящий точку $z = x + iy$ в отрицательном (или положительном) направлении и возвращающийся в точку z_0 на правом (или левом) крае разреза; знак «минус» в показателе степени в левой части равенства соответствует случаю обхода точки z в отрицательном направлении, знак «плюс» — в положительном. Правую часть равенства (332) можно дифференцировать по z под знаком интеграла, и, следовательно, $J(z)$ — функция, аналитическая в области G .

В случаях «б» и «в» введем некоторые дополнительные предположения. Вместо случая «б» будем говорить о случае «б'», считая, что в G существует прямолинейный горизонтальный отрезок C , идущий

из точки $z_0 = \infty$ в точку z области G , и на этом отрезке при $z \rightarrow \infty$ $f(z)$, $\frac{df(z)}{dz} = O(x^{-2-\varepsilon})$ ($\varepsilon = \text{const} > 0$). Из случая «в» выделим случаи «в'» и «в''», считая, что в G существует прямолинейный горизонтальный отрезок C , идущий из точки z_0 соответственно вправо или влево, и что $f(z)$ и $\frac{df(z)}{dz}$ при подходе к точке z_0 для определенности ограничены.

А. Рассмотрим случаи «а» и «в'». Выберем $\arg(z - \zeta)$ ($z + \zeta$), как и при нахождении формул обращения первого рода (§ 3), равным нулю на верхнем (левом) крае разреза вдоль C . Введем функцию

$$\begin{aligned} f_1(z) = u_1(x, y) + iv_1(x, y) &= \mu \frac{1}{2e^{i\pi(\frac{k'}{2}-1)}} \frac{d}{dz} J(z) = \\ &= \mu \frac{1}{2e^{i\pi(\frac{k'}{2}-1)}} \frac{d}{dz} \int_{z_0}^z F^*(t) (t-z)^{\frac{k'}{2}-1} (\bar{t}+z)^{\frac{k'}{2}} dt + \\ &\quad + \bar{F}^*(t) (t-z)^{\frac{k'}{2}} (\bar{t}+z)^{\frac{k'}{2}-1} d\bar{t}, \end{aligned} \quad (333)$$

где, как и ранее, z — любая точка области G , z_0 — любая (нефиксированная) точка на L в случае «а» и указанная выше фиксированная точка в случае «в'», Γ — любой контур, лежащий в G и соединяющий точки z_0 и z , под подынтегральными функциями понимаются их значения на левом крае разреза вдоль Γ ,

$$\mu = 2\Gamma^{-1} \left(-\frac{k}{2} + 1 \right) \Gamma^{-1} \left(\frac{k}{2} \right). \quad (333')$$

Функция (333), очевидно, будет аналитической в области G . На отрезке C

$$f_1(z) = \mu \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \int_{x_0}^x [F^*(t)(\xi+x) + \bar{F}^*(t)(\xi-x)] (x^2 - \xi^2)^{\frac{k'}{2}-1} d\xi,$$

или

$$f_1(z) = \mu \frac{d}{dx} \int_{x_0}^x \left[\tilde{u}(\xi, y) \xi^k + i \frac{x}{\xi^{2-k}} \tilde{v}(\xi, y) \right] \frac{d\xi}{(x^2 - \xi^2)^{\frac{k}{2}}}, \quad x_0 = \text{Re } z_0. \quad (334)$$

Основное интегральное представление (54) на отрезке C принимает вид

$$\begin{aligned} \tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y) &= \int_{x_0}^x [x^{1-k} u(\xi, y) + i\xi^k v(\xi, y)] (x^2 - \xi^2)^{\frac{k}{2}-1} d\xi = \\ &= \int_{\frac{x_0}{x}}^1 [u(x\beta, y) + ix^k \beta v(x\beta, y)] (1 - \beta^2)^{\frac{k}{2}-1} d\beta. \end{aligned} \quad (335)$$

При подходе к точке $z_0 = x_0 + iy$ ($x_0 = 0$ или $x_0 > 0$) $f(z)$ и $\frac{df(z)}{dz}$ должны быть ограничены в случае «а» и ограничены по предположению в случае «в'». Из (335) следует, что таким же свойством должны обладать $\tilde{u}(x, y)$, $\tilde{v}(x, y)$ и их частные производные по x и y . Исходя из (335) и (327) и считая, что интеграл в правой части равенства (327) берется в пределах от точки z_0 до z , замечаем, что

$$\tilde{v}(x, y)|_{z=z_0} = 0, \quad \tilde{V}(x, y)|_{z=z_0} = 0. \quad (336)$$

Формула обращения первого рода основного интегрального представления (54) вдоль отрезка C , или, что то же самое, равенства (335), имеет вид (§3)

$$u(x, y) + i xv(x, y) = \mu \frac{d}{dx} \int_{x_0}^x [\tilde{u}(\xi, y) \xi^{k-1} + i \tilde{v}(\xi, y)] \frac{\xi d\xi}{(x^2 - \xi^2)^{\frac{k}{2}}}. \quad (337)$$

Из (336) и (337) видим, что на отрезке C выполняются равенства

$$u_1(x, y) = u(x, y) = \mu \frac{d}{dx} \int_{x_0}^x \tilde{u}(\xi, y) \frac{\xi^k d\xi}{(x^2 - \xi^2)^{\frac{k}{2}}}, \quad (338)$$

$$\begin{aligned} v_1(x, y) &= \mu \frac{d}{dx} \int_{x_0}^x \frac{x}{\xi^{2-k}} \tilde{V}(\xi, y) \frac{d\xi}{(x^2 - \xi^2)^{\frac{k}{2}}} = \\ &= \mu \frac{d}{dx} \int_{\frac{x_0}{x}}^1 \tilde{V}(x\beta, y) \frac{\beta^{k-2} d\beta}{(1 - \beta^2)^{\frac{k}{2}}}, \end{aligned} \quad (339)$$

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \mu \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \int_{x_0}^x \tilde{v}(\xi, y) \frac{\xi d\xi}{(x^2 - \xi^2)^{\frac{k}{2}}} = \\ &= \mu \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \int_{\frac{x_0}{x}}^1 \tilde{v}(x\beta, y) \frac{x^{2-k} \beta d\beta}{(1 - \beta^2)^{\frac{k}{2}}}. \end{aligned} \quad (340)$$

Из равенств (339) и (340), учитывая (336), находим на C

$$v_1(x, y) = v(x, y) = \mu x^{1-k} \int_{\frac{x_0}{x}}^1 \frac{\partial \tilde{v}(x\beta, y)}{\partial x \beta} \frac{d\beta}{(1 - \beta^2)^{\frac{k}{2}}}. \quad (341)$$

Равенства (338) и (341) означают, что на C аналитические функции $f_1(z)$ и $f(z)$ совпадают и, следовательно, в области G $f_1(z) \equiv$

$\equiv f(z)$. Таким образом, в силу (54) или (315) искомая формула обращения основного интегрального представления в случаях «а» и «в'» имеет вид

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x, y) + iv(x, y) = \\ &= \mu \frac{1}{2e^{i\pi\left(\frac{k'}{2}-1\right)}} \frac{d}{dz} \int_{z_0}^z F^*(t) (t-z)^{\frac{k'}{2}-1} (\bar{t}+z)^{\frac{k'}{2}} dt + \\ &+ \bar{F}^*(t) (t-z)^{\frac{k'}{2}} (\bar{t}+z)^{\frac{k'}{2}-1} d\bar{t}, \end{aligned} \quad (342)$$

где все обозначения в правой части имеют тот же смысл, что и в равенстве (333), в частности под подынтегральными функциями понимаются, как и в (54), их значения на левом крае разреза вдоль Γ , $\arg(t-z)(\bar{t}+z)$ при $t = \xi + iy$, $z = x + iy$, $x > \xi$ равен π . Формулу обращения (342) можно записать в следующей эквивалентной форме:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = \mu \frac{1}{2e^{i\pi\left(\frac{k'}{2}-1\right)}} \frac{d}{dz} \int_{z_0}^z \tilde{U}(\xi, \eta) d\tilde{Z} + i\tilde{V}(\xi, \eta) dZ, \quad (342')$$

где $\tilde{Z}$ и Z — сопряженные переменные от $t = \xi + i\eta$ с характеристикой $\rho = \xi^{k'}$,

$$\begin{aligned} \tilde{Z} &= \frac{2}{k'} (t-z)^{\frac{k'}{2}} (\bar{t}+z)^{\frac{k'}{2}}, \\ dZ &= \frac{2^{k'}}{(t+\bar{t})^{k'}} \left[(t-z)^{\frac{k'}{2}-1} (\bar{t}+z)^{\frac{k'}{2}} dt - (t-z)^{\frac{k'}{2}} (\bar{t}+z)^{\frac{k'}{2}-1} d\bar{t} \right] = \\ &= 2^{k'+1} \left(\sqrt{\frac{t-z}{\bar{t}+z}} + \sqrt{\frac{\bar{t}+z}{t-z}} \right)^{-k'} d \ln \sqrt{\frac{t-z}{\bar{t}+z}}. \end{aligned} \quad (342'')$$

Б. Рассмотрим случаи «б'» и «в''». Выберем $\arg(z-\xi)(\bar{z}+\xi)$, как и при построении формул обращения первого рода (§ 3), на верхнем (правом) крае разреза вдоль C равным $-\pi$. Под подынтегральными функциями как в (54), так и в последующих равенствах будем понимать их значения на правом крае разреза вдоль Γ . Введем функцию

$$\begin{aligned} f_2(z) &= u_2(x, y) + iv_2(x, y) = \mu \frac{1}{2} \frac{d}{dz} J(z) = \\ &= \mu \frac{1}{2} \frac{d}{dz} \int_{z_0}^z F^*(t) (t-z)^{\frac{k'}{2}-1} (\bar{t}+z)^{\frac{k'}{2}} dt + \bar{F}^*(t) (t-z)^{\frac{k'}{2}} \times \\ &\times (\bar{t}+z)^{\frac{k'}{2}-1} d\bar{t}, \end{aligned} \quad (343)$$

где z — любая точка области G , $z_0 = \infty$ в случае «б'» и $z_0 = x_0 + iy$ — фиксированная точка на границе области G в случае «в'», Γ — любой контур, лежащий в G и соединяющий точку z_0 с точкой z ; под подынтегральными функциями понимаются их значения на правом крае разреза вдоль Γ ; остальные обозначения такие же, как и в (333).

Функция $f_2(z)$, очевидно, будет аналитической в области G , и на отрезке C для нее выполняется равенство

$$f_2(z) = \mu \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \int_{x_0}^x [F^*(t)(\xi + x) + F^*(t)(\xi - x)] (\xi^2 - x^2)^{\frac{k'}{2}-1} d\xi,$$

или

$$\begin{aligned} f_2(z) &= u_2(x, y) + iv_2(x, y) = \\ &= \mu \frac{d}{dx} \int_{x_0}^x \left[\tilde{u}(\xi, y) \xi^k + i \frac{x}{\xi^{2-k}} \tilde{V}(\xi, y) \right] \frac{d\xi}{(\xi^2 - x^2)^{\frac{k}{2}}}, \end{aligned} \quad (344)$$

где $x_0 = \infty$ в случае «б'» и $0 < x < x_0 < \infty$ в случае «в'». Основное интегральное представление x^k -аналитических функций (54) на отрезке C принимает вид

$$\begin{aligned} \tilde{f}(z) &= \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y) = \int_{x_0}^x [x^{1-k} u_3(\xi, y) + i\xi v_3(\xi, y)] \times \\ &\times (\xi^2 - x^2)^{\frac{k}{2}-1} d\xi = \int_{\frac{x_0}{x}}^1 [u_3(x\beta, y) + ix^k \beta v_3(x\beta, y)] (\beta^2 - 1)^{\frac{k}{2}-1} d\beta, \end{aligned} \quad (345)$$

где

$$f_3(z) = u_3(x, y) + iv_3(x, y) = e^{-i\pi(\frac{k}{2}-1)} \tilde{f}(z). \quad (346)$$

Формула обращения первого рода интегрального представления (54) на отрезке C , или, что то же самое, равенства (345), записывается в виде (§ 3)

$$u_3(x, y) + ixv_3(x, y) = \mu \frac{d}{dx} \int_{x_0}^x [\tilde{u}(\xi, y) \xi^{k-1} + i\tilde{v}(\xi, y)] \frac{\xi d\xi}{(\xi^2 - x^2)^{\frac{k}{2}}}. \quad (347)$$

В случае «в'» из ограниченности $f(z)$ и $\frac{df(z)}{dz}$ при подходе к точке z_0 согласно (345) следует, что таким же свойством обладают $\tilde{u}(x, y)$, $\tilde{v}(x, y)$ и их частные производные по x и y . Считая, что в правой части равенства (327) интегрирование ведется от точки z_0 до точки z , можем сказать, что в данном случае справедливы равенства

$$\tilde{v}(x, y)|_{z=z_0} = 0, \quad \tilde{V}(x, y)|_{z=z_0} = 0. \quad (336')$$

В случае «б'» на отрезке C по определению $f(z)$, $\frac{df(z)}{dz} = O(x^{-2-\varepsilon})$ при $x \rightarrow \infty$. Исходя из (345), видим, что на этом отрезке при $x \rightarrow \infty$

$$\tilde{u}(x, y), \frac{\partial \tilde{u}(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial \tilde{u}(x, y)}{\partial y} = O(x^{-2-\varepsilon}), \quad \tilde{v}(x, y) = O(x^{k-2-\varepsilon}).$$

Поэтому, считая, что в правой части равенства (327) интегрирование ведется от точки z_0 до точки z , приходим к равенствам (336').

На основании равенства (334) и (347) заключаем, что на отрезке C выполняются соотношения

$$u_2(x, y) = u_3(x, y) = \mu \frac{d}{dx} \int_{x_0}^x \tilde{u}(\xi, y) \frac{\xi^k d\xi}{(\xi^2 - x^2)^{\frac{k}{2}}}, \quad (348)$$

$$\begin{aligned} v_2(x, y) &= \mu \frac{d}{dx} \int_{x_0}^x \frac{x}{\xi^{2-k}} \tilde{V}(\xi, y) \frac{d\xi}{(\xi^2 - x^2)^{\frac{k}{2}}} = \\ &= \mu \frac{d}{dx} \int_{\frac{x_0}{x}}^1 \tilde{V}(\xi, y) \frac{\beta^{k-2} d\beta}{(\beta^2 - 1)^{\frac{k}{2}}}, \end{aligned} \quad (349)$$

$$\begin{aligned} v_3(x, y) &= \mu \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \int_{x_0}^x \tilde{v}(\xi, y) \frac{\xi d\xi}{(\xi^2 - x^2)^{\frac{k}{2}}} = \\ &= \mu \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \int_{\frac{x_0}{x}}^1 \tilde{v}(x\beta, y) \frac{x^{2-k} \beta d\beta}{(\beta^2 - 1)^{\frac{k}{2}}}. \end{aligned} \quad (350)$$

Из равенств (349) и (350), учитывая (336'), на отрезке C находим

$$v_2(x, y) = v_3(x, y) = \mu x^{1-k} \int_{\frac{x_0}{x}}^1 \frac{\partial \tilde{v}(x\beta, y)}{\partial x \beta} \frac{d\beta}{(\beta^2 - 1)^{\frac{k}{2}}}. \quad (351)$$

Таким образом, на C справедливо равенство $f_3(z) = f_2(z)$ или $f(z) = e^{i\pi(\frac{k}{2}-1)} f_2(z)$. В силу того что $f(z)$ и $f_2(z)$ — аналитические функции от z , последнее равенство выполняется во всей области G . Следовательно, искомая формула обращения второго рода основного интегрального представления x^k -аналитических функций от $z = x + iy$ (54) в случаях «б'» и «в'» имеет вид

$$\begin{aligned} f(z) &= \mu \frac{1}{2e^{i\pi \frac{k'}{2}}} \frac{d}{dz} \int_{z_0}^z F^*(t) (t - z)^{\frac{k'}{2}-1} (\bar{t} + z)^{\frac{k'}{2}} dt + \\ &+ F^*(t) (t - z)^{\frac{k'}{2}} (\bar{t} + z)^{\frac{k'}{2}-1} d\bar{t}. \end{aligned} \quad (352)$$

Все обозначения в правой части равенства (352) имеют тот же смысл, что и в равенстве (343). В частности, под подынтегральными функциями понимаются, как и в (54), их значения на правом крае разреза вдоль Γ , $\arg(t-z)(t+z) = 0$ при $t = \xi + iy$, $z = x + iy$ ($x < \xi$). Формулу (352) можно записать в следующей эквивалентной форме:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = \mu \frac{1}{2e^{i\pi \frac{k'}{2}}} \frac{d}{dz} \int_{z_0}^z \tilde{U}(\xi, \eta) d\tilde{Z} + i\tilde{V}(\xi, \eta) dZ, \quad (352')$$

где $\tilde{Z}$ и Z — сопряженные переменные от $t = \xi + i\eta$ с характеристикой $p = \xi^{k'}$,

$$\left. \begin{aligned} \tilde{Z} &= \frac{2}{k'} (t-z)^{\frac{k'}{2}} (\bar{t}+z)^{\frac{k'}{2}}, \\ dZ &= 2^{k'+1} \left(\sqrt{\frac{t-z}{\bar{t}+z}} + \sqrt{\frac{\bar{t}+z}{t-z}} \right)^{-k'} d \ln \sqrt{\frac{t-z}{\bar{t}+z}}. \end{aligned} \right\} \quad (352'')$$

Таким образом, вопрос о формулах обращения второго рода основного интегрального представления x^k -аналитических функций от z (54) или (315) при $0 < k < 2$ полностью решается равенством (342) или (342') в случаях «а» и «в'» и равенством (352) или (352') в случаях «б'» и «в''».

Пусть

$$k = 2m + k_1, \quad 0 < k_1 = \text{const} < 2 \quad (353)$$

(m — целое положительное число). В силу замечания 1

$$f_1^*(z) = u_1^*(x, y) + iv_1^*(x, y) = \frac{c}{x^{k_1}} \frac{\hat{a}^{2m}}{dz^m d\bar{z}^m} (x^k f^*(z)), \quad (354)$$

где

$$c = \left[\left(\frac{k}{2} - 1 \right) \frac{k}{2} \left(\frac{k}{2} - 2 \right) \left(\frac{k}{2} - 1 \right) \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \right]^{-1}, \quad (354')$$

является присоединенной x^{k_1} -аналитической функцией. Вводя x^{k_1} -аналитическую функцию

$$\tilde{f}_1(z) = \tilde{u}_1(x, y) + i\tilde{v}_1(x, y) = u_1^*(x, y) + ix^{k_1}v_1^*(x, y) \quad (355)$$

и поступая с ней точно так же, как мы это делали по отношению к функции $\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y)$ при $0 < k < 2$, приходим к выводу, что в случаях «а» и «в'» формула обращения основного интегрального представления (54) или (315) x^k -аналитических функций при $k = 2m + k_1$ имеет вид (342) или (342') при условии, что в этих равенствах вместо k подставляется k_1 , а вместо $\tilde{u}(x, y)$ и $\tilde{v}(x, y)$ — соответственно $\tilde{u}_1(x, y)$ и $\tilde{v}_1(x, y)$. Аналогично в слу-

чаях «б'» и «в'» формула обращения указанного интегрального представления при $k = 2m + k_1$ имеет вид (352) или (352') при условии, что в этих равенствах вместо k подставляется k_1 , а вместо $\tilde{u}(x, y)$ и $\tilde{v}(x, y) - \tilde{u}_1(x, y)$ и $\tilde{v}_1(x, y)$.

О задаче линейного сопряжения x -аналитических функций от $z = x + iy$

Основное интегральное представление x^k -аналитических функций и формула его обращения при $k = 1$ соответственно имеют вид [108, 109]

$$\begin{aligned} \tilde{f}(z) &= \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y) = P(f(\zeta)) = \\ &= \operatorname{Re} \int_{z_0}^z f(\zeta) \frac{d\zeta}{V(z-\zeta)(\bar{z}+\zeta)} + i \operatorname{Im} \int_{z_0}^z f(\zeta) \frac{\zeta - iy}{V(z-\zeta)(\bar{z}+\zeta)} d\zeta, \end{aligned} \quad (356)$$

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x, y) + iv(x, y) = P^{-1}(\tilde{f}(t)) = \\ &= -\frac{1}{\pi i} \frac{d}{dz} \int_{z_0}^z \tilde{u}(\xi, \eta) d\tilde{Z} + i\tilde{v}(\xi, \eta) dZ, \end{aligned} \quad (357)$$

$$\tilde{Z} = 2\sqrt{(t-z)(\bar{t}+z)}, \quad Z = 4 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{t-z}{t+z}}. \quad (357')$$

Исходя из основного интегрального представления (356) и формулы его обращения (357), можно сформулировать вполне естественную постановку и указать способ решения краевой задачи, которая по аналогии с задачей в теории аналитических функций называется задачей линейного сопряжения x -аналитических функций от $z = x + iy$ с характеристикой $\rho = x$. Приведем два случая этой задачи.

Задача А (случай правой полуплоскости с несквозным разрезом). Пусть C — кусочно-гладкий контур без самопересечений, соединяющий точку z_0 на мнимой оси с точкой b в правой полуплоскости z . Требуется найти функцию $\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y)$, x -аналитическую в правой полуплоскости $z = x + iy$ с разрезом вдоль контура C , непрерывно продолжимую на C слева и справа и удовлетворяющую краевым условиям

$$\tilde{f}^+(z) - \kappa \tilde{f}^-(z) = \bar{g}(z) - \kappa ic, \quad z \in C, \quad (358)$$

$$\operatorname{Im} \tilde{f}(z)|_{\substack{x=0 \\ y > -iz_0}} = 0, \quad \operatorname{Im} \tilde{f}(z)|_{\substack{x=0 \\ y < -iz_0}} = c, \quad (359)$$

где знаки «плюс» и «минус» указывают на предельные значения функции $\tilde{f}(z)$ на C слева и справа, κ — заданное вещественное число, $\bar{g}(z)$ — заданная непрерывная функция точки z на контуре C ,

удовлетворяющая условию $\text{Im } \tilde{g}(z_0) = 0$, C — некоторая вещественная постоянная (заранее не задается).

Задача Б (случай правой полуплоскости со сквозным разрезом). Пусть конечная точка b контура C , как и точка z_0 , лежит на мнимой оси ($-ib > -iz_0$), а контур C разбивает правую полуплоскость z на область G_1 , ограниченную контуром C и отрезком мнимой оси $[z_0, b]$, и на область G_2 , дополняющую G_1 до правой полуплоскости z . Требуется найти в правой полуплоскости $z = x + iy$ кусочно- x -аналитическую функцию

$$\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y) = \begin{cases} \tilde{f}_1(z), & z \in G_1, \\ \tilde{f}_2(z), & z \in G_2 \end{cases} \quad (360)$$

($\tilde{f}_1(z) = \tilde{u}_1(x, y) + i\tilde{v}_1(x, y)$ и $\tilde{f}_2(z) = \tilde{u}_2(x, y) + i\tilde{v}_2(x, y)$ — функции, x -аналитические соответственно в G_1 и G_2), непрерывно продолжимую на C слева и справа и удовлетворяющую на C и на мнимой оси краевым условиям (358), (359) при тех же самых предположениях о функции $\tilde{g}(z)$ и вещественных постоянных κ и c .

Каких-либо предположений о свойствах функции $\tilde{f}(z)$ при подходе к конечным точкам контура C и при $z \rightarrow \infty$ заранее не формулируем. Эти свойства должны вытекать как следствия из формы искомого решения.

Будем искать решение задачи A в виде (356), где $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ принадлежит классу M^* функций, аналитических в плоскости z с разрезом вдоль контура S (составленного из контура C и контура C^* , симметричного C относительно мнимой оси), удовлетворяющих условию $v(0, y) = 0$ ($-\infty < y < \infty$) и при $z \rightarrow \infty$ представимых в виде

$$f(z) = \frac{i\gamma}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \frac{A_3}{z^3} + \dots, \quad (361)$$

где γ — вещественная постоянная, $A_2, A_3, \dots$ — постоянные. Пользуясь разложением функции

$$(z - \zeta)^{-\frac{1}{2}} (\bar{z} + \bar{\zeta})^{-\frac{1}{2}} = e^{i\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\zeta} \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{\bar{z}}{\bar{\zeta}}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

в окрестности бесконечности по отрицательным степеням ζ , приходим к равенствам

$$\tilde{f}^-(z) = -P(f^-(\zeta)) + i\pi\gamma, \quad z \in C, \quad (362)$$

$$\pi\gamma = c. \quad (363)$$

Подставляя эти равенства в краевое условие (358), получаем

$$P(f^+(\zeta)) + \kappa P(f^-(\zeta)) - \kappa ic = \tilde{g}(z) - \kappa ic, \quad z \in C,$$

или

$$f^+(z) + \kappa f^-(z) = g(z), \quad z \in C, \quad (364)$$

где

$$g(z) = P^{-1}(\tilde{g}(t)). \quad (364')$$

Аналитически продолжая $f(t)$ через мнимую ось, приходим к выводу, что решение задачи A сводится к решению задачи линейного сопряжения аналитических функций в классе M^* при краевом условии на S

$$f^+(z) + \kappa f^-(z) = G(z), \quad z \in S, \quad (365)$$

где $G(z) = g(z)$, если $z \in C$, и $G(z) = \bar{g}(-\bar{z})$, если $z \in C^*$. Подставляя решение $f(z)$ задачи (365) в основное интегральное представление (356), находим решение задачи A линейного сопряжения x -аналитических функций для правой полуплоскости с сквозным разрезом. При этом в силу (361), (363) постоянная c определяется посредством решения задачи (365) с помощью равенства

$$c = i\pi \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z). \quad (366)$$

Точно так же при помощи сведения к разрешимым в явном виде задачам линейного сопряжения аналитических функций решается задача B линейного сопряжения x -аналитических функций для правой полуплоскости со сквозным разрезом. Только в этом случае класс функций M^* состоит из кусочно-аналитических функций $\tilde{f}(z) = \tilde{f}_1(z)$, если $z \in G_1$, и $\tilde{f}(z) = \tilde{f}_2(z)$, если $z \in G_2$, где $\tilde{f}_1(z)$ и $\tilde{f}_2(z)$ — аналитические соответственно в G_1 и G_2 функции, мнимые части которых при $x = 0$ равны нулю, и при подходе к бесконечности для $\tilde{f}(z) = \tilde{f}_2(z)$ справедливо представление (361). Кусочно- x -аналитическая функция $\tilde{f}(z)$ определяется равенствами

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} P(\tilde{f}_1(\xi)), & z \in G_1, \\ -P(\tilde{f}_2(\xi)) + ic, & z \in G_2. \end{cases} \quad (367)$$

Для функции $f(z)$ на контуре S выполняется краевое условие (365) при условии, что знаки «плюс» и «минус» указывают на предельные значения функции изнутри и извне контура S . Постоянная c определяется по формуле (366).

§ 7. О СПЕЦИАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ x^k -АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОТ $z = x + iy$ ВНУТРИ ВЕРТИКАЛЬНЫХ ПОЛОС И ОБЛАСТЕЙ, ОГРАНИЧЕННЫХ ПАРАБОЛАМИ

Можно поставить задачу о построении интегральных представлений и формул их обращения для x^k -аналитических функций от $z = x + iy$ применительно к областям того или иного канонического вида с таким расчетом, чтобы можно было находить решения краевых задач x^k -аналитических функций для указанных областей в явном виде.

Приведем результаты, полученные в нашей работе [110].
Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $\nu = \frac{k-1}{2}$, $x_0, x_1 = \text{const} > 0$. Тогда интеграл

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty [x^{-\nu} I_\nu(rx) (A(r) \cos ry + B(r) \sin ry) + ix^{\nu+1} I_{\nu+1}(rx) (A(r) \sin ry - B(r) \cos ry)] dr, \quad (368)$$

где $A(r), B(r)$ — функции от r ($0 \leq r < \infty$) с ограниченным изменением на каждом конечном промежутке, удовлетворяющие при $r \rightarrow \infty$ условию

$$A(r), B(r) = O(e^{-rx_1} r^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}), \quad \varepsilon = \text{const} > 0, \quad (368')$$

является x^k -аналитической функцией от $z = x + iy$ в полосе D ($0 < x < x_1; -\infty < y < \infty$) с мнимой частью, равной нулю при $x = 0$. Интеграл

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty [x^{-\nu} K_\nu(rx) (C(r) \cos ry + D(r) \sin ry) + ix^{\nu+1} K_{\nu+1}(rx) (-C(r) \sin ry + D(r) \cos ry)] dr, \quad (369)$$

где $C(r), D(r)$ — функции от r ($0 \leq r < \infty$) с ограниченным изменением на всяком конечном промежутке, удовлетворяющие при $r \rightarrow \infty$ условию

$$C(r), D(r) = O(e^{rx_0} r^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}), \quad \varepsilon = \text{const} > 0, \quad (369')$$

является x^k -аналитической функцией от $z = x + iy$ в области H ($x_0 < x < \infty; -\infty < y < \infty$).

Для интегрального представления (368) в области D и интегрального представления (369) в области H справедливы соответствующие формулы обращения

$$\left. \begin{aligned} x^{-\nu} I_\nu(r\alpha) A(r) - ix^{\nu+1} I_{\nu+1}(rx) B(r) &= C[\varphi(x, y)], \\ x^{-\nu} I_\nu(rx) B(r) + ix^{\nu+1} I_{\nu+1}(rx) A(r) &= S[\psi(x, y)] \end{aligned} \right\} \quad (370)$$

и

$$\left. \begin{aligned} x^{-\nu} K_\nu(rx) C(r) + ix^{\nu+1} K_{\nu+1}(rx) D(r) &= C[\varphi(x, y)], \\ x^{-\nu} K_\nu(rx) D(r) - ix^{\nu+1} K_{\nu+1}(rx) C(r) &= S[\psi(x, y)], \end{aligned} \right\} \quad (371)$$

где

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2} (f(z) + f(\bar{z})), \quad \psi(x, y) = \frac{1}{2} (f(z) - f(\bar{z})), \quad (372)$$

$C[\varphi(x, y)]$ и $S[\psi(x, y)]$ — косинус- и синус-трансформации Фурье соответственно функций $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ по переменной y ,

$$\left. \begin{aligned} C[\varphi(x, y)] &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \varphi(x, y) \cos ry dy, \\ S[\psi(x, y)] &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \psi(x, y) \sin ry dy. \end{aligned} \right\} \quad (373)$$

В справедливости утверждений первой части теоремы можно легко убедиться при помощи формул дифференцирования бесселевых функций

$$\frac{d}{dx} x^{-\nu} I_{\nu}(x) = x^{-\nu} I_{\nu+1}(x), \quad \frac{d}{dx} x^{\nu} I_{\nu}(x) = x^{\nu} I_{\nu-1}(x), \quad (374)$$

$$\frac{d}{dx} x^{-\nu} K_{\nu}(x) = -x^{-\nu} K_{\nu+1}(x), \quad \frac{d}{dx} x^{\nu} K_{\nu}(x) = -x^{\nu} K_{\nu-1}(x), \quad (375)$$

если учесть, что [70, 71]

$$I_{\nu}(x) \simeq e^x \sqrt{\frac{1}{2\pi x}}, \quad K_{\nu}(x) \simeq e^{-x} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}. \quad (376)$$

Справедливость формул обращения (370) и (371) следует из свойств косинус- и синус-трансформаций Фурье в применении к четной по y функции $\frac{1}{2}(f(z) + f(\bar{z}))$ и нечетной по y функции $\frac{1}{2}(f(z) - f(\bar{z}))$.

Замечание 1. Из свойств p -аналитического продолжения p -аналитических функций (гл. 1, § 5) следует, что, для того чтобы функция (368) удовлетворяла при $0 < x < x_1$ условию

$$v|_{y=0} = 0 \quad (377)$$

или условию

$$u|_{y=0} = 0, \quad (378)$$

необходимо и достаточно, чтобы соответственно $B(r) = 0$ или $A(r) = 0$. Для того чтобы функция (369) удовлетворяла условию (377) или (378) при $x_1 < x < \infty$, необходимо и достаточно, чтобы соответственно $D(r) = 0$ или $C(r) = 0$.

Пусть ξ, η — параболические координаты, определяющиеся равенствами

$$z = -\frac{i}{2} \zeta^2, \quad z = x + iy, \quad \zeta = \xi + i\eta. \quad (379)$$

Пусть $y = \frac{1}{2} \left(-\frac{x^2}{\eta^2} + \eta^2 \right)$, $x > 0$ — полупарабола в правой полуплоскости $z = x + iy$, соответствующая прямой линии $\eta = \text{const} > 0$, $0 < \xi < \infty$ в плоскости ζ , T — область, ограниченная полу-

параболой $\eta = \eta_1$, $0 < \xi < \infty$ и частью мнимой оси $x = 0$, $-\infty < y < \frac{\eta_1^2}{2}$, S — область, ограниченная полупараболой $\eta = \eta_0$, $0 < \xi^2 < \infty$ и частью оси $x = 0$, $\frac{\eta_0^2}{2} < y < \infty$ (рис. 22).

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Интегралы

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = \int_0^\infty [(\xi\eta)^{-\nu} I_\nu(r\eta) J_\nu(r\xi) - i(\xi\eta)^{\nu+1} I_{\nu+1}(r\eta) J_{\nu+1}(r\xi)] A(r) r dr, \quad (380)$$

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = \int_0^\infty [(\xi\eta)^{-\nu} K_\nu(r\eta) J_\nu(r\xi) + i(\xi\eta)^{\nu+1} K_{\nu+1}(r\eta) J_{\nu+1}(r\xi)] B(r) r dr, \quad (381)$$

где $A(r)$ и $B(r)$ — функции от r ($0 \leq r < \infty$) с ограниченным изменением на всяком конечном промежутке, удовлетворяющие при $r \rightarrow \infty$ соответственно условиям

$$A(r) = O(e^{-r\eta_1} r^{-1-\varepsilon}),$$

$$\varepsilon = \text{const} > 0, \quad (380')$$

$$B(r) = O(e^{-r\eta_0} r^{-1-\varepsilon}),$$

$$\varepsilon = \text{const} > 0, \quad (381')$$

являются x^* -аналитическими функциями от $z = x + iy$ в областях соответственно T и S с мнимыми частями, равными нулю при $x = 0$. Для равенства (380) в области T и равенства (381) в области S справедливы формулы обращения соответственно

$$\eta^{-\nu} I_\nu(r\eta) A(r) - i\eta^{\nu+1} I_{\nu+1}(r\eta) A(r) = X_\nu[u(x, y) \xi^\nu] + iX_{\nu+1}[v(x, y) \xi^{-(\nu+1)}] \quad (382)$$

и

$$\eta^{-\nu} K_\nu(r\eta) B(r) + i\eta^{\nu+1} K_{\nu+1}(r\eta) B(r) = X_\nu[u(x, y) \xi^\nu] + iX_{\nu+1}[v(x, y) \xi^{-(\nu+1)}], \quad (383)$$

где $X_\nu[u(x, y) \xi^\nu]$ и $X_{\nu+1}[v(x, y) \xi^{-(\nu+1)}]$ — трансформации Ханкеля функций $u(x, y) \xi^\nu$ и $v(x, y) \xi^{-(\nu+1)}$ по переменной ξ соответственно с индексами ν и $\nu + 1$,

$$\left. \begin{aligned} X_\nu[u(x, y) \xi^\nu] &= \int_0^\infty u(x, y) \xi^\nu J_\nu(r\xi) \xi d\xi, \\ X_{\nu+1}[v(x, y) \xi^{-(\nu+1)}] &= \int_0^\infty v(x, y) \xi^{-(\nu+1)} J_{\nu+1}(r\xi) \xi d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (384)$$

В самом деле, применяя формулы (374), (375) и

$$\frac{d}{dx} x^{-\nu} J_{\nu}(x) = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x), \quad \frac{d}{dx} x^{\nu} J_{\nu}(x) = x^{\nu} J_{\nu-1}(x), \quad (385)$$

убеждаемся, что подынтегральные функции в (382) и (383) удовлетворяют условиям x^k -аналитичности в параболических координатах $u_{\xi} = (\xi\eta)^{-k} v_{\eta}$, $u_{\eta} = -(\xi\eta)^{-k} v_{\xi}$. Учитывая (380'), (381'), асимптотические равенства (376), а также приближенные равенства [70]

$$J_{\nu}(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\simeq} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \sqrt{\frac{2}{\pi k}}, \quad J_{\nu}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\simeq} \frac{x^{\nu}}{2^{\nu}\Gamma(1+\nu)}, \quad (386)$$

$$I_{\nu}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\simeq} \frac{x^{\nu}}{2^{\nu}\Gamma(1+\nu)}, \quad K_{\nu}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\simeq} \begin{cases} 2^{\nu-1}\Gamma(\nu) x^{-\nu}, & \nu > 0, \\ \ln \frac{2}{x}, & \nu = 0, \end{cases} \quad (386')$$

убеждаемся в справедливости первой части теоремы. Вторая часть теоремы следует из справедливости формулы обращения [70] при $\nu \geq -\frac{1}{2}$

$$\varphi(\xi) = \int_0^{\infty} \tilde{\varphi}(r) J_{\nu}(r\xi) r dr \quad (387)$$

для трансформации Ханкеля

$$\tilde{\varphi}(r) = \int_0^{\infty} \varphi(\xi) J_{\nu}(r\xi) \xi d\xi \quad (387')$$

функции $\varphi(\xi)$ такой, что интеграл от $\varphi(\xi) \sqrt{\xi}$ в пределах от нуля до бесконечности абсолютно сходится.

Замечание 2. Вид полученных интегральных представлений и формул их обращения несколько упрощается, если наряду с x^k -аналитической функцией $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ввести обозначение

$$f^0(z) = u^0(x, y) + iv^0(x, y) = x^{\frac{k-1}{2}} u(x, y) + i \frac{1}{\frac{k+1}{2}} v(x, y). \quad (388)$$

При этом функция $f^0(z)$ в силу условия x^k -аналитичности

$$x^k \frac{\hat{d}u}{dz} + i \frac{\hat{d}v}{dz} = 0 \quad (389)$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\hat{d}f^0}{dz} = \frac{1}{4x} [kf^0 - f^0]. \quad (390)$$

Для того чтобы получить решение краевых задач x^k -аналитических функций $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ для областей D , H , T и S при $v|_{x=0} = 0$ и заданных на остальной части их границ значениях u или v , достаточно принять искомое решение

1) для области D в виде (368), определяя $A(r)$ и $B(r)$ соответственно через вещественную или мнимую части функции $f(z)$ из формул (370) при $x = x_1$;

2) для области H в виде (369), определяя $C(r)$ и $D(r)$ из формул (371);

3) для области T в виде (380), определяя $A(r)$ из равенства (382);

4) для области S в виде (381), определяя $B(r)$ из равенства (383).

Чтобы получить решение задачи x^k -аналитических функций $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ для полосы D^* ($x_0 < x < x_1$, $-\infty < y < \infty$), если заданы при $x = x_0$, x_1 ($-\infty < y < \infty$) значения u или v , или для параболической полуполосы T^* ($0 < \xi < \infty$, $\eta_0 < \eta < \eta_1$) при $v|_{x=0} = 0$ ($\frac{1}{2}\eta_0^2 < y < \frac{1}{2}\eta_1^2$) и заданных на остальной части границы T^* значениях u или v , достаточно принять искомое решение

1) для полосы D^* в виде суммы правых частей равенств (368), (369), определяя коэффициенты $A(r)$, $B(r)$, $C(r)$, $D(r)$ из системы четырех линейных алгебраических уравнений, получающихся из равенств

$$\left. \begin{aligned} (L(x, A, B) + L^*(x, C, D))_{x=x_0, x_1} &= C[\varphi(x, y)]|_{x=x_0, x_1}, \\ (M(x, A, B) + M^*(x, C, D))_{x=x_0, x_1} &= S[\psi(x, y)]|_{x=x_0, x_1}, \end{aligned} \right\} \quad (391)$$

где $L(x, A, B)$, $M(x, A, B)$ — левые части равенств (370), $L^*(x, C, D)$, $M^*(x, C, D)$ — левые части равенств (371);

2) для полуполосы T^* в виде суммы правых частей равенств (380), (382), определяя коэффициенты $A(r)$ и $B(r)$ из системы двух линейных алгебраических уравнений, получающихся из равенств

$$\begin{aligned} (N(\eta, A) + N^*(\eta, B))_{\eta=\eta_0, \eta_1} &= (X_v[u(x, y)\xi^v] + \\ &+ iX_{v+1}[v(x, y)\xi^{-(v+1)}])_{\eta=\eta_0, \eta_1}, \end{aligned} \quad (392)$$

где $N(\eta, A)$ и $N^*(\eta, B)$ — левые части равенств (382), (383).

Если вместо u или v для областей D , H и D^* на границе задаются значения Gu или Gv , где $G = \alpha + \beta \frac{\partial}{\partial x}$ (α и β — постоянные), а для областей T , S и T^* — значения gu или gv , где $g = \alpha + \beta \frac{\partial}{\partial \eta}$ (α и β — постоянные), то методика решения краевых задач остается без изменений, только

1) для областей D , H и D^* равенства (370) и (371) заменяются соответственно равенствами

$$GL(x, A, B) = C[G\varphi(x, y)], \quad GM(x, A, B) = S[G\psi(x, y)], \quad (370')$$

$$GL^*(x, C, D) = C[G\varphi(x, y)], \quad GM^*(x, C, D) = S[G\psi(x, y)], \quad (371')$$

а равенства (391) — равенствами

$$\left. \begin{aligned} G(L(x, A, B) + L^*(x, C, D))_{x=x_0, x_1} &= C[G\varphi(x, y)]|_{x=x_0, x_1}, \\ G(M(x, A, B) + M^*(x, C, D))_{x=x_0, x_1} &= S[G\psi(x, y)]|_{x=x_0, x_1}; \end{aligned} \right\} \quad (391')$$

2) для областей T , S и T^* равенства (382) и (383) заменяются соответственно равенствами

$$gN(\eta, A) = g\Phi(r, \eta), \quad (382')$$

$$gN^*(\eta, B) = g\Phi(r, \eta), \quad (383')$$

где $\Phi(r, \eta)$ — правые части равенств (382) и (383), а равенства (392) — равенствами.

$$g(N(\eta, A) + N^*(\eta, B))_{\eta=\eta_0, \eta_1} = g\Psi(r, \eta)|_{\eta=\eta_0, \eta_1}, \quad (392')$$

где $\Psi(r, \eta)$ — правая часть равенства (392) при нефиксированном значении η .

Если для областей D , H и D^* вместо u и v на границе задаются значения $(\alpha u + \beta v)_{x=x_1} = \varphi(y)$, $(\alpha_0 u + \beta_0 v)_{x=x_0} = \varphi_0(y)$ ($-\infty < y < \infty$), где $\alpha, \beta, \alpha_0, \beta_0$ — постоянные, то решение задачи

1) для области D имеет вид равенства (368) при условии, что $A(r)$ и $B(r)$ определяются из системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} \alpha x_1^{-\nu} I_\nu(r x_1) A(r) - \beta x_1^{\nu+1} I_{\nu+1}(r x_1) B(r) &= C \left[\frac{\varphi(y) + \varphi(-y)}{2} \right], \\ \alpha x_1^{-\nu} I_\nu(r x_1) B(r) + \beta x_1^{\nu+1} I_{\nu+1}(r x_1) A(r) &= S \left[\frac{\varphi(y) - \varphi(-y)}{2} \right]; \end{aligned} \right\} \quad (393)$$

2) для области H имеет вид равенства (369) при условии, что $C(r)$ и $D(r)$ определяются из системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 x_0^{-\nu} K_\nu(r x_0) C(r) + \beta_0 x_0^{\nu+1} K_{\nu+1}(r x_0) D(r) &= C \left[\frac{\varphi_0(y) + \varphi_0(-y)}{2} \right], \\ \alpha_0 x_0^{-\nu} K_\nu(r x_0) D(r) - \beta_0 x_0^{\nu+1} K_{\nu+1}(r x_0) C(r) &= S \left[\frac{\varphi_0(y) - \varphi_0(-y)}{2} \right]; \end{aligned} \right\} \quad (394)$$

3) для области D^* имеет вид суммы правых частей равенств (368), (369) при условии, что $A(r)$, $B(r)$, $C(r)$, $D(r)$ определяются из системы четырех линейных алгебраических уравнений, два из которых получаются из равенств (393) при добавлении в их левых частях соответственно левых частей равенств (394) с заменой α_0, β_0 параметрами α, β и x_0 — величиной x , а два других — из равенств (394) при добавлении к их левым частям соответственно левых частей равенств (393) с заменой α, β параметрами α_0, β_0 и x_0 величиной x .

Интегральные представления (380) и (381) можно преобразовать соответственно к виду

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x, y) + i v(x, y) = \\ &= \int_0^\infty [(\xi \eta)^{-\nu} I_\nu(r \eta) A(r) - i (\xi \eta)^{-\nu} \eta r^{-(\nu+1)} \times \\ &\times \frac{d}{dr} (I_{\nu+1}(r \eta) A(r) \tilde{r}^{\nu+1})] J_\nu(r \xi) r dr \end{aligned} \quad (395)$$

$$\begin{aligned}
 f(z) &= u(x, y) + iv(x, y) = \\
 &= \int_0^{\infty} [(\xi\eta)^{-\nu} K_{\nu}(r\eta) B(r) + i(\xi\eta)^{\nu} \eta r^{-(\nu+1)} \times \\
 &\times \frac{d}{dr} (K_{\nu+1}(r\eta) B(r) r^{\nu+1})] J_{\nu}(r\xi) r dr. \quad (396)
 \end{aligned}$$

Рассмотрим задачи для областей T , S и T^* при условии, что вместо u или v задаются значения $(\alpha u + \beta v)_{\eta=\eta_1} = \varphi(\xi)$, $(\alpha_0 u + \beta_0 v)_{\eta=\eta_0} = \varphi_0(\xi)$, где α , β , α_0 , β_0 — постоянные. Ограничимся случаем x -аналитических функций ($k=1$, $\nu=0$). Решение задачи

1) для области T имеет вид равенства (395) при условии, что $A(r)$ с учетом (380') определяется из обыкновенного линейного дифференциального уравнения первого порядка

$$\alpha I_0(r\eta_1) A(r) - \beta \eta_1 r^{-1} \frac{d}{dr} (I_1(r\eta_1) A(r) r) = X_0[\varphi(\xi)]; \quad (397)$$

2) для области S имеет вид равенства (396) при условии, что $B(r)$ с учетом (381') определяется из дифференциального уравнения первого порядка

$$\alpha_0 K_0(r\eta_0) B(r) + \beta_0 \eta_0 r^{-1} \frac{d}{dr} (K_1(r\eta_0) B(r) r) = X_0[\varphi_0(\xi)]; \quad (398)$$

3) для области T^* имеет вид суммы правых частей равенств (395), (396) при условии, что $A(r)$ и $B(r)$ с учетом (380'), (381') определяются из системы двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка, первое из которых получается из равенства (397), если добавить в его левой части слагаемое, получающееся из левой части равенства (398) при замене α_0 , β_0 , η_0 величинами α , β , η_1 , а второе — из (398), если добавить в его левой части слагаемое, получающееся из левой части равенства (397) при замене α , β , η_1 величинами α_0 , β_0 , η_0 .

§ 8. ОСНОВНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

p -АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОТ $z = x + iy$ С ЛОГАРИФИЧЕСКИ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ p

Наряду с x^k -аналитическими функциями от $z = x + iy$, весьма важен и часто встречается в теоретических и прикладных вопросах математики класс p -аналитических функций $\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y)$ с логарифмически гармонической характеристикой p , т. е. таких, что $p = e^{\alpha(x, y)}$, где $\alpha(x, y)$ — гармоническая функция от x и y . Этот класс p -аналитических функций характерен тем, что вещественная и мнимая части соответствующих функций третьего класса $\hat{f}(z) = \hat{u}(x, y) + i\hat{v}(x, y) = \sqrt{p} \tilde{u}(x, y) + i \frac{\tilde{v}(x, y)}{\sqrt{p}}$ в силу

(57), (57'), (57'') (гл. 1, § 2) удовлетворяют уравнениям

$$\Delta \hat{u} - \left| \frac{\hat{d} \ln p}{dz} \right|^2 \hat{u} = 0, \quad \Delta \hat{v} - \left| \frac{\hat{d} \ln p}{dz} \right|^2 \hat{v} = 0, \quad (399)$$

и в частности при $p = e^{\alpha x + \beta y}$ ($\alpha, \beta = \text{const}$)

$$\Delta \hat{u} - k^2 \hat{u} = 0, \quad \Delta \hat{v} - k^2 \hat{v} = 0, \quad k^2 = \frac{1}{4} (\alpha^2 + \beta^2), \quad (400)$$

т. е. $\hat{u}$ и $\hat{v}$ являются решениями уравнения Гельмгольца.

Для p -аналитических функций с логарифмически гармонической характеристикой p , как показано в работах [111, 112], можно построить интегральное представление через аналитические функции и найти формулу его обращения, которая может оказаться полезной при решении краевых задач указанного класса p -аналитических функций, а также некоторых интегральных уравнений.

Пусть G — область в плоскости $z = x + iy$, z_0 — достижимая точка ее границы, $z_1 = \omega(z)$ — заданная аналитическая функция от z в области G . Будем говорить, что определенная и непрерывная в области G функция $F(z)$ удовлетворяет в области G условию « α », если при $z \rightarrow z_0$ выполняются равенства

$$F(z) \frac{dz_1}{dz} I_0(\sqrt{-z_1}), \quad F(z) \frac{dz_1}{dz} I_1(\sqrt{-z_1}) = \begin{cases} O(|z - z_0|^{-1+\varepsilon}), & z_0 \neq \infty, \\ O(|z|^{-1-\varepsilon}), & z_0 = \infty, \end{cases} \quad (401)$$

и условию « β », если при $z \rightarrow z_0$

$$F(z) \frac{dz_1}{dz} I_0(|z_1|), \quad F(z) \frac{dz_1}{dz} I_1(|z_1|) = \begin{cases} O(|z - z_0|^{-1+\varepsilon}), & z_0 \neq \infty, \\ O(|z|^{-1-\varepsilon}), & z_0 = \infty, \end{cases} \quad (402)$$

где $\varepsilon = \text{const} > 0$, $I_0(z)$ и $I_1(z)$ — бесселевы функции мнимого аргумента первого рода соответственно нулевого и первого порядков¹¹:

$$I_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!n!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}, \quad I_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+1}.$$

Будем говорить, что условие « α » или условие « β » выполняется на контуре Γ , выходящем из точки z_0 , если функция $F(z)$ определена и непрерывна только в точках контура Γ и равенства соответственно (401) или (402) справедливы при z , стремящемся к z_0 вдоль контура Γ . Установим следующую теорему.

Теорема 1 (об основном интегральном представлении p -аналитических функций с логарифмически гармонической характеристикой p). Пусть p — характеристика, определенная равенством

$$p = e^{\alpha(x,y)} = |e^{\omega(z)}|^2, \quad (403)$$

¹¹ Поведение $I_0(z)$ и $I_1(z)$ при $z \rightarrow \infty$ зависит от $\arg z$ и определяется асимптотическими формулами (см., например, [70, 71]).

где $\alpha(x, y)$ и $\omega(z) \equiv \frac{1}{2} [\alpha(x, y) + i\beta(x, y)] = \ln \sqrt{p} + i\tau$ — соответственно гармоническая и аналитическая функции, заданные в области G ,

$$z_1 = \omega(z), \quad \zeta_1 = \omega(\zeta). \quad (404)$$

Пусть $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ — аналитическая функция от z , удовлетворяющая условию «а» в области G . Тогда функция $\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i \tilde{v}(x, y)$, определенная равенством

$$\begin{aligned} \hat{f}(z) &= \hat{u}(x, y) + i \hat{v}(x, y) = \sqrt{p} \tilde{u}(x, y) + \frac{i}{\sqrt{p}} \tilde{v}(x, y) = \\ &= \int_{z_0}^z P(\zeta, z, \bar{z}) f(\zeta) \frac{d\zeta_1}{d\zeta} d\zeta + Q(\zeta, z, \bar{z}) \bar{f}(\zeta) \frac{d\bar{\zeta}_1}{d\bar{\zeta}} d\bar{\zeta} = \\ &= \int_{z_0}^z I_0(\sqrt{(z_1 - \zeta_1)(\bar{z}_1 + \bar{a})}) f(\zeta) d\zeta + \sqrt{\frac{\bar{z}_1 - \bar{\zeta}_1}{z_1 + a}} \times \\ &\quad \times I_1(\sqrt{(\bar{z}_1 - \bar{\zeta}_1)(z_1 + a)}) \bar{f}(\zeta) d\bar{\zeta}_1, \end{aligned} \quad (405)$$

где a — произвольный числовой параметр, является p -аналитической в области G с данной характеристикой $p = e^{\alpha(x, y)}$, функция $\hat{f}(z) = \hat{u}(x, y) + i \hat{v}(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\hat{d}\hat{f}(z)}{dz} = \frac{\hat{d} \ln \sqrt{p}}{dz} \bar{f}(z). \quad (406)$$

В самом деле, интеграл

$$J(z) = \int_{z_0}^z P(\zeta, z, \bar{z}) f(\zeta) d\zeta_1 + \bar{Q}(\zeta, z, \bar{z}) \bar{f}(\zeta) d\bar{\zeta}_1, \quad (407)$$

где $P(\zeta, z, \bar{z})$ и $Q(\zeta, z, \bar{z})$ — аналитические в G функции от ζ , зависящие от $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$ как от параметров, представляет собой в области G вполне определенную функцию от z . Вводя обозначение $\gamma = \frac{\hat{d} \ln \sqrt{p}}{dz}$ и пользуясь общими свойствами операторной производной (гл. 1, § 1), находим

$$\begin{aligned} \frac{\hat{d}J(z)}{dz} - \bar{\gamma} J(z) &= \int_{z_0}^z \left[\frac{\hat{d}P(\zeta, z, \bar{z})}{dz} - \bar{\gamma} Q(\zeta, z, \bar{z}) \right] f(\zeta) d\zeta_1 + \\ &+ \left[\frac{\hat{d}\bar{Q}(\zeta, z, \bar{z})}{dz} - \bar{\gamma} P(\zeta, z, \bar{z}) \right] \bar{f}(\zeta) d\bar{\zeta}_1 + \bar{Q}(\zeta, z, \bar{z}) \Big|_{\zeta=z} \frac{dz_1}{dz} \bar{f}(z). \end{aligned}$$

Для того чтобы интеграл $J(z)$ удовлетворял уравнению (406), достаточно, чтобы $P(\zeta, z, \bar{z})$ и $Q(\zeta, z, \bar{z})$ были решением системы уравнений

$$\frac{\hat{d}P(\zeta, z, \bar{z})}{dz} = \bar{\gamma}Q(\zeta, z, \bar{z}), \quad \frac{\hat{d}Q(\zeta, z, \bar{z})}{dz} = \gamma P(\zeta, z, \bar{z}) \quad (408)$$

при дополнительном условии

$$Q(\zeta, z, \bar{z})|_{z=\bar{z}} = 0. \quad (409)$$

Переходя в (408) от переменной z к переменной $z_1 = \omega(z)$, получаем

$$\frac{\hat{d}P(\zeta, z, \bar{z})}{dz_1} = \frac{1}{2}Q(\zeta, z, \bar{z}), \quad \frac{\hat{d}Q(\zeta, z, \bar{z})}{dz_1} = \frac{1}{2}P(\zeta, z, \bar{z}), \quad (408')$$

откуда следует, что $P(\zeta, z, \bar{z})$ и $Q(\zeta, z, \bar{z})$ являются решениями уравнения

$$\frac{\hat{d}^2 U}{dz_1 d\bar{z}_1} - \frac{1}{4}U = 0. \quad (410)$$

Учитывая это и предполагая, что при $\zeta = z$ $Q(\zeta, z, \bar{z})$ удовлетворяет условию (409), а функция $P(\zeta, z, \bar{z})$ ограничена, находим

$$\left. \begin{aligned} P(\zeta, z, \bar{z}) &= I_0(\lambda), \quad Q(\zeta, z, \bar{z}) = \sqrt{\frac{z_1 - \zeta_1}{z_1 + a}} I_1(\lambda), \\ \lambda &= \sqrt{(z_1 - \zeta_1)(\bar{z}_1 + a)}. \end{aligned} \right\} \quad (411)$$

При помощи равенств (см., например, [70, 71])

$$\frac{dI_0(\lambda)}{d\lambda} = I_1(\lambda), \quad \frac{d(\lambda I_1(\lambda))}{d\lambda} = \lambda I_0(\lambda)$$

устанавливаем, что функции $P(\zeta, z, \bar{z})$ и $Q(\zeta, z, \bar{z})$, определенные равенствами (411), удовлетворяют системе уравнений (408') или (408) и дополнительному условию (409). Следовательно, интеграл правой части равенства (405) представляет собой функцию, удовлетворяющую уравнению (406). Но уравнение (406) является следствием p -аналитичности функции $\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y)$. Справедливо и обратное: если $\tilde{f}(z)$ удовлетворяет уравнению (406), то $\tilde{f}(z)$ является p -аналитической функцией (при любой характеристике p , имеющей непрерывные частные производные по x и y). Теорема доказана.

Покажем справедливость следующей теоремы.

Теорема 2 (об обращении основного интегрального представления p -аналитических функций с логарифмически гармонической характеристикой p). Пусть $\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y)$ — p -аналитическая функция с характеристикой $p = e^{\alpha(x, y)} = |e^{\omega(z)}|^2$, определенная в области G равенством (405), и $\hat{f}(z) = \hat{u}(x, y) + i\hat{v}(x, y)$

в области G удовлетворяет условию «β». Тогда справедливо равенство

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x, y) + iv(x, y) = \\ &= \frac{d^2}{dz_1^2} \int_{z_0}^z P(z, t, \bar{t}) \hat{f}(t) dt_1 + Q(z, t, \bar{t}) \bar{\hat{f}}(t) d\bar{t}_1 = \\ &= \frac{d^2}{dz_1^2} \int_{z_0}^z I_0(\sqrt{(t_1 - z_1)(t_1 + a)}) \hat{f}(t) dt_1 + \sqrt{\frac{t_1 - z_1}{t_1 + a}} \times \\ &\quad \times I_1(\sqrt{(t_1 - z_1)(t_1 + a)}) \bar{\hat{f}}(t) d\bar{t}_1, \end{aligned} \quad (412)$$

где $t_1 = \omega(t)$.

В самом деле, на основании равенств (406), (408), в которых вместо ζ и z подставляется z и t ,

$$\frac{\hat{d}}{dt_1} [Q(z, t, \bar{t}) \bar{\hat{f}}(t)] - \frac{\hat{d}}{d\bar{t}_1} [P(z, t, \bar{t}) \hat{f}(t)] = 0,$$

и, следовательно, интеграл

$$J^*(z) = \int_{z_0}^z P(z, t, \bar{t}) \hat{f}(t) dt_1 + Q(z, t, \bar{t}) \bar{\hat{f}}(t) d\bar{t}_1 \quad (413)$$

представляет собой вполне определенную функцию от z в области G . В силу равенства

$$\begin{aligned} \frac{\hat{d}J^*(z)}{dz} &= \int_{z_0}^z \frac{\hat{d}P(z, t, \bar{t})}{dz} \hat{f}(t) dt_1 + \frac{\hat{d}Q(z, t, \bar{t})}{dz} \bar{\hat{f}}(t) d\bar{t}_1 + \\ &\quad + Q(z, t, \bar{t})|_{t=z} \frac{d\bar{z}_1}{dz} \bar{\hat{f}}(z) = 0 \end{aligned}$$

этот интеграл является аналитической функцией от z в области G . Подставляя (405) в (413), получаем

$$\begin{aligned} J^*(z) &= \int_{z_0}^z P(z, t, \bar{t}) \left[\int_{z_0}^t P(\zeta, t, \bar{t}) \hat{f}(\zeta) d\zeta_1 + \bar{Q}(\zeta, t, \bar{t}) \bar{\hat{f}}(\zeta) d\bar{\zeta}_1 \right] dt_1 + \\ &\quad + Q(z, t, \bar{t}) \left[\int_{z_0}^t \bar{P}(\zeta, t, \bar{t}) \bar{\hat{f}}(\zeta) d\bar{\zeta}_1 + Q(\zeta, t, \bar{t}) \hat{f}(\zeta) d\zeta_1 \right] d\bar{t}_1. \end{aligned}$$

Переставляя порядок интегрирования, в соответствии с формулой Дирихле перестановки порядка интегрирования в комплексной форме (§ 6), находим

$$J^*(z) = \int_{z_0}^z R(z, \zeta) \hat{f}(\zeta) d\zeta_1 + S(z, \zeta) \bar{\hat{f}}(\zeta) d\bar{\zeta}_1, \quad (414)$$

где

$$R(z, \zeta) = \int_{\zeta}^z P(z, t, \bar{t}) P(\zeta, t, \bar{t}) dt_1 + Q(z, t, \bar{t}) Q(\zeta, t, \bar{t}) d\bar{t}_1, \quad (415)$$

$$S(z, \zeta) = \int_{\zeta}^z P(z, t, \bar{t}) \bar{Q}(\zeta, t, \bar{t}) dt_1 + Q(z, t, \bar{t}) \bar{P}(\zeta, t, \bar{t}) d\bar{t}_1. \quad (416)$$

В силу (408')

$$\begin{aligned} & \frac{\hat{d}}{dt_1} [Q(z, t, \bar{t}) Q(\zeta, t, \bar{t})] - \frac{\hat{d}}{d\bar{t}_1} [P(z, t, \bar{t}) P(\zeta, t, \bar{t})] = \\ & = \frac{1}{2} [P(z, t, \bar{t}) Q(\zeta, t, \bar{t}) + Q(z, t, \bar{t}) P(\zeta, t, \bar{t}) - \\ & - Q(z, t, \bar{t}) P(\zeta, t, \bar{t}) - P(z, t, \bar{t}) Q(\zeta, t, \bar{t})] = 0, \\ & \frac{\hat{d}}{dt_1} [Q(z, t, \bar{t}) \bar{P}(\zeta, t, \bar{t})] - \frac{\hat{d}}{d\bar{t}_1} [P(z, t, \bar{t}) \bar{Q}(\zeta, t, \bar{t})] = \\ & = \frac{1}{2} [Q(z, t, \bar{t}) \bar{Q}(\zeta, t, \bar{t}) + P(z, t, \bar{t}) \bar{P}(\zeta, t, \bar{t}) - \\ & - P(z, t, \bar{t}) \bar{P}(\zeta, t, \bar{t}) - Q(z, t, \bar{t}) \bar{Q}(\zeta, t, \bar{t})] = 0, \end{aligned}$$

и, следовательно, интегралы $R(z, \zeta)$ и $S(z, \zeta)$ являются вполне определенными функциями от z и ζ . Вычисляя $\frac{\hat{d}}{dz} R(z, \zeta)$, $\frac{\hat{d}}{dz} S(z, \zeta)$, $\frac{\hat{d}}{d\bar{z}} R(z, \zeta)$, $\frac{\hat{d}}{d\bar{z}} S(z, \zeta)$ так же, как мы вычисляли $\frac{\hat{d}}{dz} J^*(z)$, и учитывая равенства

$$Q(z, t, \bar{t})|_{t=z} = Q(\zeta, t, \bar{t})|_{t=\zeta} = 0,$$

приходим к выводу, что $R(z, \zeta)$ является аналитической функцией по z и аналитической функцией по ζ , $S(z, \zeta)$ — аналитической функцией по z и антианалитической функцией по ζ . Последнее, в частности, означает, что функция $S(z, \zeta)$ представима в виде

$$S(z, \zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z^*)^k, \quad (417)$$

где z^* — фиксированная точка, c_k — вполне определенные коэффициенты, являющиеся антианалитическими функциями от ζ . Подставляя (417) в (414), получаем

$$J^*(z) - \int_{z_0}^z R(z, \zeta) f(\zeta) d\zeta_1 = \sum_{k=0}^{\infty} (z - z^*)^k \int_{z_0}^z c_k \bar{f}(\zeta) d\bar{\zeta}_1. \quad (418)$$

Отсюда следует, что $c_k = 0$ ($k = 0, 1, \dots$), так как левая часть равенства (418) содержит аналитическую функцию от z . Таким

образом, равенство (414) принимает вид

$$J^*(z) = \int_{z_0}^z R(z, \zeta) f(\zeta) d\zeta. \quad (414')$$

Подсчитаем теперь функцию $R(z, \zeta)$. Имеем

$$\begin{aligned} P(z, t, \bar{t}) P(\zeta, t, \bar{t}) &= I_0(\sqrt{(t_1 - z_1)(\bar{t}_1 + a)}) I_0(\sqrt{(t_1 - \zeta_1)(\bar{t}_1 + a)}) = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!n!} \left[\left(\frac{(t_1 - z_1)(\bar{t}_1 + a)}{4} \right)^n + \left(\frac{(t_1 - \zeta_1)(\bar{t}_1 + a)}{4} \right)^n \right] + \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{\substack{k+m=n \\ k, m \geq 1}} \frac{1}{k!k!} \cdot \frac{1}{m!m!} \left(\frac{\bar{t}_1 + a}{4} \right)^n (t_1 - z_1)^k (t_1 - \zeta_1)^m, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q(z, t, \bar{t}) Q(\zeta, t, \bar{t}) &= \sqrt{\frac{t_1 - z_1}{\bar{t}_1 + a}} I_1(\sqrt{(t_1 - z_1)(\bar{t}_1 + a)}) \sqrt{\frac{t_1 - \zeta_1}{\bar{t}_1 + a}} \times \\ &\times I_1(\sqrt{(t_1 - \zeta_1)(\bar{t}_1 + a)}) = \frac{(t_1 - z_1)(t_1 - \zeta_1)}{4} \times \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{k+m=n \\ k, m \geq 0}} \frac{1}{k!(k+1)!} \cdot \frac{1}{m!(m+1)!} \left(\frac{\bar{t}_1 + a}{4} \right)^n (t_1 - z_1)^k (t_1 - \zeta_1)^m, \end{aligned}$$

и, следовательно, функцию $R(z, \zeta)$ можно записать в виде

$$R(z, \zeta) = \int_{\zeta}^z dt_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\zeta}^z A_n dt_1 + B_n d\bar{t}_1, \quad (419)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{\bar{t}_1 + a}{4} [(t_1 - z_1) + (t_1 - \zeta_1)], \quad B_1 = \frac{(t_1 - z_1)(t_1 - \zeta_1)}{4}, \\ A_2 &= \frac{1}{2!2!} \left(\frac{\bar{t}_1 + a}{4} \right)^2 [(t_1 - z_1)^2 + (t_1 - \zeta_1)^2] + \\ &+ \left(\frac{\bar{t}_1 + a}{4} \right)^2 (t_1 - z_1)(t_1 - \zeta_1), \\ B_2 &= \frac{(t_1 - z_1)(t_1 - \zeta_1)}{4} \cdot \frac{\bar{t}_1 + a}{4} \cdot \frac{1}{2!} [(t_1 - z_1) + (t_1 - \zeta_1)], \\ &\dots \dots \dots \\ A_n &= \frac{1}{n!n!} \left(\frac{\bar{t}_1 + a}{4} \right)^n [(t_1 - z_1)^n + (t_1 - \zeta_1)^n] + \\ &+ \sum_{\substack{k+m=n \\ k, m \geq 1}} \frac{1}{k!k!} \cdot \frac{1}{m!m!} \left(\frac{\bar{t}_1 + a}{4} \right)^n (t_1 - z_1)^k (t_1 - \zeta_1)^m, \end{aligned} \right\} \quad (420)$$

$$B_n = \frac{(t_1 - z_1)(t_1 - \zeta_1)}{4} \sum_{\substack{k+m=n-1 \\ k, m \geq 0}} \frac{1}{k!(k+1)!} \cdot \frac{1}{m!(m+1)!} \times \\ \times \left(\frac{\bar{t}_1 + a}{4} \right)^{n-1} (t_1 - z_1)^k (t_1 - \zeta_1)^m.$$

Из равенств (420) следует, что подынтегральные выражения членов ряда (419) являются полными дифференциалами вполне определенных функций от $t_1 = \omega(t)$, обращающихся в нуль при $t = z$ и $t = \zeta$,

$$\begin{aligned} A_1 dt_1 + B_1 d\bar{t}_1 &= d\Phi_1(t, z, \zeta) = \\ &= \frac{1}{4} d\{(\bar{t}_1 + a)(t_1 - z_1)(t_1 - \zeta_1)\}, \\ A_2 dt_1 + B_2 d\bar{t}_1 &= d\Phi_2(t, z, \zeta) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \frac{1}{2} d\{(\bar{t}_1 + a)^2 \times \\ &\times \left[\frac{1}{2}(t_1 - z_1)^2(t_1 - \zeta_1) + \frac{1}{2}(t_1 - z_1)(t_1 - \zeta_1)^2\right]\}, \\ &\dots \dots \dots \\ A_n dt_1 + B_n d\bar{t}_1 &= d\Phi_n(t, z, \zeta) = \left(\frac{1}{4}\right)^n \frac{1}{n} d\{(\bar{t}_1 + a)^n \times \\ &\times \left[\frac{1}{(n-1)!n!} \cdot \frac{1}{0!1!} (t_1 - z_1)^n (t_1 - \zeta_1) + \right. \\ &+ \frac{1}{(n-2)!(n-1)!} \cdot \frac{1}{1!2!} (t_1 - z_1)^{n-1} (t_1 - \zeta_1)^2 + \\ &+ \frac{1}{(n-3)!(n-2)!} \cdot \frac{1}{2!3!} (t_1 - z_1)^{n-2} (t_1 - \zeta_1)^3 + \\ &+ \dots + \frac{1}{1!2!} \cdot \frac{1}{(n-2)!(n-1)!} (t_1 - z_1)^2 (t_1 - \zeta_1)^{n-1} + \\ &+ \left. \frac{1}{0!1!} \cdot \frac{1}{(n-1)!n!} (t_1 - z_1)(t_1 - \zeta_1)^n\right]\}. \end{aligned} \quad (421)$$

Подставляя (421) в (419), получаем

$$R(z, \zeta) = \int_{\zeta}^z dt_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(t, z, \zeta) \Big|_{t=\zeta}^{t=z} = z_1 - \zeta_1,$$

и, следовательно,

$$J^*(z) = \int_{z_0}^z (z_1 - \zeta_1) f(\zeta) d\zeta_1, \quad f(z) = \frac{d^2}{dz_1^2} J^*(z).$$

Теорема доказана.

Отметим, что если $p = e^{2x}$, то $z_1 = \omega(z) = \ln \sqrt{p} + i\tau = z$ и основное интегральное представление (405) и формула его

обращения (412) соответственно принимают вид

$$\begin{aligned}\hat{f}(z) &= \hat{u}(x, y) + i\hat{v}(x, y) = e^x \tilde{u}(x, y) + ie^{-x} \tilde{v}(x, y) = \\ &= \int_{z_0}^z I_0(\sqrt{(z-\xi)(\bar{z}+a)}) f(\xi) d\xi + \sqrt{\frac{\bar{z}-\xi}{z+a}} \times \\ &\quad \times I_1(\sqrt{(\bar{z}-\xi)(z+a)}) \bar{f}(\xi) d\bar{\xi},\end{aligned}\quad (405')$$

$$\begin{aligned}f(z) &= u(x, y) + iv(x, y) = \\ &= \frac{d^2}{dz^2} \int_{z_0}^z I_0(\sqrt{(t-z)(\bar{t}+a)}) \hat{f}(t) dt + \sqrt{\frac{\bar{t}-z}{t+a}} \times \\ &\quad \times I_1(\sqrt{(t-z)(\bar{t}+a)}) \bar{\hat{f}}(t) d\bar{t}.\end{aligned}\quad (412')$$

Покажем теперь, что справедлива следующая теорема.

Теорема 3 (о решении интегрального уравнения). Пусть дано интегральное уравнение

$$\begin{aligned}\hat{f}(z) &= \hat{u}(x, y) + i\hat{v}(x, y) = \\ &= \int_{z_0}^z I_0(\sqrt{(z_1-\xi_1)(\bar{z}_1+a)}) f(\xi) d\xi_1 + \sqrt{\frac{\bar{z}_1-\xi_1}{z_1+a}} \times \\ &\quad \times I_1(\sqrt{(\bar{z}_1-\xi_1)(z_1+a)}) \bar{f}(\xi) d\bar{\xi}_1,\end{aligned}\quad (422)$$

где z — переменная точка, лежащая на каком-либо фиксированном контуре Γ , выходящем из точки z_0 , $\hat{f}(z) = \hat{u}(x, y) + i\hat{v}(x, y)$ — заданная на контуре Γ непрерывная функция его длины дуги, удовлетворяющая на Γ условию «β», остальные обозначения такие же, как и в (405). Тогда решение интегрального уравнения (422) на контуре Γ имеет вид

$$\begin{aligned}f(z) &= u(x, y) + iv(x, y) = \\ &= \frac{d^2}{dz_1^2} \int_{z_0}^z I_0(\sqrt{(t_1-z_1)(\bar{t}_1+a)}) \hat{f}(t) dt_1 + \\ &\quad + \sqrt{\frac{\bar{t}_1-z_1}{t_1+a}} I_1(\sqrt{(t_1-z_1)(\bar{t}_1+a)}) \bar{\hat{f}}(t) d\bar{t}_1,\end{aligned}\quad (423)$$

где $\frac{d}{dz_1} = \frac{dz}{dz_1} \frac{d}{dz}$, $\frac{d}{dz}$ — знак производной в положительном направлении контура Γ .

В самом деле, подставляя (422) в (423) и затем изменяя порядок интегрирования, получаем равенство (414), в котором $R(z, \xi)$ и $S(z, \xi)$ определяются равенствами (415) и (416). Поскольку $R(z, \xi)$ и $S(z, \xi)$ не зависят от вида функции $f(z)$, здесь, как и в условиях

теоремы 2, $S(z, \zeta) \equiv 0$, $R(z, \zeta) = z_1 - \zeta_1$ и равенство (414) совпадает с равенством (414'), из которого следует, что функция $f(z)$ в точках контура Γ определяется равенством (423).

Отметим, что в случае $z_1 = \omega(z) \equiv z$ интегральное уравнение (422) и его решение (423) соответственно принимают вид

$$\begin{aligned}\hat{f}(z) &= \hat{u}(x, y) + i\hat{v}(x, y) = \\ &= \int_{z_0}^z I_0(\sqrt{(z-\zeta)(\bar{z}+a)}) f(\zeta) d\zeta + \\ &+ \sqrt{\frac{\bar{z}-\bar{\zeta}}{z+a}} I_1(\sqrt{(\bar{z}-\bar{\zeta})(z+\bar{a})}) \bar{f}(\bar{\zeta}) d\bar{\zeta},\end{aligned}\quad (422')$$

$$\begin{aligned}f(z) &= u(x, y) + iv(x, y) = \\ &= \frac{d^2}{dz^2} \int_{z_0}^z I_0(\sqrt{(t-z)(\bar{t}+a)}) \hat{f}(t) dt + \\ &+ \sqrt{\frac{\bar{t}-z}{\bar{t}+a}} I_1(\sqrt{(t-z)(\bar{t}+a)}) \bar{\hat{f}}(\bar{t}) d\bar{t}.\end{aligned}\quad (423')$$

Замечание 1. Считая в (405') или в (422') контур Γ прямолинейным горизонтальным отрезком, соединяющим точку $z_0 = x_0 + iy$ с точкой $z = x + iy$, $a = a_1 + iy$ и учитывая (412') или (423'), приходим к интегральным представлениям

$$\begin{aligned}\hat{u}(x, y) &= \int_{x_0}^x \left[I_0(\sqrt{(x-\xi)(x+a_1)}) + \right. \\ &+ \left. \sqrt{\frac{x-\xi}{x+a_1}} I_1(\sqrt{(x-\xi)(x+a_1)}) \right] u(\xi, y) d\xi,\end{aligned}\quad (424)$$

$$\begin{aligned}\hat{v}(x, y) &= \int_{x_0}^x \left[I_0(\sqrt{(x-\xi)(x+a_1)}) - \right. \\ &- \left. \sqrt{\frac{x-\xi}{x+a_1}} I_1(\sqrt{(x-\xi)(x+a_1)}) \right] v(\xi, y) d\xi\end{aligned}\quad (425)$$

и соответственно формулам их обращения

$$\begin{aligned}u(x, y) &= \frac{d^2}{dx^2} \int_{x_0}^x \left[I_0(\sqrt{(\xi-x)(\xi+a_1)}) + \right. \\ &+ \left. \sqrt{\frac{\xi-x}{\xi+a_1}} I_1(\sqrt{(\xi-x)(\xi+a_1)}) \right] \hat{u}(\xi, y) d\xi,\end{aligned}\quad (426)$$

$$\begin{aligned}v(x, y) &= \frac{d^2}{dx^2} \int_{x_0}^x \left[I_0(\sqrt{(\xi-x)(\xi+a_1)}) - \right. \\ &- \left. \sqrt{\frac{\xi-x}{\xi+a_1}} I_1(\sqrt{(\xi-x)(\xi+a_1)}) \right] \hat{v}(\xi, y) d\xi.\end{aligned}\quad (427)$$

Введя обозначения

$$\Phi(x) = \hat{u}(x, y), \quad \Psi(x) = \hat{v}(x, y), \quad \varphi(x) = u(x, y), \quad \psi(x) = v(x, y), \quad (428)$$

равенства (424), (425) можно рассматривать как интегральные уравнения

$$\begin{aligned} \Phi(x) = & \int_{x_0}^x [I_0(\sqrt{(x-\xi)(x+a_1)}) + \\ & + \sqrt{\frac{x-\xi}{x+a_1}} I_1(\sqrt{(x-\xi)(x+a_1)})] \varphi(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (424')$$

$$\begin{aligned} \Psi(x) = & \int_{x_0}^x \left[I_0(\sqrt{(x-\xi)(x+a_1)}) - \right. \\ & \left. - \sqrt{\frac{x-\xi}{x+a_1}} I_1(\sqrt{(x-\xi)(x+a_1)}) \right] \psi(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (425')$$

а равенства

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & \frac{d^2}{dx^2} \int_{x_0}^x \left[I_0(\sqrt{(\xi-x)(\xi+a_1)}) + \right. \\ & \left. + \sqrt{\frac{\xi-x}{\xi+a_1}} I_1(\sqrt{(\xi-x)(\xi+a_1)}) \right] \Phi(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (426')$$

$$\begin{aligned} \psi(x) = & \frac{d^2}{dx^2} \int_{x_0}^x \left[I_0(\sqrt{(\xi-x)(\xi+a_1)}) - \right. \\ & \left. - \sqrt{\frac{\xi-x}{\xi+a_1}} I_1(\sqrt{(\xi-x)(\xi+a_1)}) \right] \Psi(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (427')$$

как решения этих интегральных уравнений.

Замечание 2. Считая в (405') или в (422') контур Γ прямолинейным вертикальным отрезком, соединяющим точку $z_0 = x + iy_0$ с точкой $z = x + iy$, $a = -x - ia_2$ и учитывая (412') или (423'), приходим к интегральным представлениям

$$\begin{aligned} \hat{u}(x, y) = & \int_{y_0}^y \left[-I_0(\sqrt{(y-\eta)(y+a_2)}) v(x, \eta) - \right. \\ & \left. - \sqrt{\frac{y-\eta}{y+a_2}} I_1(\sqrt{(y-\eta)(y+a_2)}) u(x, \eta) \right] d\eta, \end{aligned} \quad (429)$$

$$\begin{aligned} \hat{v}(x, y) = & \int_{y_0}^y \left[I_0(\sqrt{(y-\eta)(y+a_2)}) u(x, \eta) + \right. \\ & \left. + \sqrt{\frac{y-\eta}{y+a_2}} I_1(\sqrt{(y-\eta)(y+a_2)}) v(x, \eta) \right] d\eta \end{aligned} \quad (430)$$

и формулам их обращения

$$u(x, y) = \frac{d^2}{dy^2} \int_{y_0}^y \left[I_0(\sqrt{(\eta - y)(\eta + a_2)}) \hat{v}(x, \eta) - \sqrt{\frac{\eta - y}{\eta + a_2}} I_1(\sqrt{(\eta - y)(\eta + a_2)}) \hat{u}(x, \eta) \right] d\eta, \quad (431)$$

$$v(x, y) = \frac{d^2}{dy^2} \int_{y_0}^y \left[-I_0(\sqrt{(\eta - y)(\eta + a_2)}) \hat{u}(x, \eta) + \sqrt{\frac{\eta - y}{\eta + a_2}} I_1(\sqrt{(\eta - y)(\eta + a_2)}) \hat{v}(x, \eta) \right] d\eta. \quad (432)$$

Введя обозначения

$$\Phi(y) = \hat{u}(x, y), \quad \Psi(y) = \hat{v}(x, y), \quad \varphi(y) = u(x, y), \quad \psi(y) = v(x, y), \quad (433)$$

равенства (429), (430) можно рассматривать как систему интегральных уравнений

$$\Phi(y) = \int_{y_0}^y \left[-\sqrt{\frac{y - \eta}{y + a_2}} I_1(\sqrt{(y - \eta)(y + a_2)}) \varphi(\eta) - I_0(\sqrt{(y - \eta)(y + a_2)}) \psi(\eta) \right] d\eta, \quad (429')$$

$$\begin{aligned} \Psi(y) = & \int_{y_0}^y \left[I_0(\sqrt{(y - \eta)(y + a_2)}) \varphi(\eta) + \sqrt{\frac{y - \eta}{y + a_2}} I_1(\sqrt{(y - \eta)(y + a_2)}) \psi(\eta) \right] d\eta, \\ & (430') \end{aligned}$$

а равенства

$$\varphi(y) = \frac{d^2}{dy^2} \int_{y_0}^y \left[-\sqrt{\frac{\eta - y}{\eta + a_2}} I_1(\sqrt{(\eta - y)(\eta + a_2)}) \Phi(\eta) + I_0(\sqrt{(\eta - y)(\eta + a_2)}) \Psi(\eta) \right] d\eta, \quad (431')$$

$$\begin{aligned} \psi(y) = & \frac{d^2}{dy^2} \int_{y_0}^y \left[-I_0(\sqrt{(\eta - y)(\eta + a_2)}) \Phi(\eta) + \sqrt{\frac{\eta - y}{\eta + a_2}} I_1(\sqrt{(\eta - y)(\eta + a_2)}) \Psi(\eta) \right] d\eta \\ & (432') \end{aligned}$$

как решение этой системы интегральных уравнений.

Построенное основное интегральное представление p -аналитических функций с логарифмически гармонической характеристикой (405) и формула его обращения (412) позволяют сводить краевые

задачи для указанных p -аналитических функций, и в частности для уравнения Гельмгольца

$$U_{xx} + U_{yy} - \frac{1}{4} \left| \frac{dz_1}{dz} \right|^2 U = 0, \quad (410')$$

к краевым задачам для аналитических функций. Покажем, что при помощи такого сведения в ряде случаев представляется возможным найти решение отдельных краевых задач для p -аналитических функций с логарифмически гармонической характеристикой p и для уравнения Гельмгольца (410') в явном виде. Рассмотрим конкретные краевые задачи для p -аналитических функций с характеристикой $p = e^{2x}$, представляющие самостоятельный интерес.

1. Пусть требуется найти функцию $\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y)$, p -аналитическую в верхней полуплоскости $z = x + iy$ с характеристикой $p = e^{2x}$, при условии, что ее вещественная часть на вещественной оси $\tilde{u}(x, 0)$ ($-\infty < x < \infty$) задана.

Ищем решение этой задачи $\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y)$ в виде основного интегрального представления (405'), считая при этом $z_0 = -\infty$, $a = a_1$ (a_1 — вещественное число). В соответствии с (426) для вещественной части соответствующей аналитической функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ получаем

$$u(x, 0) = \frac{d^2}{dx^2} \int_{-\infty}^x \left[I_0(\sqrt{(\xi - x)(\xi + a_1)}) + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{\xi - x}{\xi + a_1}} I_1(\sqrt{(\xi - x)(\xi + a_1)}) \right] e^{\xi} \tilde{u}(\xi, 0) d\xi. \quad (434)$$

Предположив, что найденные значения функции $u(x, 0)$ при $x \rightarrow \pm \infty$ удовлетворяют условию

$$|u(x, 0) - A| < M|x|^{-\delta}, \quad (435)$$

где A , M , δ — постоянные ($M > 0$, $\delta > 0$), по формуле Шварца находим функцию $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, аналитическую в верхней полуплоскости $z = x + iy$,

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\xi, 0) d\xi}{\xi - z} + iC, \quad (436)$$

где C — вещественная постоянная. Подставляя ее в основное интегральное представление (405') (при $z_0 = -\infty$, $a = a_1$), получаем искомое решение задачи (если выполняются некоторые условия о поведении $\tilde{u}(x, 0)$ и $\tilde{f}(z)$ при $z \rightarrow \infty$, детального анализа которых мы здесь не приводим) в явном виде.

Легко видеть, что точно так же в явном виде решается задача e^{2x} -аналитических функций $\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y)$ для верхней полу-

плоскости $z = x + iy$, если на вещественной оси заданы значения мнимой части искомой функции $\tilde{v}(x, 0)$ ($-\infty < x < \infty$).

2. Пусть требуется найти функцию $\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y)$, e^{2x} -аналитическую в правой полуплоскости $z = x + iy$ при условии, что на мнимой оси значения суммы ее вещественной и мнимой частей $\tilde{u}(0, y) + \tilde{v}(0, y)$ ($-\infty < y < \infty$) заданы.

Ищем решение этой задачи $\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y)$ в виде основного интегрального представления (405'), считая при этом $z_0 = -i\infty$, $a = -ia_2$ (a_2 — вещественное число). В соответствии с (431), (432) получаем

$$u(0, y) - v(0, y) = \frac{d^2}{dy^2} \int_{-\infty}^y \left[I_0(\sqrt{(\eta - y)(\eta + a_2)}) - \right. \\ \left. - \sqrt{\frac{\eta - y}{\eta + a_2}} I_1(\sqrt{(\eta - y)(\eta + a_2)}) \right] (\tilde{u}(0, \eta) + \tilde{v}(0, \eta)) d\eta. \quad (437)$$

Определяя аналитическую функцию $\tilde{f}(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ в правой полуплоскости $z = x + iy$ по найденным значениям разности $u(0, y) - v(0, y)$ ($-\infty < y < \infty$) и подставляя эту функцию в основное интегральное представление (405') (при $z_0 = -i\infty$, $a = -ia_2$), находим искомое решение задачи e^{2x} -аналитических функций в явном виде.

Из равенств (431), (432) следует, что точно таким же способом решается краевая задача e^{2x} -аналитических функций $\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y)$ для правой полуплоскости $z = x + iy$, если на мнимой оси заданы значения разности $\tilde{u}(0, y) - \tilde{v}(0, y)$ ($-\infty < y < \infty$).

3. Пусть требуется найти функцию $\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y)$, e^{2x} -аналитическую в первой четверти плоскости $z = x + iy$ ($x > 0$, $y > 0$), при условии, что на положительной части вещественной оси заданы значения ее вещественной части $\tilde{u}(x, 0)$ ($0 < x < \infty$), а на положительной части мнимой оси — значения суммы ее вещественной и мнимой частей $\tilde{u}(0, y) + \tilde{v}(0, y)$ ($0 < y < \infty$).

Ищем решение этой задачи $\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y)$ в виде основного интегрального представления (405'), считая при этом $z_0 = 0$, $a = 0$. В соответствии с (426) при $0 < x < \infty$ получаем

$$u(x, 0) = \frac{d^2}{dx^2} \int_0^x \left[I_0(\sqrt{(\xi - x)\xi}) + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{\xi - x}{\xi}} I_1(\sqrt{(\xi - x)\xi}) \right] e^{\xi} \tilde{u}(\xi, 0) d\xi, \quad (438)$$

а при $0 < y < \infty$ из (431), (432) —

$$u(0, y) - v(0, y) = \frac{d^2}{dy^2} \int_0^y \left[I_0(\sqrt{(\eta - y)\eta}) - \right. \\ \left. - \sqrt{\frac{\eta - y}{\eta}} I_1(\sqrt{(\eta - y)\eta}) \right] [\tilde{u}(0, \eta) + \tilde{v}(0, \eta)] d\eta. \quad (439)$$

Определяя аналитическую функцию $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ в четверти плоскости $x > 0, y > 0$ по найденным значениям $u(x, 0)$ ($0 < x < \infty$) и $u(0, y) - v(0, y)$ ($0 < y < \infty$) и подставляя ее в основное интегральное представление (405') (при $z_0 = 0, a = 0$), получаем искомое решение задачи e^{2x} -аналитических функций для четверти плоскости $x > 0, y > 0$ в явном виде.

Из равенств (426), (431), (432) следует, что точно таким же способом в явном виде решаются краевые задачи e^{2x} -аналитических функций $\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y)$ для четверти плоскости $x > 0, y > 0$, если на вещественной оси при $x > 0$ заданы значения вещественной $\tilde{u}(x, 0)$ или мнимой $\tilde{v}(x, 0)$ частей, а на мнимой оси при $y > 0$ — значения суммы вещественной и мнимой частей $\tilde{u}(0, y) + \tilde{v}(0, y)$ или их разности $\tilde{u}(0, y) - \tilde{v}(0, y)$.

§ 9. ЗАДАЧА О КОМПЛЕКСНОМ x -АНАЛИТИЧЕСКОМ ПОТЕНЦИАЛЕ СИСТЕМЫ КРУГОВОГО И КОЛЬЦЕВОГО ДИСКОВ

Пусть a_1, b_1, a_2, b_2 — заданные числа ($a_1 = 0, 0 < b_1 < a_2 < b_2 < \infty$), G — правая полуплоскость $z = x + iy$ с разрезами вдоль интервалов вещественной оси $(0, b_1), (a_2, \infty)$, G^* — правая полуплоскость $z = x + iy$ с разрезами вдоль интервалов $(0, b_1), (a_2, b_2)$ (рис. 23). Поставим для p -аналитических функций от $z = x + iy$ с характеристикой $p = x$ краевую задачу, включающую, в частности, задачу об осесимметричном потенциале системы кругового и кольцевого дисков [113].

Требуется найти функцию $\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y)$, p -аналитическую в области G с характеристикой $p = x$, удовлетворяющую крайвым условиям:

$$\tilde{u}^+(x, 0) = \tilde{u}^-(x, 0) = \tilde{\Phi}_k(x) = H_k + \tilde{\Psi}_k(x), \quad a_k < x < b_k, \quad k = 1, 2, \quad (440)$$

$$\tilde{v}(0, y) = 0, \quad 0 < y < \infty, \quad (441)$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{v}^+(x, 0) = \tilde{v}^-(x, 0) = c_1, \quad b_1 < x < a_2, \\ \tilde{v}^+(x, 0) = -\tilde{v}^-(x, 0) + 2c_1 = c_1 + c_2, \quad b_2 < x < \infty, \end{aligned} \right\} \quad (442)$$

где H_1, H_2 — заданные вещественные постоянные, $\tilde{\Psi}_k(x)$ — заданные вещественные функции от x , непрерывные на отрезках $a_k \leq x \leq b_k$, $\tilde{\Psi}_k(a_k) = 0$ ($k = 1, 2$), знаки «плюс» и «минус» указывают на предельные значения функций сверху (при $z \rightarrow x + i0$) и снизу (при $z \rightarrow x - i0$), c_1, c_2 — вещественные постоянные (заранее не задаются).

Предположения о свойствах функции $\tilde{f}(z)$ при подходе к точкам $z = a_1, b_1, a_2, b_2$ и при $z \rightarrow \infty$ заранее не формулируем. Эти свойства должны вытекать как следствия из формы искомого решения задачи. Ищем решение поставленной задачи в виде

$$\begin{aligned} \tilde{f}(z) &= \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y) = P(f(\zeta)) = \\ &= \operatorname{Re} \int_{z_0}^z f(\zeta)(z - \zeta)^{-\frac{1}{2}} (\bar{z} + \zeta)^{-\frac{1}{2}} d\zeta + i \operatorname{Im} \int_{z_0}^z f(\zeta)(\zeta - iy)(z - \zeta)^{-\frac{1}{2}} \times \\ &\quad \times (\bar{z} + \zeta)^{-\frac{1}{2}} d\zeta, \quad \zeta = \xi + i\eta. \end{aligned} \quad (443)$$

Здесь z_0 — любая точка, лежащая на мнимой оси при $y \geq 0$; интегрирование по $\zeta = \xi + i\eta$ ведется вдоль произвольного контура Γ , соединяющего точку z_0 с точкой $z = x + iy$ и лежащего в области G ; при $z = x + iy$, $\zeta = \xi + iy$ $\arg(z - \zeta)(\bar{z} + \zeta) = 0$, если $x > \xi$, и $\arg(z - \zeta)(\bar{z} + \zeta) = -\pi$, если $x < \xi$; $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ — функция от z , аналитическая в области G^* и в области, симметричной ей относительно мнимой оси, удовлетворяющая условию $v(0, y) = 0$ ($-\infty < y < \infty$), регулярная и имеющая нуль не ниже первого порядка при $z = \infty$, т. е. в окрестности бесконечности

$$f(z) = \frac{i\gamma}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \frac{A_3}{z^3} + \dots, \quad (444)$$

где $A_2, A_3, \dots$ — постоянные, γ — вещественная постоянная. Если Γ — прямолинейный отрезок, соединяющий точку $z_0 = 0 + iy$ с точкой $z = x + iy$ ($y \geq 0$), то равенство (443) принимает вид

$$\begin{aligned} \tilde{f}(z) &= \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y) = P(f(\zeta)) = \\ &= \int_0^x [u(\xi, y) + i\xi v(\xi, y)] \frac{d\xi}{\sqrt{x^2 - \xi^2}}, \quad \zeta = \xi + iy. \end{aligned} \quad (445)$$

Рассматривая интеграл (443) вдоль замкнутого контура, составленного из отрезка мнимой оси $[y, y + R]$, горизонтального отрезка $z = x + iy$, $0 \leq x \leq R$, и четверти окружности радиуса R с центром в точке $z = 0 + iy$, и учитывая, что

$$\operatorname{Im} \left[2\pi i \operatorname{Res}_{\zeta=\infty} \frac{f(\zeta)(\zeta - iy)}{\sqrt{(z - \zeta)(\bar{z} + \zeta)}} \right] = 2\pi\gamma, \quad \arg(x^2 - \xi^2) = -\pi, \quad x < \xi,$$

можём записать

$$\begin{aligned} \tilde{f}(z) &= \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y) = P^*(f(\zeta)) + i\frac{\pi\gamma}{2} = \\ &= \int_{-\infty}^x \{ \operatorname{Re} [f(\zeta) e^{i\frac{\pi}{2}}] + i\zeta \operatorname{Im} [f(\zeta) e^{i\frac{\pi}{2}}] \} \frac{d\zeta}{\sqrt{x^2 - \zeta^2}} + \frac{i\pi\gamma}{2}, \quad \zeta = \xi + iy. \end{aligned} \quad (446)$$

Положим

$$\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y) = \tilde{f}_1(z) + \tilde{f}_2(z), \quad (447)$$

где $\tilde{f}_1(z) = \tilde{u}_1(x, y) + i\tilde{v}_1(x, y)$, $\tilde{f}_2(z) = \tilde{u}_2(x, y) + i\tilde{v}_2(x, y)$ — x -аналитические функции от z ,

$$\tilde{f}_1(z) = P(f_1(\zeta)), \quad \tilde{f}_2(z) = P(f_2(\zeta)), \quad \zeta = \xi + i\eta, \quad (448)$$

$f_1(z) = u_1(x, y) + iv_1(x, y)$, $f_2(z) = u_2(x, y) + iv_2(x, y)$ — аналитические функции от z ,

$$f_1(z) = zF_1(z), \quad f_2(z) = \sqrt{z^2 - a_2^2}F_2(z) + i\gamma_2(\sqrt{z^2 - a_2^2} - \sqrt{z^2 - b_2^2}).$$

Функции $F_1(z)$ и $F_2(z)$ имеют вид

$$\begin{aligned} F_k(z) &= U_k(x, y) + iV_k(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a_k}^{b_k} 2U_k(t) \frac{2t}{t^2 - z^2} dt, \quad k = 1, 2, \\ a_1 &= 0, \end{aligned} \quad (450)$$

где γ_2 — вещественная (пока неопределенная) постоянная, $\arg \sqrt{z^2 - a_2^2} = 0$ при $z = x + i0$ ($x > a_2$), $\arg \sqrt{z^2 - b_2^2} = 0$ при $z = x + i0$ ($x > b_2$), t — вещественная переменная интегрирования, $U_1(t)$, $U_2(t)$ — вещественные нечетные функции от t , определенные и удовлетворяющие условию H (условию Гельдера) в интервалах $-b_1 < x < b_1$ и соответственно $(-b_2, -a_2)$ и (a_2, b_2) . При подходе к концам интервалов b_1 и a_2 , b_2 функции $U_1(t)$, $U_2(t)$ можно представить так:

$$U_1(t) = \frac{\omega_1(t)}{(b_1 - t)^\beta}, \quad U_2(t) = \frac{\omega_2(t)}{(b_2 - t)^\beta}, \quad U_2(t) = \frac{\omega_2(t)}{(t - a_2)^\alpha}. \quad (451)$$

Здесь $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$ — функции от t , удовлетворяющие условию H на отрезках, правыми концами которых являются точки b_1 и b_2 ; $\omega_2(t)$ — функция от t , удовлетворяющая условию H на отрезке, левым концом которого является точка a_2 ; α , β — постоянные, причем $0 \leq \alpha < 1$, $0 \leq \beta < \frac{1}{2}$.

Для предельных значений интегралов типа Коши $F_k^+(x) = U_k^+(x, 0) + iV_k^+(x, 0)$ ($k = 1, 2$), учитывая формулы Сохоцкого

го, получаем

$$\left. \begin{aligned} F_1^+(x) &= U_1(x) + \frac{1}{i} J_1(x), \quad 0 < x < b_1, \\ F_1^+(x) &= \frac{1}{i} J_1(x), \quad b_1 < x < \infty, \end{aligned} \right\} \quad (452)$$

$$\left. \begin{aligned} F_2^+(x) &= U_2(x) + \frac{1}{i} J_2(x), \quad a_2 < x < b_2, \\ F_2^+(x) &= \frac{1}{i} J_2(x), \quad 0 < x < a_2, \quad b_2 < x < \infty, \end{aligned} \right\} \quad (453)$$

где

$$\frac{1}{i} J_k(x) = F_k(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a_k}^{b_k} 2U_k(t) \frac{2t}{t^2 - x^2} dt, \quad k = 1, 2. \quad (454)$$

Из (449), (450) видим, что $v_k(0, y) = 0$ ($-\infty < y < \infty$, $k = 1, 2$), и поэтому на основании (445), (448),

$$\tilde{v}_1(0, y) = 0, \quad 0 < y < \infty, \quad \tilde{v}_2(0, y) = 0, \quad -\infty < y < \infty. \quad (455)$$

Из (449), (450) также следует, что $v_1^+(x, 0) = v_1^-(x, 0)$ ($0 < x < b_1$), $u_1(x, 0) = 0$ ($b_1 < x < \infty$). Поэтому функция $\tilde{f}_1(z) = \tilde{u}_1(x, y) + i\tilde{v}_1(x, y)$ в силу интегрального представления скачков x -аналитических функций (§ 3) удовлетворяет условию $\tilde{u}_1^+(x, 0) = \tilde{u}_1^-(x, 0)$ ($0 < x < b_1$). На основании принципа симметрии p -аналитического продолжения p -аналитических функций (гл. 1, § 5) в правой полуплоскости $z = x + iy$ с разрезом вдоль вещественной оси $(0, b_1)$ выполняются равенства

$$\left. \begin{aligned} \tilde{v}_1^+(x, 0) - c_1 &= -(\tilde{v}_1^-(x, 0) - c_1), \quad 0 < x < b_1, \\ \tilde{v}_1^+(x, 0) &= -\tilde{v}_1^-(x, 0) + 2c_1 = c_1, \quad b_1 < x < \infty, \end{aligned} \right\} \quad (456)$$

где в соответствии с равенством (446), записанным в применении к функции $\tilde{f}_1(z)$, и с равенствами (449), (450), (454)

$$c_1 = \int_0^{b_1} t U_1(t) dt. \quad (457)$$

Далее из (449), (450) находим $v_2(x, 0) = 0$ ($0 < x < a_2$), $u_2^+(x, 0) = u_2^-(x, 0)$ ($a_2 < x < \infty$). Поэтому в правой полуплоскости $z = x + iy$ с разрезом вдоль вещественной оси (a_2, ∞) функция $\tilde{f}_2(z) = \tilde{u}_2(x, y) + i\tilde{v}_2(x, y)$ в соответствии с интегральным представлением ее скачков (§ 3) удовлетворяет условию $\tilde{u}_2^+(x, 0) =$

$$\begin{aligned}
 &= \tilde{u}_2^-(x, 0) \quad (a_2 < x < \infty) \text{ и для нее справедливы равенства} \\
 &\left. \begin{aligned}
 \tilde{v}_2^+(x, 0) = \tilde{v}_2^-(x, 0) = 0, \quad 0 < x < a_2, \quad \tilde{v}_2^+(x, 0) = -\tilde{v}_2^-(x, 0), \\
 a_2 < x < b_2, \\
 \tilde{v}_2^+(x, 0) = -\tilde{v}_2^-(x, 0) = c_2, \quad b_2 < x < \infty,
 \end{aligned} \right\} \quad (456')
 \end{aligned}$$

где в соответствии с (445), (446), (448), (449), (450)

$$c_2 = \int_{a_2}^{b_2} i U_2(t) dt + \gamma_2 \frac{\pi}{4} (b_2^2 - a_2^2). \quad (457')$$

Из (455), (456), (456') следует, что x -аналитическая в области G функция $\tilde{f}(z)$, определенная равенством (447) или равенством

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}(z) = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z [\zeta F_1(\zeta) + \sqrt{\zeta^2 - a_2^2} F_2(\zeta) + i \gamma_2 (\sqrt{\zeta^2 - a_2^2} - \sqrt{\zeta^2 - b_2^2})] \times \\
 \times \frac{d\zeta}{V(z-\zeta)(\bar{z}+\zeta)} + i \operatorname{Im} \int_{z_0}^z [\zeta F_1(\zeta) + \sqrt{\zeta^2 - a_2^2} F_2(\zeta) + \\
 + i \gamma_2 (\sqrt{\zeta^2 - a_2^2} - \sqrt{\zeta^2 - b_2^2})] \frac{(\zeta - iy) d\zeta}{V(z-\zeta)(\bar{z}+\zeta)}, \quad \zeta = \xi + i\eta, \quad (458)
 \end{aligned}$$

или равенством

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i \tilde{v}(x, y) = \int_0^x (\operatorname{Re} [\zeta F_1(\zeta) + \sqrt{\zeta^2 - a_2^2} F_2(\zeta) + \\
 + i \gamma_2 (\sqrt{\zeta^2 - a_2^2} - \sqrt{\zeta^2 - b_2^2})] + i \xi \operatorname{Im} [\zeta F_1(\zeta) + \sqrt{\zeta^2 - a_2^2} F_2(\zeta) + \\
 + i \gamma_2 (\sqrt{\zeta^2 - a_2^2} - \sqrt{\zeta^2 - b_2^2})]) \frac{d\xi}{V x^2 - \xi^2}, \quad \zeta = \xi + iy, \quad y \geq 0, \quad (458')
 \end{aligned}$$

удовлетворяет краевым условиям (441), (442).

Рассматривая равенство (458') при $y = +0$, $0 < x < b_1$, $a_2 < x < b_2$ с учетом краевых условий (440) и равенств (449), (450), (452) — (454), получаем

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Phi}_1(x) = \int_0^x (\xi U_1(\xi) + \sqrt{a_2^2 - \xi^2} J_2(\xi) - \\
 - \gamma_2 (\sqrt{a_2^2 - \xi^2} - \sqrt{b_2^2 - \xi^2})) \frac{d\xi}{V x^2 - \xi^2}, \quad 0 < x < b_1, \quad (459)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_2(x) = & \int_0^{b_1} \xi U_1(\xi) \frac{d\xi}{\sqrt{x^2 - \xi^2}} + \int_0^{a_2} \left[\sqrt{a_2^2 - \xi^2} J_2(\xi) - \gamma_2 (\sqrt{a_2^2 - \xi^2} - \right. \\ & \left. - \sqrt{b_2^2 - \xi^2}) \right] \frac{d\xi}{\sqrt{x^2 - \xi^2}} + \int_{a_1}^x (\sqrt{\xi^2 - a_2^2} U_2(\xi) + \\ & + \gamma_2 \sqrt{b_2^2 - \xi^2}) \frac{d\xi}{\sqrt{x^2 - \xi^2}}, \quad a_2 < x < b_2.\end{aligned}\quad (460)$$

Замечая, что при $a = \text{const}$ для оператора

$$\begin{aligned}L_a^0(\varphi(\xi)) &= \int_a^x \varphi(\xi) (x^2 - \xi^2)^{-\frac{1}{2}} d\xi, \quad L_a(\tilde{\varphi}(x)) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\lambda \tilde{\varphi}(x) (\lambda^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} 2x dx\end{aligned}$$

справедливо тождество $\frac{d}{d\lambda} L_a(L_a^0(\varphi(\xi))) = \varphi(\lambda)$ (§ 3), и применяя к равенству (459) оператор $\frac{d}{d\lambda} L_0$, находим

$$\begin{aligned}\lambda U_1(\lambda) &= \Phi_1(\lambda) - \sqrt{a_2^2 - \lambda^2} J_2(\lambda) + \gamma_2 (\sqrt{a_2^2 - \lambda^2} - \sqrt{b_2^2 - \lambda^2}), \\ 0 < \lambda < b_1,\end{aligned}\quad (461)$$

где

$$\left. \begin{aligned}\Phi_1(\lambda) &= \frac{d}{d\lambda} \frac{1}{\pi} \int_0^\lambda \tilde{\Phi}_1(x) \frac{2x dx}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}} = \frac{2}{\pi} H_1 + \Psi_1(\lambda), \\ \Psi_1(\lambda) &= \frac{d}{d\lambda} \frac{1}{\pi} \int_0^\lambda \tilde{\Psi}_1(x) \frac{2x dx}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}}.\end{aligned}\right\} \quad (462)$$

Простой подсчет показывает, что

$$\int_{a_1}^\lambda \frac{2x dx}{\sqrt{\lambda^2 - x^2} \sqrt{x^2 - \xi^2}} = - \arcsin \frac{\lambda^2 - \xi^2 - 2\eta}{\lambda^2 - \xi^2} \bigg|_{\eta=a_2^2}^{\eta=\lambda^2},$$

и поэтому выполняется тождество

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\lambda} L_{a_1} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 - \xi^2}} \right) &= \frac{d}{d\lambda} \frac{1}{\pi} \int_{a_1}^\lambda \frac{2x dx}{\sqrt{x^2 - \xi^2} \sqrt{\lambda^2 - x^2}} = \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{a_2^2 - \xi^2}}{\sqrt{\lambda^2 - a_2^2}} \cdot \frac{2\lambda}{\lambda^2 - \xi^2}, \\ \lambda &> x > a_2, \quad \xi < a_2.\end{aligned}\quad (463)$$

Применяя к равенству (460) оператор $\frac{d}{d\lambda} L_{a_2}$ и используя тождество (463) и соотношение (461), при $a_2 < \lambda < b_2$ находим

$$\begin{aligned} \Phi_2(\lambda) = & \sqrt{\lambda^2 - a_2^2} U_2(\lambda) + \gamma_2 \sqrt{b_2^2 - \lambda^2} + \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - a_2^2}} \times \\ & \times \frac{1}{\pi} \int_0^{b_1} \sqrt{a_2^2 - \xi^2} \Phi_1(\xi) \frac{2\lambda}{\lambda^2 - \xi^2} d\xi + \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - a_2^2}} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{b_1}^{a_2} \sqrt{a_2^2 - \xi^2} \times \\ & \times (\sqrt{a_2^2 - \xi^2} J_2(\xi) - \gamma_2 (\sqrt{a_2^2 - \xi^2} - \sqrt{b_2^2 - \xi^2})) \frac{2\lambda}{\lambda^2 - \xi^2} d\xi, \quad (464) \end{aligned}$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Phi_2(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} L_{a_2}(\tilde{\Phi}_2(x)) = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - a_2^2}} \cdot \frac{2\lambda}{\pi} H_2 + \sqrt{\lambda^2 - a_2^2} R(\lambda), \\ R(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - a_2^2}} \Psi_2(\lambda), \quad \Psi_2(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} \frac{1}{\pi} \int_{a_2}^{\lambda} \tilde{\Psi}_2(x) \frac{2x dx}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}}, \\ a_2 < \lambda < b_2. \end{aligned} \right\} \quad (465)$$

Учитывая (454), можем написать

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - a_2^2}} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{b_1}^{a_2} (a_2^2 - \xi^2) J_2(\xi) \frac{2\lambda}{\lambda^2 - \xi^2} d\xi = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - a_2^2}} \times \\ \times \frac{1}{\pi^2} \int_{a_2}^{b_2} U_2(t) g(\lambda, t) dt, \quad (466) \end{aligned}$$

где

$$g(\lambda, t) = \int_{b_1}^{a_2} \frac{(a_2^2 - \xi^2) 2\lambda 2t}{(\lambda^2 - \xi^2)(t^2 - \xi^2)} d\xi,$$

или после подсчетов

$$\begin{aligned} g(\lambda, t) = & \int_{b_1}^{a_2} \frac{2\lambda 2t}{t^2 - \xi^2} d\xi + (a_2^2 - \lambda^2) \int_{b_1}^{a_2} \frac{2\lambda 2t}{(\lambda^2 - \xi^2)(t^2 - \xi^2)} d\xi = \\ = & 2\lambda \ln \frac{t + \xi}{t - \xi} \Big|_{\xi=b_1}^{\xi=a_2} + (a_2^2 - \lambda^2) \frac{2}{\lambda^2 - t^2} \left(\lambda \ln \frac{t + \xi}{t - \xi} - t \ln \frac{\lambda + \xi}{\lambda - \xi} \right) \Big|_{\xi=b_1}^{\xi=a_2}, \end{aligned}$$

т. е.

$$\left. \begin{aligned} g(\lambda, t) = \frac{2}{\lambda^2 - t^2} [\lambda (a_2^2 - t^2) \omega(t) - t (a_2^2 - \lambda^2) \omega(\lambda)], \\ \omega(t) = \ln \frac{t + a_2}{t - a_2} - \ln \frac{t + b_1}{t - b_1}, \quad a_2 < \lambda, \quad t < b_2. \end{aligned} \right\} \quad (467)$$

Замечаем, что

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - a_2^2}} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{b_1} \sqrt{a_2^2 - \xi^2} \Phi_1(\xi) \frac{2\lambda}{\lambda^2 - \xi^2} d\xi = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - a_2^2}} \cdot \frac{2\lambda}{\pi} A - \\ - \sqrt{\lambda^2 - a_2^2} S(\lambda), \quad (468)$$

где

$$A = \int_0^{b_1} \Phi_1(\xi) \frac{1}{\sqrt{a_2^2 - \xi^2}} d\xi, \quad (469)$$

$$S(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^{b_1} \Phi_1(\xi) \frac{1}{\sqrt{a_2^2 - \xi^2}} \cdot \frac{2\lambda}{\lambda^2 - \xi^2} d\xi, \quad a_2 < \lambda < b_2. \quad (470)$$

Далее, находим

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - a_2^2}} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{b_1}^{a_2} \sqrt{a_2^2 - \xi^2} (\sqrt{a_2^2 - \xi^2} - \sqrt{b_2^2 - \xi^2}) \frac{2\lambda}{\lambda^2 - \xi^2} d\xi = \\ = - \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - a_2^2}} \cdot \frac{2\lambda}{\pi} B - \sqrt{\lambda^2 - a_2^2} \omega(\lambda) + T_1(\lambda), \quad (471)$$

где

$$B = \int_{b_1}^{a_2} \left(\frac{\sqrt{b_2^2 - \xi^2}}{\sqrt{a_2^2 - \xi^2}} - 1 \right) d\xi, \quad (472)$$

$$T_1(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 - a_2^2} \frac{1}{\pi} \int_{b_1}^{a_2} \frac{\sqrt{b_2^2 - \xi^2}}{\sqrt{a_2^2 - \xi^2}} \cdot \frac{2\lambda}{\lambda^2 - \xi^2} d\xi, \quad a_2 < \lambda < b_2, \quad (473)$$

или после замены переменной интегрирования вида $(\lambda^2 - a_2^2)\sigma = \lambda^2 - \xi^2$

$$\frac{\frac{\lambda^2 - b_1^2}{\lambda^2 - a_2^2}}{\frac{\lambda^2 - a_2^2}{\lambda^2 - a_2^2}} \\ T_1(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_1^{\frac{\lambda^2 - b_1^2}{\lambda^2 - a_2^2}} \sqrt{b_2^2 - \xi^2} \frac{\lambda}{\xi} \frac{d\sigma}{\sigma \sqrt{\sigma - 1}}, \quad T_1(a_2 + 0) = \sqrt{b_2^2 - a_2^2}. \quad (473')$$

При $a_2 \leq \lambda \leq b_2$ непрерывность функции $S(\lambda)$ следует непосредственно из (470), непрерывность $R(\lambda)$, если предположить, что функция $\tilde{\Psi}_2(x)$ непрерывно дифференцируема, — из равенств

$$R(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - a_2^2}} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{a_2}^{\lambda} \Psi_2'(x) \frac{2\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \tilde{\Psi}_2'(x) \frac{\lambda}{x} \frac{d\sigma}{\sqrt{\sigma}},$$

где переменная интегрирования σ определяется равенством

$$(\lambda^2 - a_2^2)\sigma = \lambda^2 - x^2.$$

Подставляя (465), (466), (468), (471) в равенство (464), при $a_2 < t < b_2$ получаем

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda^2 - a_2^2} U_2(\lambda) = & \sqrt{\lambda^2 - a_2^2} [R(\lambda) + S(\lambda) + \gamma_2 T(\lambda)] + \\ & + \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - a_2^2}} \cdot \frac{2\lambda}{\pi} (H_2 - A - \gamma_2 B) + \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - a_2^2}} \cdot \frac{1}{\pi^2} \int_{a_2}^{b_2} U_2(t) \frac{2}{\lambda^2 - t^2} \\ & \times [\lambda(t^2 - a_2^2) \omega(t) - t(\lambda^2 - a_2^2) \omega(\lambda)] dt, \end{aligned} \quad (47)$$

где

$$T(\lambda) = -\frac{1}{\pi} \omega(\lambda) + \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - a_2^2}} T_0(\lambda), \quad T_0(\lambda) = T_1(\lambda) - \sqrt{b_2^2 - \lambda^2} \quad (47')$$

причем в соответствии с (473') $T_0(a_2 + 0) = 0$. Учитывая последние из условий (451), при $\lambda \rightarrow a_2 + 0$ из (474) находим соотношения

$$H_2 - A - \gamma_2 B - \frac{1}{\pi} \int_{a_2}^{b_2} U_2(t) \omega(t) dt = 0. \quad (47'')$$

Подставляя его в равенство (474), получаем уравнение

$$\begin{aligned} U_2(\lambda) = & R(\lambda) + S(\lambda) + \gamma_2 T(\lambda) + \frac{1}{\pi^2} \int_{a_2}^{b_2} U_2(t) H(\lambda, t) dt, \\ & a_2 < \lambda, \quad t < b_2, \end{aligned} \quad (47''')$$

где

$$H(\lambda, t) = \frac{2}{\lambda^2 - t^2} (\lambda \omega(t) - t \omega(\lambda)), \quad a_2 < \lambda, \quad t < b_2. \quad (47''')$$

Из (476) находим

$$\gamma_2 = \frac{1}{B} (H_2 - A) - \frac{1}{B} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{a_2}^{b_2} U_2(t) \omega(t) dt. \quad (47''')$$

Подставляя (479) в (477), получаем искомое интегральное уравнение для определения функции $U_2(\lambda)$, удовлетворяющей условиям (451)

$$\begin{aligned} U_2(\lambda) = & R(\lambda) + S(\lambda) + \frac{1}{B} (H_2 - A_2) T(\lambda) + \frac{1}{\pi^2} \int_{a_2}^{b_2} U_2(t) G(\lambda, t) dt \\ & a_2 < \lambda, \quad t < b_2, \end{aligned} \quad (48)$$

где

$$G(\lambda, t) = H(\lambda, t) + h(\lambda, t), \quad h(\lambda, t) = \omega(\lambda) \omega(t), \quad \omega(\lambda) = -\frac{1}{B} \pi T(\lambda) \quad (48)$$

При этом существенно, что функция $T(\lambda)$ непрерывна в полуинтервале $(a_2, b_2]$ и при $\lambda \rightarrow a_2 + 0$ $T(\lambda) = o((\lambda^2 - a_2^2)^{-\frac{1}{2}})$. Ядр

$G(\lambda, t)$, $H(\lambda, t)$, $h(\lambda, t)$ непрерывны в полузамкнутом квадрате $a_2 < \lambda$, $t \leq b_2$, при $\lambda \rightarrow a_2 + 0$

$$H(\lambda, t) = O\left(\ln \frac{1}{\lambda - a_2}\right), \quad h(\lambda, t) = o((\lambda^2 - a_2^2)^{-\frac{1}{2}}), \quad G(\lambda, t) = o((\lambda^2 - a_2^2)^{-\frac{1}{2}}) \quad (482)$$

при $t \rightarrow a_2 + 0$

$$H(\lambda, t) = O\left(\ln \frac{1}{t - a_2}\right), \quad h(\lambda, t) = o((t^2 - a_2^2)^{-\frac{1}{2}}), \quad G(\lambda, t) = o((t^2 - a_2^2)^{-\frac{1}{2}}). \quad (483)$$

Пусть $U_2(\lambda)$ — решение интегрального уравнения (480), удовлетворяющее условиям (451). Подставляя $U_2(\lambda)$ в (479) и в (450) (при $k = 2$), находим γ_2 и $F_2(z)$. Определяя $U_1(\lambda)$ из (461) и подставляя его в (450) (при $k = 1$), находим $F_1(z)$. Подставляя $F_1(z)$, $F_2(z)$, γ_2 в (458) или в (458'), получаем искомое решение задачи о комплексном x -аналитическом потенциале системы кругового и кольцевого дисков в квадратах. При этом постоянные c_1 , c_2 определяются равенствами (457), (457').

Рассматривая интегралы от функций

$$r(\xi) = (\xi + iy)(t - iy - \xi)^{-1}(x^2 - \xi^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad \xi r(\xi), \quad y \geq 0, \quad (484)$$

по замкнутому контуру (рис. 24), получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_{-x}^x r(\xi) d\xi &= \operatorname{Re} \left[-\frac{1}{2} \operatorname{Res}_{\xi=\infty} r(\xi) - \frac{1}{2} \operatorname{Res}_{\xi=t-iy} r(\xi) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \frac{t}{\sqrt{x^2 - (t - iy)^2}}, \\ \operatorname{Im} \frac{1}{2\pi i} \int_{-x}^x \xi r(\xi) d\xi &= \frac{1}{2} t + \frac{1}{2} \operatorname{Im} \frac{t(t - iy)}{\sqrt{x^2 - (t - iy)^2}}. \end{aligned}$$

Учитывая эти равенства и условие $\operatorname{Im}(zF_1(z))_{x=0} = 0$, решение (458') задачи (440) — (442) можем записать в виде

$$\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y) = \int_0^{b_1} \left\{ \operatorname{Re} \frac{1}{\sqrt{x^2 - (t - iy)^2}} + i \operatorname{Im} \left[\frac{t - iy}{\sqrt{x^2 - (t - iy)^2}} + i \right] \right\} t U_1(t) dt +$$

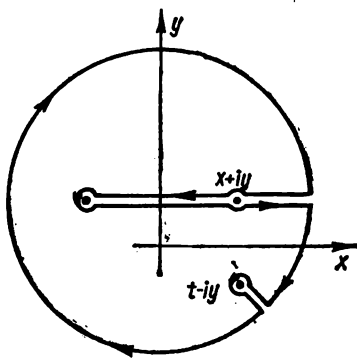


Рис. 24.

$$\begin{aligned}
& + \int_{a_2}^{b_2} \left\{ \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_0^x \frac{\sqrt{\xi^2 - a_2^2}}{t^2 - \xi^2} \frac{d\xi}{\sqrt{x^2 - \xi^2}} \right] + \right. \\
& + i \operatorname{Im} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_0^x \frac{\sqrt{\xi^2 - a_2^2}}{t^2 - \xi^2} \frac{\xi d\xi}{\sqrt{x^2 - \xi^2}} \right] \Bigg\} t U_2(t) dt + \gamma_2 \int_0^x \left\{ \operatorname{Re} [i(\sqrt{\xi^2 - a_2^2} - \right. \\
& \left. - \sqrt{\xi^2 - b_2^2})] + i\xi \operatorname{Im} [i(\sqrt{\xi^2 - a_2^2} - \sqrt{\xi^2 - b_2^2})] \right\} \frac{d\xi}{\sqrt{x^2 - \xi^2}}, \\
& \xi = \xi + iy, \quad y \geq 0, \\
& \arg(x^2 - \xi^2) = 0, \quad \pi \text{ при } \xi < x, \quad \xi > x.
\end{aligned} \tag{485}$$

Отметим некоторые частные случаи вырождения полученного решения задачи о комплексном x -аналитическом потенциале системы кругового и кольцевого дисков.

1. Случай одного кольцевого диска. Пусть $b_1 = 0$, первое из краевых условий (440) отсутствует, в первом из краевых условий (442) $c_1 = 0$. Все остается без изменений, только в равенстве (479), определяющем числовой параметр γ_2 , $A = 0$; в интегральном уравнении (480), определяющем $U_2(\lambda)$, $S(\lambda) = 0$, $A = 0$; в интегральном представлении искомого решения $\tilde{f}(z)$ (458), (458') следует считать $F_1(\xi) = 0$, в интегральном представлении этого решения (485) и в равенстве (457), определяющем c_1 , $U_1(t) = 0$.

2. Случай одного кругового диска. Пусть $a_2 = \infty$, второе из краевых условий (440) и второе из краевых условий (442) отсутствуют. В этом случае вместо равенств (459) — (461) при $0 < x, \lambda < b_1$ выполняются равенства

$$\tilde{\Phi}_1(x) = \int_0^x \xi U_1(\xi) \frac{d\xi}{\sqrt{x^2 - \xi^2}}, \quad \lambda U_1(\lambda) = \Phi_1(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} \frac{1}{\pi} \int_0^\lambda \frac{\tilde{\Phi}_1(x) 2x dx}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}}. \tag{486}$$

Искомая x -аналитическая функция $\tilde{f}(z)$ определяется в явном виде равенством (19) или (19') при условии, что $F_2(\xi) = 0$, $\gamma_2 = 0$, или в соответствии с (485)

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(z) &= \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y) = \\
&= \int_0^b \left[\operatorname{Re} \frac{1}{\sqrt{x^2 - (t - iy)^2}} + \right. \\
&+ i \left(\operatorname{Im} \frac{t - iy}{\sqrt{x^2 - (t - iy)^2}} + i \right) \Bigg] t U_1(t) dt, \quad y \geq 0.
\end{aligned} \tag{487}$$

Постоянная c_1 в соответствии с (457) определяется равенством

$$c_1 = \int_0^{b_1} \Phi_1(\lambda) d\lambda = \int_0^{b_1} \left(\frac{d}{d\lambda} \frac{1}{\pi} \int_0^\lambda \frac{\tilde{\Phi}_1(x) 2x dx}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}} \right) d\lambda$$

или

$$c_1 = \frac{1}{\pi} 2H_1 b_1 + \frac{1}{\pi} \int_0^{b_1} \frac{\tilde{\Psi}_1(x) 2x dx}{\sqrt{b_1^2 - x^2}}. \quad (488)$$

Заметим, что рассматриваемая задача о комплексном x -аналитическом потенциале одного кругового диска совпадает с частным случаем задачи 4 при $k = 1$, $a = b_1$, $\tilde{\Phi}_1(x) = \tilde{\Phi}(x)$ (§ 4), а формула (487), являющаяся ее решением, совпадает с формулой (137) при $a = b_1$, $\Phi^*(t) = \Phi_1(t)$, $\Phi_1^*(t) = 0$, $D = \frac{1}{2} c_1$, где постоянная D определяется равенством (123), постоянная c_1 — равенством (488).

3. Случай одного кольцевого диска с внешним радиусом, равным бесконечности. Пусть $b_1 = 0$, первое из краевых условий (440) отсутствует, в первом из краевых условий $c_1 = 0$, во втором из краевых условий (442) $b_2 = \infty$. Эту задачу можно рассматривать как частный случай задачи 5 (§ 4), решение которой, как показано в общем случае, находится в явном виде. В данном частном случае ищем решение задачи $\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y)$ в виде (445), предполагая, что $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ в плоскости z с разрезами вдоль вещественной оси $(-\infty, -a_2)$, (a_2, ∞) является аналитической функцией $v(x, y) = 0$ ($-\infty < y < \infty$) и при подходе к бесконечности

$$f(z) = \frac{i\gamma}{z} + f_0(z), \quad (449')$$

где γ — вещественная постоянная, $f_0(z) \subset M_2$. В силу (446) и формулы обращения (63) (при $k = 1$)

$$v(x, 0) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x \frac{\tilde{\Phi}_2(\xi) \xi d\xi}{\sqrt{\xi^2 - x^2}}, \quad a_2 < x < \infty. \quad (489)$$

Полагая $v(-x, 0) = -v(x, 0)$ и используя формулы Сохоцкого, находим

$$\begin{aligned} f(z) = u(x, y) + iv(x, y) &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\infty}^{-a_2} + \int_{a_2}^{\infty} \right] \frac{v(t, 0)}{t - z} dt = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{a_2}^{\infty} \frac{v(t, 0) t dt}{t^2 - z^2}. \end{aligned} \quad (490)$$

Подставляя (490) в (445), получаем

$$\begin{aligned} \tilde{f}(z) &= \frac{1}{2} \int_{-x}^x [u(\xi, y) + i\xi v(\xi, y)] \frac{d\xi}{\sqrt{x^2 - \xi^2}} = \\ &= \int_{a_2}^{\infty} \left[\operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_{-x}^x \left(\frac{1}{\xi + t} - \frac{1}{\xi - t} \right) \frac{1}{2t} \frac{d\xi}{\sqrt{x^2 - \xi^2}} + \right. \\ &\quad \left. + i \operatorname{Im} \frac{1}{\pi} \int_{-x}^x \left(\frac{1}{\xi + t} - \frac{1}{\xi - t} \right) \frac{1}{2t} \frac{\xi d\xi}{\sqrt{x^2 - \xi^2}} \right] t v(t, 0) dt. \end{aligned} \quad (491)$$

Считая, как и ранее, $\arg(x^2 - \xi^2) = 0$ при $\xi < x$, $\arg(x^2 - \xi^2) = \pi$ при $\xi > x$, с помощью интегрирования вдоль контура вида, указанного на рис. 24, находим

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi} \int_{-x}^x \left(\frac{1}{\xi+t} - \frac{1}{\xi-t} \right) \frac{d\xi}{\sqrt{x^2 - \xi^2}} &= -\operatorname{Re} \frac{1}{2} \cdot \frac{i}{\sqrt{x^2 - (t+iy)^2}} + \\ &+ \operatorname{Re} \frac{1}{2} \cdot \frac{i}{\sqrt{x^2 - (t-iy)^2}}, \\ \operatorname{Im} \frac{1}{2\pi} \int_{-x}^x \left(\frac{1}{\xi+t} - \frac{1}{\xi-t} \right) \frac{\xi d\xi}{\sqrt{x^2 - \xi^2}} &= -\operatorname{Im} \frac{1}{2} \cdot \frac{t(-t-iy)}{\sqrt{x^2 - (t+iy)^2}} + \\ &+ \operatorname{Im} \frac{1}{2} \cdot \frac{t(t-iy)}{\sqrt{x^2 - (t-iy)^2}}. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (491), приходим к искомой формуле — решению задачи в явном виде

$$\begin{aligned} \tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y) &= \int_{a_1}^{\infty} \left[\operatorname{Im} \frac{1}{\sqrt{x^2 - (t+iy)^2}} + \right. \\ &+ \left. i \operatorname{Re} \frac{t+iy}{\sqrt{x^2 - (t+iy)^2}} \right] v(t, 0) dt, \\ \arg(x^2 - \xi^2) &= 0, \pi \text{ при } \xi < x, \xi > x, \end{aligned} \quad (492)$$

где $v(t, 0)$ определяется равенством (489).

4. Случай кругового диска и кольцевого диска с внешним радиусом, равным бесконечности. Этот случай совпадает с задачей 6''' (§4) при условии, что $\tilde{\Phi}(x) = \tilde{\Phi}_1(x)$, $\tilde{\Psi}(x) = \tilde{\Phi}_2(x)$ ($a = b_1$, $b = a_2$, $b_2 = \infty$). Решение задачи в соответствии с § 4 имеет вид равенства (54') или при $\operatorname{Im} z > 0$ — равенства (445), где (на основании того что $\lambda(t) = \lambda^*(t) = 0$)

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{\lambda(t)}{t-z} dt + \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{-\infty}^{-b} + \int_b^{\infty} \right] \frac{i\mu^*(t)}{t-z} dt, \quad (493)$$

$\mu^*(x)$ — нечетная, $\lambda(x)$ — четная вещественные функции от x , функция $\mu^*(x)$ при $|x| > b$ определяется в явном виде через функцию $\lambda(t)$,

$$\mu^*(x) = 2\Phi_2(x) + \frac{2}{\pi} \int_0^a \lambda(t) \frac{x dt}{t^2 - x^2}, \quad b < x < \infty, \quad (494)$$

а функция $\lambda(x)$ — как решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$\lambda(x) = w(x) + \frac{1}{\pi^2} \int_0^a K(x, \xi) \lambda(\xi) d\xi \quad (495)$$

с непрерывным симметричным ядром

$$K(x, \xi) = \frac{2}{x^2 - \xi^2} \left(\xi \ln \frac{b - \xi}{b + \xi} - x \ln \frac{b - x}{b + x} \right) \quad (496)$$

и свободным членом

$$\omega(x) = 2\Phi_1(x) - \frac{4}{\pi} \int_b^{\infty} \Phi_2(t) \frac{tdt}{t^2 - x^2}, \quad (497)$$

$\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$ — известные функции, определяющиеся равенствами

$$\Phi_1(x) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\tilde{\Phi}_1(\xi) \xi d\xi}{\sqrt{x^2 - \xi^2}}, \quad 0 < x < a, \quad (498)$$

$$\Phi_2(x) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_{\infty}^x \frac{\tilde{\Phi}_2(\xi) \xi d\xi}{\sqrt{\xi^2 - x^2}}, \quad b < x < \infty. \quad (499)$$

§ 10. О РЕШЕНИИ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ПОТЕНЦИАЛА ДЛЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО СЛОЯ

Задача теории осесимметричного потенциала для пространственного слоя, ограниченного двумя плоскостями, при условии, что на одной плоскости задаются значения решения, а на другой — внутри некоторого круга задаются значения решения и вне этого круга — значения его нормальной производной, рассматривалась в ряде работ (например, [114, 115]). В настоящем параграфе показывается [116], что эта задача в несколько более общей ее постановке при помощи основного интегрального представления x -аналитических функций очень просто сводится к решению линейного интегрального уравнения второго рода со сравнительно простым ядром.

Пусть G — полуполоса в правой полуплоскости $z = x + iy$, $0 < x < \infty$, $0 < y < h$, a — граничная точка области G , лежащая на вещественной оси, $\gamma = \frac{\pi}{h}$. Поставим краевую задачу для p -аналитических функций от $z = x + iy$ с характеристикой $p = x$.

Задача А. Требуется найти функцию $\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y)$, p -аналитическую в области G с характеристикой $p = x$, удовлетворяющую краевым условиям

$$\tilde{v}^+(0, y) = 0 \quad (0 < y < h), \quad \tilde{v}^-(x, h) = 0 \quad (0 < x < \infty), \quad (500)$$

$$\tilde{v}^+(x, 0) = 0 \quad (0 < x < a), \quad \tilde{u}^+(x, 0) = \tilde{\Phi}(x) = H + \tilde{\Psi}(x) \quad (501)$$

$$(a < x < \infty),$$

где H — вещественная постоянная (заранее не задается), $\tilde{\Psi}(x)$ — вещественная функция от x , заданная и непрерывная при $a \leq x < \infty$, $\tilde{\Psi}(a) = 0$, знаки «плюс» и «минус» указывают на предельные значения функций при подходе к границе области G изнутри. Каких-либо предположений о свойствах функции $\tilde{f}(z)$ при подходе к точкам $z = a, ih$ и при $z \rightarrow \infty$ заранее не формулируем. Эти свойства должны вытекать как следствия из формы искомого решения задачи и непрерывности $\tilde{\Phi}(x)$ в точке $x = a + 0$.

Будем искать решение поставленной задачи в виде (443). Рассмотрим аналитическую функцию $f(z)$ в виде

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = \sqrt{\omega(z)} F(z), \quad (502)$$

где $\omega(z) = \operatorname{ch} \gamma z - \operatorname{ch} \gamma a$, $\arg \sqrt{\omega(z)} = 0$ при $z = x + i0$, $a < x < \infty$, и $\arg \sqrt{\omega(z)} = \frac{\pi}{2}$ при $z = x + i0$, $0 < x < a$, и при $z = x + ih$, $0 < x < \infty$,

$$F(z) = U(x, y) + iV(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^{\infty} 2U(t) \frac{\gamma \operatorname{sh} \gamma t}{\operatorname{ch} \gamma t - \operatorname{ch} \gamma z} dt, \quad (503)$$

t — вещественная переменная интегрирования, $U(t)$ — вещественная функция от t , определенная и удовлетворяющая условию H (условию Гельдера) в интервале (a, ∞) и вблизи концов этого интервала представимая в виде $U(t) = \varphi(t)(t-a)^{-\alpha}$, $U(t) = O(t^{-1-\varepsilon})$, ε и α — постоянные ($\varepsilon > 0$, $0 \leq \alpha < 1$), $\varphi(t)$ — функция от t , удовлетворяющая условию H на отрезке, левым концом которого является точка $t = a$. При помощи формул Сохоцкого для предельных значений интеграла типа Коши (предварительно обобщенных соответствующим образом) получаем

$$F^+(x) = U^+(x, 0) + iV^+(x, 0) = \begin{cases} \frac{1}{i} J(x), & 0 < x < a, \\ U(x) + \frac{1}{i} J(x), & 0 < x < \infty, \end{cases} \quad (504)$$

где

$$\frac{1}{i} J(x) = F(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^{\infty} 2U(t) \frac{\gamma \operatorname{sh} \gamma t}{\operatorname{ch} \gamma t - \operatorname{ch} \gamma x} dt. \quad (504')$$

Из равенств (502) — (504') следует, что $v(0, y) = 0$ при $0 < y < h$, $v(x, 0) = 0$ при $0 < x < a$, $v(x, h) = 0$ при $0 < x < \infty$.

Поэтому на основании (445) функция $\tilde{f}(z)$, определенная равенством (443), удовлетворяет краевым условиям (500) и первому из краевых условий (501). Подставляя (502) в равенство (443) и считая при этом

$\zeta = \xi + iy$, получаем

$$\begin{aligned} \tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y) = & \int_0^x (\operatorname{Re} [V\omega(\xi) F(\xi)] + \\ & + i\xi \operatorname{Im} [V\omega(\xi) F(\xi)]) \frac{d\xi}{Vx^2 - \xi^2}, \quad \zeta = \xi + iy. \end{aligned} \quad (505)$$

Рассматривая (505) при $y = +0$, $a < x < \infty$ и учитывая (504), (504') и второе из краевых условий (501), находим

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(x) = & \int_0^a V-\omega(\xi) J(\xi) \frac{d\xi}{Vx^2 - \xi^2} + \int_a^x V\omega(\xi) U(\xi) \frac{d\xi}{Vx^2 - \xi^2}, \\ & a < x < \infty. \end{aligned} \quad (506)$$

Замечая, что для операторов

$$\begin{aligned} L^0(\varphi(\xi)) = & \int_a^x \varphi(\xi) \frac{d\xi}{Vx^2 - \xi^2}, \quad L(\tilde{\varphi}(x)) = \frac{1}{\pi} \int_a^\lambda \tilde{\varphi}(x) \frac{2xdx}{V\lambda^2 - x^2}, \\ & x, \lambda > a, \end{aligned}$$

справедливо равенство $\frac{d}{d\lambda} L(L^0(\varphi(\xi))) = \varphi(\lambda)$, из (506) получаем

$$\Phi(\lambda) = g(\lambda) + \omega(\lambda) U(\lambda), \quad a < \lambda < \infty, \quad (507)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\lambda) &= \frac{1}{V\lambda^2 - a^2} \cdot \frac{4\lambda}{\pi} H + \Psi(\lambda), \\ \Psi(\lambda) &= \frac{d}{d\lambda} \frac{1}{\pi} \int_a^\lambda \tilde{\Psi}(x) \frac{2xdx}{V\lambda^2 - x^2}, \end{aligned} \right\} \quad (508)$$

$$g(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} L\left(\int_0^a V-\omega(\xi) J(\xi) \frac{d\xi}{Vx^2 - \xi^2}\right). \quad (509)$$

Учитывая равенство

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \int_a^\lambda \frac{2xdx}{V\lambda^2 - x^2 Vx^2 - \xi^2} = & \frac{1}{V\lambda^2 - a^2} V a^2 - \xi^2 \frac{2\lambda}{\lambda^2 - \xi^2}, \\ & \lambda > x > a, \quad \xi < a, \end{aligned} \quad (510)$$

находим

$$g(\lambda) = \frac{1}{V\lambda^2 - a^2} \cdot \frac{4\lambda}{\pi} q - V\lambda^2 - a^2 \frac{1}{\pi^2} \int_a^\infty U(t) G(\lambda, t) dt, \quad (511)$$

где $G(\lambda, t)$ — ядро

$$G(\lambda, t) = \int_0^a \frac{\sqrt{\operatorname{ch} \gamma a - \operatorname{ch} \gamma \xi}}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} \cdot \frac{\gamma \operatorname{sh} \gamma t}{\operatorname{ch} \gamma t - \operatorname{ch} \gamma \xi} \cdot \frac{2\lambda}{\lambda^2 - \xi^2} d\xi, \\ a < \lambda, \quad t < \infty, \quad (512)$$

q — постоянная,

$$q = \frac{1}{2\pi} \int_a^\infty U(t) \left(\int_0^a \frac{\sqrt{\operatorname{ch} \gamma a - \operatorname{ch} \gamma \xi}}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} \cdot \frac{\gamma \operatorname{sh} \gamma t}{\operatorname{ch} \gamma t - \operatorname{ch} \gamma \xi} d\xi \right) dt. \quad (513)$$

Полагая в равенстве (512) $\xi = t + (\lambda - t)\sigma$, ядро $G(\lambda, t)$ можно записать в виде

$$G(\lambda, t) = \int_{\frac{a-t}{\lambda-t}}^{-\frac{t}{\lambda-t}} \frac{\sqrt{\operatorname{ch} \gamma a - \operatorname{ch} \gamma \xi}}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} \cdot \frac{\gamma \operatorname{sh} \gamma t}{\operatorname{ch} \gamma t - \operatorname{ch} \gamma \xi} (t - \xi) \left[\frac{1}{\lambda + \xi} + \right. \\ \left. + \frac{1}{(\lambda - t)(1 - \sigma)} \right] \frac{d\sigma}{\sigma}, \quad (514)$$

откуда

$$|G(\lambda, t)| < M \ln \frac{t}{t-a} + M \frac{1}{|\lambda - t|} \left| \ln \frac{\lambda - a}{t - a} \right|, \quad a < \lambda, \\ t < \infty, \quad M = \text{const}, \quad (515)$$

и, следовательно, в области $a < \lambda, t < \infty$ $G(\lambda, t)$, как функция от λ и t , непрерывна при $\lambda \neq t$, ограничена при $\lambda = t$ и удовлетворяет условиям

$$G(\lambda, t) = O\left(\ln \frac{1}{\lambda - a}\right) \quad (\lambda \rightarrow a + 0), \quad G(\lambda, t) = O\left(\ln \frac{1}{t - a}\right) \\ (t \rightarrow a + 0). \quad (516)$$

Подставляя (508) и (511) в равенство (507), получаем

$$\omega(\lambda) U(\lambda) = \Psi(\lambda) + \sqrt{\lambda^2 - a^2} \frac{1}{\pi^2} \int_a^\infty U(t) G(\lambda, t) dt + \\ + \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - a^2}} \cdot \frac{4\lambda}{\pi} (H - q), \quad a < \lambda, \quad t < \infty. \quad (517)$$

Равенство

$$U(\lambda) = T(\lambda) + \frac{\sqrt{\lambda^2 - a^2}}{\sqrt{\operatorname{ch} \gamma \lambda - \operatorname{ch} \gamma a}} \cdot \frac{1}{\pi^2} \int_a^\infty U(t) G(\lambda, t) dt, \\ a < \lambda, \quad t < \infty, \quad (518)$$

где

$$T(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch} \gamma \lambda - \operatorname{ch} \gamma a}} \frac{d}{d\lambda} \frac{1}{\pi} \int_a^\lambda \tilde{\Psi}(x) \frac{2x dx}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}}, \quad a < \lambda < \infty, \quad (519)$$

или (если функция $\tilde{\Psi}(x)$ непрерывно дифференцируема)

$$T(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch} \gamma \lambda - \operatorname{ch} \gamma a}} \cdot \frac{2}{\pi} \int_a^\lambda \tilde{\Psi}'(x) \frac{2\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}} dx =$$

$$= \frac{\sqrt{\lambda - a}}{\sqrt{\operatorname{ch} \gamma \lambda - \operatorname{ch} \gamma a}} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^1 \tilde{\Psi}'(x) \frac{2\lambda}{\lambda + x} \frac{d\sigma}{\sqrt{1 - \sigma^2}}, \quad x = a + (\lambda - a)\sigma, \quad (520)$$

является вполне определенным интегральным уравнением.

Из (520) следует, что функция $T(\lambda)$ непрерывна в точке $\lambda = a + 0$. Пусть $U(\lambda)$ — решение интегрального уравнения (518). Если положить

$$H = q, \quad (521)$$

то $U(\lambda)$ будет удовлетворять уравнению (517). Подставляя $U(\lambda)$ в (503), находим $F(z)$, подставляя $f(\zeta) = \sqrt{\omega(\zeta)} F(\zeta)$ в (443), получаем искомое решение задачи (500), (501). Это решение в силу (505) можно записать в виде

$$\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y) = \int_a^\infty \left(\operatorname{Re} \left[\frac{1}{\pi i} \int_a^\zeta \frac{\sqrt{\operatorname{ch} \gamma \xi - \operatorname{ch} \gamma a}}{\sqrt{\operatorname{ch} \gamma t - \operatorname{ch} \gamma \xi}} \frac{d\xi}{\sqrt{x^2 - \xi^2}} \right] + \right.$$

$$\left. + i \operatorname{Im} \left[\frac{1}{\pi i} \int_a^\zeta \frac{\sqrt{\operatorname{ch} \gamma \xi - \operatorname{ch} \gamma a}}{\operatorname{ch} \gamma t - \operatorname{ch} \gamma \xi} \frac{\xi d\xi}{\sqrt{x^2 - \xi^2}} \right] \right) \gamma \operatorname{sh} \gamma t U(t) dt, \quad \zeta = \xi + iy. \quad (522)$$

Поставим теперь следующую краевую задачу.

Задача Б (основная задача). Требуется найти функцию $\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y)$, p -аналитическую в области G с характеристикой $p = x$, удовлетворяющую краевым условиям

$$\tilde{u}^+(x, 0) = \tilde{\Phi}(x) = H + \tilde{\Psi}(x), \quad 0 < x < a, \quad \tilde{v}^+(x, 0) = c,$$

$$a < x < \infty, \quad (523)$$

$$\tilde{u}^-(x, h) = 0, \quad 0 < x < \infty, \quad \tilde{v}(0, y) = 0, \quad 0 < y < h, \quad (524)$$

где H и c — вещественные постоянные (заранее не задаются), $\tilde{\Psi}(x)$ — вещественная функция от x , заданная и непрерывная на отрезке $0 \leq x \leq a$, $\tilde{\Psi}(a) = 0$.

Будем искать решение задачи в виде

$$\tilde{f}(z) = \operatorname{Re} \int_\infty^z f(\zeta) \frac{d\zeta}{\sqrt{(z - \zeta)(\bar{z} + \zeta)}} + i \operatorname{Im} \int_\infty^z f(\zeta) \frac{(\zeta - iy)}{\sqrt{(z - \zeta)(\bar{z} + \zeta)}} + ic,$$

$$\zeta = \xi + i\eta, \quad (525)$$

где $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ — аналитическая функция от z , определенная равенством (502) при условии, что

$$F(z) = U(x, y) + iV(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^a 2U(t) \frac{\gamma \operatorname{sh} \gamma t}{\operatorname{ch} \gamma t - \operatorname{ch} \gamma z} dt, \quad (526)$$

t — вещественная переменная интегрирования, $U(t)$ — вещественная функция от t , удовлетворяющая условию H в полуинтервале $[0, a)$ и вблизи точки $t = a$ подставляемая в виде $U(t) = \varphi(t)(t-a)^{-\alpha}$, α — постоянная ($0 \leq \alpha < 1$), $\varphi(t)$ — функция от t , удовлетворяющая условию H на отрезке, правым концом которого является точка $t = a$. В соответствии с формулами Сохоцкого в их обобщенном виде получаем

$$F^+(x) = U^+(x, 0) + iV^+(x, 0) = \begin{cases} U(x) + \frac{1}{i} J(x), & 0 < x < a, \\ \frac{1}{i} J(x), & a < x < \infty, \end{cases} \quad (527)$$

где

$$\frac{1}{i} J(x) = F(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^a 2U(t) \frac{\gamma \operatorname{sh} \gamma t}{\operatorname{ch} \gamma t - \operatorname{ch} \gamma x} dt. \quad (527')$$

Считая в равенстве (525) $\zeta = \xi + iy$, находим

$$\begin{aligned} \tilde{f}(z) &= \int_{-\infty}^x [\operatorname{Re}(f(\zeta) e^{i \frac{\pi}{2}}) + i \xi \operatorname{Im}(f(\zeta) e^{i \frac{\pi}{2}})] \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 - x^2}} + ic, \\ \zeta &= \xi + iy. \end{aligned} \quad (528)$$

Из равенств (502), (527), (527') следует, что $u(x, 0) = 0$ ($a < x < \infty$), $v(x, h) = 0$ ($0 < x < \infty$). Поэтому функция $\tilde{f}(z)$, определенная равенством (525), удовлетворяет второму из краевых условий (523) и первому из краевых условий (524). Рассматривая интеграл от функции $f(\zeta) e^{i \frac{\pi}{2}}$ по замкнутому контуру $|\infty + ih, 0 + ih|$, $|0 + ih, 0 + iy|$, $|0 + iy, \infty + iy|$, получаем $\tilde{v}(0, h) = \tilde{v}(0, y) = \tilde{v}(0, 0)$ ($0 < y < h$). Второе из краевых условий (524) будет удовлетворено, если положить

$$c = \int_0^a \sqrt{\operatorname{ch} \gamma a - \operatorname{ch} \gamma \xi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2U(t) \frac{1}{\operatorname{ch} \gamma t - \operatorname{ch} \gamma \xi} \gamma \operatorname{sh} \gamma t dt \right) d\xi. \quad (529)$$

Учитывая первое из краевых условий (523), из (528) находим

$$\tilde{\Phi}(x) = \int_{\infty}^a \sqrt{\omega(\xi)} J(\xi) \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 - x^2}} + \int_a^x -\sqrt{-\omega(\xi)} U(\xi) \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 - x^2}},$$

$$0 < x < a. \quad (530)$$

Отсюда, учитывая тождества

$$\frac{d}{d\lambda} L(L^0(\varphi(\xi))) = \varphi(\gamma), \quad \frac{d}{d\lambda} L\left(\frac{1}{\sqrt{\xi^2 - x^2}}\right) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{\xi^2 - a^2}}{\sqrt{a^2 - \lambda^2}} \times$$

$$\times \frac{2\lambda}{\lambda^2 - \xi^2}, \quad a > x > \lambda > 0, \quad \xi > a, \quad (531)$$

где

$$L^0(\varphi(\xi)) = \int_a^x \varphi(\xi) \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 - x^2}}, \quad L(\tilde{\varphi}(x)) = -\frac{1}{\pi} \int_a^{\lambda} \tilde{\varphi}(x) \frac{2x dx}{\sqrt{x^2 - \lambda^2}},$$

$$x, \lambda < a,$$

получаем

$$\sqrt{-\omega(\lambda)} U(\lambda) = -\Psi(\lambda) + \sqrt{a^2 - \lambda^2} \frac{1}{\pi^2} \int_0^a U(t) G(\lambda, t) dt +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{a^2 - \lambda^2}} \cdot \frac{4\lambda}{\pi} (H - q), \quad (532)$$

где

$$\Psi(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} L(\tilde{\Psi}(x)), \quad 0 < \lambda < a,$$

$$q = \frac{1}{2\pi} \int_0^a \left(\int_{\infty}^a \frac{\sqrt{\operatorname{ch} \gamma \xi - \operatorname{ch} \gamma a}}{\sqrt{\xi^2 - a^2}} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch} \gamma t - \operatorname{ch} \gamma \xi} d\xi \right) \gamma \operatorname{sh} \gamma t U(t) dt, \quad (533)$$

$$G(\lambda, t) = - \int_{\infty}^a \frac{\sqrt{\operatorname{ch} \gamma \xi - \operatorname{ch} \gamma a}}{\sqrt{\xi^2 - a^2}} \cdot \frac{\gamma \operatorname{sh} \gamma t}{\operatorname{ch} \gamma t - \operatorname{ch} \gamma \xi} \cdot \frac{2\lambda}{\lambda^2 - \xi^2} d\xi, \quad 0 < \lambda, t < a, \quad (534)$$

или, если положить $\xi = t - (\lambda - t) \sigma$,

$$G(\lambda, t) = - \int_{\pm \infty}^{\frac{a-t}{\lambda-t}} \frac{\sqrt{\operatorname{ch} \gamma \xi - \operatorname{ch} \gamma a}}{\sqrt{\xi^2 - a^2}} \cdot \frac{\gamma \operatorname{sh} \gamma t}{\operatorname{ch} \gamma t - \operatorname{ch} \gamma \xi} (t - \xi) \left[\frac{1}{\lambda + \xi} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(\lambda - t)(1 - \sigma)} \right] \frac{d\sigma}{\sigma}, \quad (535)$$

знаки «плюс» и «минус» соответствуют случаям $\lambda > t$, $\lambda < t$.

Из (535) следует, что при $\lambda > t$ и $\lambda < t$

$$|G(\lambda, t)| \leq M \left(\frac{1}{\lambda + t} \ln \frac{a + \lambda}{a - t} + \frac{1}{\lambda - t} \ln \frac{a - t}{a - \lambda} \right), \quad M = \text{const}, \quad (536)$$

откуда вытекает, что в области $0 < \lambda, t < a$ $G(\lambda, t)$, как функция от λ и t , непрерывна при $\lambda \neq t$, ограничена при $\lambda = t$, $\lambda = +0$, $t = +0$ и удовлетворяет условиям

$$G(\lambda, t) = O \left(\ln \frac{1}{\lambda - a} \right) \quad (\lambda \rightarrow a - 0), \quad G(\lambda, t) = O \left(\ln \frac{1}{a - t} \right) \quad (t \rightarrow a - 0). \quad (537)$$

Равенство

$$U(\lambda) = T(\lambda) + \frac{\sqrt{a^2 - \lambda^2}}{\sqrt{\text{ch } \gamma a - \text{ch } \gamma \lambda}} \frac{1}{\pi^2} \int_0^a U(t) G(\lambda, t) dt, \quad 0 < \lambda, t < a, \quad (538)$$

где

$$T(\lambda) = - \frac{1}{\sqrt{\text{ch } \gamma a - \text{ch } \gamma \lambda}} \frac{d}{d\lambda} \frac{1}{\pi} \int_a^\lambda \tilde{\Psi}(x) \frac{-2x dx}{\sqrt{x^2 - \lambda^2}}, \quad 0 < \lambda < a, \quad (539)$$

или (если функция $\tilde{\Psi}(x)$ непрерывно дифференцируема)

$$T(\lambda) = \frac{\sqrt{a - \lambda}}{\sqrt{\text{ch } \gamma a - \text{ch } \gamma \lambda}} \cdot \frac{2}{\pi} \int_1^0 \tilde{\Psi}'(x) \frac{2\lambda}{\lambda + x} \frac{d\sigma}{\sqrt{\sigma}}, \quad x = \lambda + (a - \lambda)\sigma, \quad (540)$$

представляет собой вполне определенное интегральное уравнение.

Пусть $U(\lambda)$ — решение интегрального уравнения (538). Тогда при выполнении условия

$$H = q \quad (541)$$

$U(\lambda)$ также удовлетворяет уравнению (532). Подставляя $U(\lambda)$ в (526), получаем функцию $F(z)$. Подставляя $f(\xi) = \sqrt{\omega(\xi)} F(\xi)$ в (525) или (528), находим искомое решение задачи (523), (524) при постоянных H и c , определенных равенствами (529), (533), (541).

О НЕКОТОРЫХ ПРИМЕНЕНИЯХ p -АНАЛИТИЧЕСКИХ И (p, q) -АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

На вопрос о том, где можно применять p -аналитические и (p, q) -аналитические функции, можно было бы ответить просто. А именно: p -аналитические и (p, q) -аналитические функции можно применять там, где встречаются и применяются линейные эллиптические системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с двумя неизвестными функциями от двух независимых переменных. Но такой ответ был бы не полным и не оправдывал бы введение p -аналитических и (p, q) -аналитических функций как специальных объектов для изучения. Дело в том, что если бы при помощи этих функций можно было получать только те результаты, которые получаются методами теории дифференциальных уравнений в частных производных, то их незачем было бы вводить. На наш взгляд, важно указать такие применения p -аналитических и (p, q) -аналитических функций, которые становятся возможными благодаря математическому аппарату, построенному для них по аналогии с классической теорией аналитических функций, а также тем качественным свойствам, которые им присущи как функциям комплексного переменного, получающимся при объединении двух вещественных функций двух вещественных переменных в одну комплекснозначную функцию одного комплексного переменного. Именно такие применения p -аналитических и (p, q) -аналитических функций рассматриваются в настоящей главе. При этом исследуется сравнительно неширокий круг вопросов, так как указать все области, в которых возможно применение p -аналитических и (p, q) -аналитических функций, так же трудно, как и перечислить все области, в которых применяется классическая теория аналитических функций.

§ 1. ВАРИАЦИОННО-ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ СРАВНЕНИЯ ПЛОСКОЙ И ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В ОДНОРОДНОЙ И НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДАХ. МЕТОД МАЖОРАНТНЫХ ОБЛАСТЕЙ

Основные интегральные характеристики фильтрационного потока

При решении задач теории фильтрации основной интерес представляет определение таких интегральных характеристик, как расход жидкости, выходные скорости и противодавления. Плоские

фильтрационные потоки в однородной среде описываются аналитическими функциями комплексного переменного, и поэтому вполне естественно, что общие вариационные принципы теории конформных отображений могут быть использованы для получения качественных выводов о поведении указанных выше интегральных характеристик. Так, в работе [117] при помощи выделения главных частей функций, устанавливающих конформное отображение близких областей друг на друга, указан знак вариации выходных скоростей при изменении длин шпунтов в случае плоской фильтрации в однородной среде под плоским флютбетом со шпунтами. В работе [118] при помощи теоремы о движении граничных точек конформно отображаемых областей [119, 120] установлены общие вариационные теоремы сравнения плоской теории фильтрации, указывающие знак вариации интегральных характеристик фильтрационного потока при всевозможных изменениях области, заполненной фильтрующей жидкостью. На основе этого предложен так называемый метод мажорантных областей, позволяющий приближенно (с указанием пределов погрешности) находить основные интегральные характеристики фильтрационного потока посредством решения соответствующих краевых задач для двух вспомогательных областей, для которых это решение известно или находится просто¹.

При помощи установленной нами теоремы о сохранении области для линейных эллиптических систем дифференциальных уравнений [2, 5] (гл. 1, § 7) можно распространить указанные выше общие вариационные теоремы сравнения и метод мажорантных областей на случаи плоской фильтрации в неоднородной среде и пространственной фильтрации с осевой симметрией в однородной и неоднородной средах. В настоящем параграфе приведены результаты в основном в соответствии с нашими работами [5, 19]².

Теоремы сравнения при отсутствии промежутка высачивания

Основные уравнения установившейся пространственной фильтрации в неоднородной изотропной среде в прямоугольной системе координат x, y, z имеют вид³

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad \vec{v} = -\bar{k} \nabla h, \quad h = \frac{P}{\gamma} + y, \quad (1)$$

¹ Частично содержание результатов работы [118] приводится в монографии [121].

² Теоремы, аналогичные вариационным теоремам сравнения, но только для частного случая эллиптической системы уравнений $u_x = \frac{1}{y} v_y, \quad u_y = -\frac{1}{y} v_x$, были установлены одновременно И. Серрином в связи с рассмотрением задач гидромеханики при помощи принципа максимума для решений уравнения $v_{xx} + v_{yy} - \frac{1}{y} v_y = 0$ [122, 123]. Эти результаты были обобщены при помощи теоремы о сохранении области в работе [124].

³ Ось y считается направленной вверх.

где $\vec{v}$ — вектор скорости фильтрации, P — давление, $\bar{k}$ — коэффициент фильтрации, γ — удельный вес жидкости [121]. В плоском и осесимметричном относительно оси y случаях фильтрации функция h удовлетворяет соответственно уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{k} \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{k} \frac{\partial h}{\partial y} \right) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(x \bar{k} \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(x \bar{k} \frac{\partial h}{\partial y} \right) = 0. \quad (3)$$

Полагая ⁴ $z = x + iy$, $\bar{k} = k k_0$, где k_0 — какое-либо постоянное значение коэффициента фильтрации, введем функцию комплексного переменного

$$w = w(z) = u + iv, \quad (4)$$

где $u = -k_0 h$, v — функция, определяющаяся в плоском и осесимметричном случаях соответственно из систем уравнений

$$u_x = \frac{1}{k} v_y, \quad u_y = -\frac{1}{k} v_x, \quad (5)$$

$$u_x = \frac{1}{xk} v_y, \quad u_y = -\frac{1}{xk} v_x. \quad (6)$$

В отличие от u и v , называемых соответственно потенциальной функцией и функцией тока, функцию комплексного переменного $w(z) = u + iv$, определенную равенством (4), будем называть комплексным потенциалом соответствующего фильтрационного потока. Очевидно, что этот комплексный потенциал будет p -аналитической функцией с характеристикой $p = k$ в случае (5) и $p = xk$ — в случае (6).

При помощи комплексного потенциала определяются все элементы движения, связанные с соответствующим фильтрационным потоком. Так, в плоском случае вектор скорости фильтрации $\vec{v}$, давление P ; линии тока и расход жидкости Q , т. е. количество жидкости, проходящей за единицу времени в сторону правой нормали заданной кривой C , определяются соответственно равенствами

$$\left. \begin{aligned} \vec{v} &= k(u_x + iu_y) = -i(v_x + iv_y), \quad P = -\frac{\gamma}{k_0}u - \gamma y, \\ v &= \text{const}, \quad Q = [v]_C. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

В осесимметричном случае вектор скорости фильтрации $\vec{v}$, давление P , линии тока и расход жидкости Q , т. е. количество жидкости, проходящей за единицу времени в сторону правой нормали заданной кривой C через поверхность, образованную вращением ее

⁴ В осесимметричном случае считается $\text{Re } z > 0$.

вокруг оси y , определяются соответственно равенствами

$$\left. \begin{aligned} \vec{v} &= k(u_x + iu_y) = -\frac{i}{x}(v_x + iv_y), \quad P = -\frac{\gamma}{k_0}u - \gamma y, \\ v &= \text{const}, \quad Q = 2\pi[v]_C, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где $[v]_C$, как и в (7), — приращение v вдоль контура C . На потенциальных линиях соответственно в плоском и осесимметричном случаях фильтрации выполняются равенства

$$\vec{v} = e^{i\alpha}k \frac{\partial u}{\partial n} = e^{i\alpha} \frac{\partial v}{\partial s}, \quad (9)$$

$$\vec{v} = e^{i\alpha}k \frac{\partial u}{\partial n} = e^{i\alpha} \frac{1}{x} \frac{\partial v}{\partial s}, \quad (10)$$

где α — угол, составленный с осью x правой нормалью $\vec{n}$ к данной потенциальной линии, s — длина дуги, отсчитываемая в направлении положительного обхода кривой. В этих же случаях на линиях тока соответственно

$$\vec{v} = e^{i\beta}k \frac{\partial u}{\partial s} = -e^{i\beta} \frac{\partial v}{\partial n}, \quad (11)$$

$$\vec{v} = e^{i\beta}k \frac{\partial u}{\partial s} = -e^{i\beta} \frac{1}{x} \frac{\partial v}{\partial n}, \quad (12)$$

где β — угол, составленный с осью x положительным направлением касательной к данной линии тока.

Системы уравнений (5), (6), если предположить, что коэффициент фильтрации, как функция переменных x и y , имеет частные производные, удовлетворяющие условию H , являются такими эллиптическими системами, для которых установлена теорема о сохранении области (гл. 1, § 7). Отсюда следует, что всякой области фильтрации в плоскости $z = x + iy$ соответствует в плоскости комплексного потенциала некоторая область — годограф комплексного потенциала.

Пусть в дальнейшем G — произвольная односвязная область фильтрации в плоскости $z = x + iy$ (в осесимметричном случае лежащая в полуплоскости $\text{Re } z > 0$), ограниченная кусочно-гладкой кривой L , причем замкнутая область $G + L$ в отличие от G может содержать бесконечно удаленную точку, T — годограф комплексного потенциала $w = u + iv$. Далее, пусть G_1 — область фильтрации, получающаяся из G при вариации ее границы, такая, что $G_1 \subset G$, g_1 — образ G в плоскости w , $w_1 = u_1 + iv_1$ — комплексный потенциал, соответствующий области фильтрации G_1 , T_1 — годограф комплексного потенциала w_1 , индекс «1» у всех величин указывает на то, что они соответствуют области фильтрации G_1 .

Введем функцию комплексного переменного

$$\omega = \omega(z) = w_1 - w = \sigma + i\tau.$$

Будем называть ее вариацией комплексного потенциала. Вариация комплексного потенциала, как функция от $z = x + iy$, удовлетво-

рывает в области G_1 той же системе дифференциальных уравнений, что и комплексный потенциал. Если же вариацию комплексного потенциала рассматривать как функцию от $w = u + iv$, то в области g_1 она будет удовлетворять системе уравнений

$$\frac{\partial u_1}{\partial u} = \frac{\partial v_1}{\partial v}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial v} = -\frac{1}{p^2} \frac{\partial v_1}{\partial u}, \quad (13)$$

где $p = k$ в плоском и $p = kh$ в осесимметричном случаях. Следовательно, по теореме о сохранении области образом области G_1 , или, что то же самое, образом области g_1 , в плоскости $\omega = \sigma + i\tau$ является некоторая область Ω — годограф вариации комплексного потенциала.

Вдоль линий, являющихся одновременно линиями тока для начального и измененного фильтрационного потоков, в соответствии с (11) и (12)

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{1}{k} (\vec{v}_1 - \vec{v}) e^{-i\beta}. \quad (14)$$

Вдоль общих для обоих потоков потенциальных линий на основании (9) и (10) в плоском и осесимметричном случаях фильтрации соответственно

$$\frac{d\tau}{ds} = (\vec{v}_1 - \vec{v}) e^{-i\alpha}, \quad (15)$$

$$\frac{d\tau}{ds} = x (\vec{v}_1 - \vec{v}) e^{-i\alpha}. \quad (16)$$

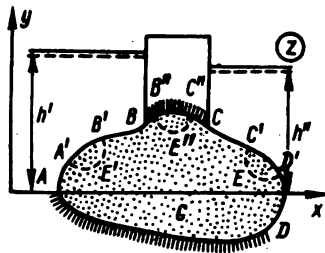


Рис. 25.

При изучении зависимости указанных выше основных интегральных характеристик теории фильтрации (расхода жидкости, выходных скоростей и противодавлений) в отсутствие промежутка высачивания от изменения области фильтрации G представляют интерес несколько возможных общих случаев краевых условий.

1. *Область фильтрации, ограниченная двумя потенциальными линиями и двумя линиями тока.* Схема такой области фильтрации представлена на рис. 25. Краевые условия имеют вид

$$\left. \begin{aligned} u|_{AB} &= -k_0 h' = \text{const}, \quad u|_{CD} = -k_0 h'' = \text{const}, \\ v|_{BC} &= \text{const}, \quad v|_{DA} = \text{const}, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

где h' и h'' — значения приведенного напора $h = \frac{p}{\gamma} + y$ на потенциальных линиях AB и CD .

Годограф T в плоскости комплексного потенциала $w = u + iv$ при $h' > h''$ с точностью до преобразования переноса представлен на рис. 26. Если $h' < h''$, годограф T получается из предыдущего при помощи поворота на угол, равный π . Это значит, что годограф T в обоих случаях представляет собой прямоугольник, высота которого

⁵ В осесимметричном случае фильтрации допускается вырождение одной из потенциальных линий в точку, лежащую на бесконечности, однако такая «вырожденная» потенциальная линия считается неизменной при переходе от одной области фильтрации к другой.

в соответствии с равенствами (7) и (8) равна расходу жидкости Q в случае плоской фильтрации и расходу жидкости Q , деленному на 2π , в случае осесимметричной фильтрации, длина основания равна $|H|$ ($H = h' - h''$).

Потенциальную линию с большим приведенным давлением условимся называть линией наибольшего напора, а потенциальную линию с меньшим приведенным давлением — линией наименьшего напора. Через L' обозначим совокупность потенциальных линий, входящих в состав L границы области G , L_1 — то же самое в применении к области G_1 , $L_1' L'$ — общая часть L_1 и L' . При установлении соответствия между точками плоскостей ω и ω' точки в плоскости ω будем обозначать теми же буквами, что и в плоскости ω' , но с индексом 2.

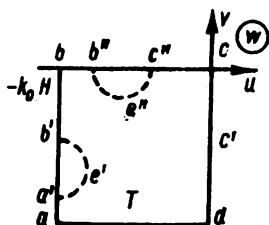


Рис. 26.

Пусть в дальнейшем величины h' и h'' остаются неизменными.

При изменении области фильтрации G вследствие смещения какой-либо из точек A, B, C, D , т. е. при неизменной области G , но переменных точках раздела граничных потенциальных линий и линий тока, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. При уменьшении потенциальной линии ⁶ а) расход жидкости Q уменьшается, б) давление P в $G_1 + L_1 - L_1'$ увеличивается, если уменьшается линия наименьшего напора, и уменьшается, если уменьшается линия наибольшего напора, в) вектор скорости $\vec{v}$ увеличивается на неизменной части уменьшаемой потенциальной линии и вблизи ее конца на неизменной линии тока и уменьшается на неизменной части увеличиваемой линии тока, на неизменной потенциальной линии и вблизи ее конца на неизменной линии тока ⁷.

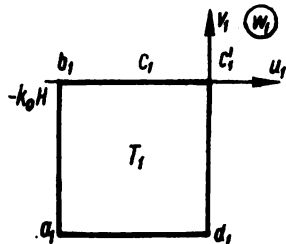


Рис. 27.

В самом деле, так как случай $h' < h''$ приводится к случаю $h' > h''$ простым поворотом годографа T на угол π , достаточно доказать теорему при $h' > h''$. Пусть уменьшение потенциальной линии CD , т. е. линии наименьшего напора, происходит вследствие смещения точки C в положение C' (см. рис. 25), a, b, c, d, c' — образы точек A, B, C, D, C' в плоскости комплексного потенциала $\omega = u + iv$

⁶ Под уменьшением той или иной линии понимается замена ее линией, полученной отбрасыванием какой-либо линии, являющейся ее частью, под увеличением линии — получение из нее линии с помощью присоединения к ней какой-либо другой линии.

⁷ Уменьшение вектора скорости на «вырожденной» потенциальной линии понимается как сохранение его величины, равной нулю.

(см. рис. 26). Годограф T_1 измененного комплексного потенциала $w_1 = u_1 + iv_1$ для рассматриваемого случая будет иметь вид, показанный на рис. 27.

Из частично известных контурных условий для вариации комплексного потенциала заключаем, что в плоскости $\omega = \sigma + it$ образы AB и DC' находятся на мнимой оси, образ BC — на вещественной оси, образ AD — на прямой, параллельной вещественной оси, образ CC' — кривая во второй четверти плоскости, монотонная по σ и τ . Область Ω , удовлетворяющая всем этим условиям с точностью до топологических преобразований, не нарушающих эти условия, представлена на рис. 28. Из рассмотрения годографа Ω непосредственно следует $Q_1 < Q$ и $u_1 \leq u$, $P_1 \geq P$ в замкнутой области $G_1 + L_1$, причем знак равенства достигается только на потенциальных линиях, входящих в состав границы области фильтрации G_1 . Далее,

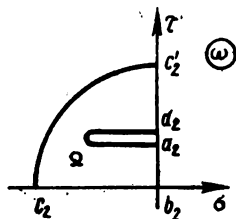


Рис. 28.

$$\left. \frac{d\sigma}{ds} \right|_{BC} < 0, \quad \left. \frac{d\tau}{ds} \right|_{AB} < 0, \quad \left. \frac{d\tau}{ds} \right|_{DC'} > 0, \\ \left. \frac{d\sigma}{ds} \right|_{AD} < 0 \text{ вблизи } A, \quad \left. \frac{d\sigma}{ds} \right| > 0 \text{ вблизи } D.$$

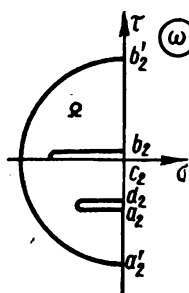
Эти неравенства в силу формул (14) — (16) означают, что вектор скорости $\vec{v}$ на BC и AB уменьшается, на DC' увеличивается, а на линии AD увеличивается вблизи точки D и уменьшается вблизи точки A . Теорема для случая смещения точки C доказана. Точно так же убеждаемся в справедливости теоремы в общем случае.

При уменьшении области фильтрации G вследствие произвольных вдавливаниях одной из потенциальных линий или одной из линий тока, но при неизменных точках их раздела A, B, C, D справедливы следующие теоремы.

Теорема 2. При вдавливании потенциальной линии а) расход жидкости Q увеличивается, б) давление P в $G_1 + L_1 - L_1' L'$ увеличивается, если вдавливается линия наибольшего напора, и уменьшается, если вдавливается линия наименьшего напора, в) вектор скорости $\vec{v}$ увеличивается на неизменной потенциальной линии и вблизи ее концов на линиях тока и уменьшается на неизменной части сдавливаемой потенциальной линии и вблизи ее концов на линиях тока.

Теорема 3. При вдавливании линии тока а) расход жидкости Q уменьшается, б) давление P увеличивается на неизменной части вдавливаемой линии тока со стороны линии наибольшего напора и уменьшается на неизменной части ее со стороны линии наименьшего напора, в) вектор скорости $\vec{v}$ уменьшается на неизменной части вдавливаемой линии тока и на одной из потенциальных линий, а на другой потенциальной линии уменьшается расход жидкости через всякую связанную ее часть, имеющую общий конец с вдавливаемой линией тока.

Для доказательства теорем 2 и 3 достаточно рассмотреть случай $h' > h''$. Пусть вдавливается линия $A'B'$, т. е. часть линии наибольшего напора (см. рис. 25). Область g_1 в плоскости ω в этом случае представляет собой область, ограниченную контуром $aa'e'b'bcda$ (см. рис. 26). В плоскости вариации комплексного потенциала $\omega = \sigma + i\tau$ образы AA' , $B'B$ и CD находятся на мнимой оси, образ BC — на вещественной оси, образ AD — на прямой, параллельной вещественной оси, образ $A'E'B'$ — в левой полуплоскости. Годограф Ω в плоскости $\omega = \sigma + i\tau$ с точностью до топологических преобразований, удовлетворяющих этим условиям, имеет вид, показанный на рис. 29. Рассматривая годограф Ω , приходим к неравенствам



$$Q_1 > Q, P_1 > P \text{ в } G_1 + L_1 - L'_1 L',$$

$$\left. \frac{d\tau}{ds} \right|_{AA'} < 0, \quad \left. \frac{d\tau}{ds} \right|_{DC} > 0, \quad \left. \frac{d\tau}{ds} \right|_{B'B} < 0,$$

$$\left. \frac{d\sigma}{ds} \right|_{AD} < 0 \text{ вблизи } A, \quad \left. \frac{d\sigma}{ds} \right|_{AD} > 0 \text{ вблизи } D,$$

$$\left. \frac{d\sigma}{ds} \right|_{BC} < 0 \text{ вблизи } B, \quad \left. \frac{d\sigma}{ds} \right|_{BC} > 0 \text{ вблизи } C,$$

Рис. 29.

которые согласно формулам (14) — (16) означают справедливость теоремы 2 для случая вдавливания потенциальной линии AB . В силу таких же выкладок теорема 2 справедлива и для случая вдавливания потенциальной линии DC .

Пусть теперь вдавливается линия $B''C''$, т. е. часть линии тока BC (см. рис. 25). Область g_1 является областью в плоскости ω , ограниченной контуром $abb''e''c''cda$ (см. рис. 26). В плоскости $\omega = \sigma + i\tau$ образы AB и CD находятся на мнимой оси, образы BB'' и $C''C$ — на вещественной оси, AD — на прямой, параллельной вещественной оси, образ $B''E''C''$ — в верхней полуплоскости. Годограф Ω , удовлетворяющий всем этим требованиям, представлен на рис. 30. Существенно, что сдвоенный отрезок $a_2 d_2$ может оказаться целиком лежащим или в правой, или в левой полуплоскости. Из указанного годографа Ω следуют неравенства

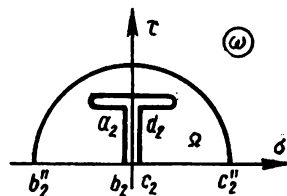


Рис. 30.

$$Q_1 < Q, P_1 > P \text{ на } BB'', P_1 < P \text{ на } C''C,$$

$$\left. \frac{d\sigma}{ds} \right|_{BB''} < 0, \quad \left. \frac{d\sigma}{ds} \right|_{C''C} < 0.$$

Далее,

$$\left. \frac{d\tau}{ds} \right|_{AB} < 0 \text{ или } \left. \frac{d\tau}{ds} \right|_{DC} < 0.$$

Эти неравенства, как и в предыдущем случае, означают справедливость теоремы 3 при вдавливании тока BC . В силу таких же выкладок теорема 3 справедлива и в общем случае.

2. Область фильтрации, ограниченная двумя потенциальными линиями и одной линией тока. Схема такой области фильтрации представлена на рис. 25, если считать, что точка D совпадает с точкой A , обычно лежащей на бесконечности. Контурные условия имеют вид

$$u|_{AB} = -k_0 h' = \text{const}, \quad u|_{AC} = -k_0 h'' = \text{const}, \quad v|_{BC} = \text{const}, \quad (18)$$

где h' , h'' , $H = h' - h''$, $Q = \infty$ — то же самое, что и ранее. Годограф T при $h' > h''$ имеет вид полуполосы, указанной на рис. 31. При $h' < h''$ годограф T получается из предыдущего поворотом на угол π .

Пусть в дальнейшем, как и ранее, величины h' и h'' остаются неизменными. Тогда при изменении области фильтрации G вследствие смещения какой-либо из точек A , B , C , т. е. при неизменной области G , но переменных точках раздела граничных потенциальных линий и линий тока, справедлива следующая теорема.

Теорема 1'. При уменьшении потенциальной линии а) давление P в $G_1 + L_1 - L_1' L'$ увеличивается, если уменьшается линия наименьшего напора, и уменьшается, если уменьшается линия наибольшего напора, б) вектор скорости $\vec{v}$ при неизменной точке раздела потенциальных линий увеличивается на неизменной части уменьшаемой потенциальной линии и уменьшается на неизменной части линии тока и на неизменной потенциальной линии, при неизменной линии тока увеличивается на неизменной части уменьшаемой потенциальной линии и вблизи ее конца на линии тока, уменьшается на неизменной части увеличиваемой потенциальной линии и вблизи ее конца на линии тока.

В самом деле, не нарушая общности, достаточно рассмотреть случай $h' > h''$. Пусть уменьшается потенциальная линия AB вследствие смещения точки B в положение B' (см. рис. 25). В плоскости $\omega = \sigma + i\tau$ образы AB' и AC находятся на мнимой оси, образ BC — на вещественной оси, образ $B'B$ — кривая в первой четверти плоскости, монотонная по σ и τ . Из рассмотрения годографа Ω следует, что $u_1 \geq u$, $P_1 < P$ в $G_1 + L_1$, причем знак равенства достигается только на потенциальных линиях, входящих в границу области G_1 . Из неравенств

$$\left. \frac{d\sigma}{ds} \right|_{BC} < 0, \quad \left. \frac{d\tau}{ds} \right|_{AC} < 0, \quad \left. \frac{d\tau}{ds} \right|_{AB'} > 0$$

вытекает, что вектор скорости $\vec{v}$ на BC и AC уменьшается, на AB' — увеличивается.

Пусть теперь потенциальная линия AB уменьшается вследствие смещения точки A в положение A' (см. рис. 25). В плоскости $\omega = \sigma + i\tau$ образы AC и $A'B$ находятся на мнимой оси, образ AA' — на вертикальной прямой $\sigma = k_0 H$, образ BC — на вещественной

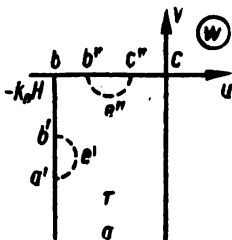


Рис. 31.

оси. Из свойств годографа Ω следуют неравенства $u_1 > u'_1$, $P_1 < P$ в $G_1 + L_1 - L'_1 L'$,

$$\left. \frac{d\tau}{ds} \right|_{AC} < 0, \quad \left. \frac{d\tau}{ds} \right|_{A'B} > 0,$$

$$\left. \frac{d\sigma}{ds} \right|_{BC} > 0 \text{ вблизи } B, \quad \left. \frac{d\sigma}{ds} \right|_{BC} < 0 \text{ вблизи } C.$$

Отсюда на основании (14) — (16) вытекает, что вектор скорости $\vec{v}$ на AC уменьшается, на $A'B$ — увеличивается, на линии тока BC вблизи точки B — увеличивается, вблизи точки C — уменьшается. Этим теорема при уменьшении потенциальной линии доказана. Такие же выкладки приводят к справедливости теоремы в общем случае.

При уменьшении области фильтрации G вследствие произвольных вдавливаниях потенциальных линий и линии тока, но при неизменных точках их раздела A, B, C справедливы следующие теоремы.

Теорема 2'. При вдавливании потенциальной линии а) давление P в $G_1 + L_1 - L'_1 L'$ увеличивается, если вдавливается линия наибольшего напора, и уменьшается, если вдавливается линия наименьшего напора, б) вектор скорости $\vec{v}$ увеличивается на неизменной потенциальной линии и вблизи ее конца на линии тока и уменьшается на неизменной части вдавливаемой потенциальной линии и вблизи ее конца на линии тока.

Теорема 3'. При вдавливании линии тока а) давление P увеличивается на неизменной части линии тока со стороны линии наибольшего напора и уменьшается на неизменной части ее со стороны линии наименьшего напора, б) вектор скорости $\vec{v}$ уменьшается на неизменной части линии тока и на одной из потенциальных линий, а на другой потенциальной линии уменьшается расход жидкости через всякую связную ее часть, имеющую общий конец с линией тока.

Для доказательства теорем 2' и 3' достаточно рассмотреть случай $h' > h''$. Пусть вдавливается линия $A'B'$, т. е. часть линии наибольшего напора (см. рис. 25). Областью g_1 является область в плоскости ω , ограниченная контуром $aa'e'b'бса$ (см. рис. 31). В плоскости ω образы AA' , $B'B$ и AC находятся на мнимой оси, образ BC — на вещественной оси, образ $A'E'B'$ — в левой полуплоскости. Из установленного вида годографа Ω следуют неравенства

$$u_1 < u, \quad P_1 > P \text{ в } G_1 + L_1 - L'_1 L',$$

$$\left. \frac{d\tau}{ds} \right|_{AA'} < 0, \quad \left. \frac{d\tau}{ds} \right|_{B'B} < 0, \quad \left. \frac{d\tau}{ds} \right|_{AC} > 0,$$

$$\left. \frac{d\sigma}{ds} \right|_{BC} < 0 \text{ вблизи } B, \quad \left. \frac{d\sigma}{ds} \right|_{BC} > 0 \text{ вблизи } C,$$

означающие справедливость теоремы 2' при вдавливании потенциальной линии AB . То же самое справедливо при вдавливании потенциальной линии AC .

Пусть теперь вдавливается линия $B''C''$, т. е. часть линии тока BC (см. рис. 25). Область g_1 в плоскости ω ограничена контуром $abb''e''c''ca$ (см. рис. 31). В плоскости ω образы AB и AC находятся на мнимой оси, образы BB'' и CC'' — на вещественной оси, образ $B''E''C''$ — в верхней полуплоскости. Из рассмотрения годографа Ω следуют неравенства

$$u_1 < u, P_1 > P \text{ на } BB'', u_1 > u, P_1 < P \text{ на } C''C,$$

$$\left. \frac{d\sigma}{ds} \right|_{BB''} < 0, \left. \frac{d\sigma}{ds} \right|_{C''C} < 0,$$

$$\left. \frac{d\tau}{ds} \right|_{AB} < 0 \text{ вблизи } B, \left. \frac{d\tau}{ds} \right|_{AC} < 0 \text{ вблизи } C,$$

из которых, как и в предыдущих случаях, вытекает справедливость теоремы 3'.

3. Область фильтрации, ограниченная двумя линиями тока и одной потенциальной линией. Схема такой области фильтрации представлена на рис. 25, если считать точку B совпадающей с точкой A , лежащей обычно на бесконечности. Контурные условия имеют вид

$$\left. \begin{aligned} u|_A = \mp \infty, u|_{CD} = -k_0 h'' = \text{const}, \\ v|_{AC} = \text{const}, v|_{AD} = \text{const}, \end{aligned} \right\} (19)$$

где $h' = \pm \infty$, h'' — то же самое, что и ранее. Годограф T при $h' = +\infty$ имеет вид полуполосы, изображенной на рис. 32, при $h' = -\infty$ он получается при помощи поворота на угол π .

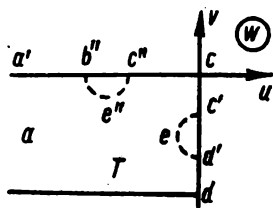


Рис. 32.

Пусть в дальнейшем Q и h'' остаются неизменными. Тогда при изменении области фильтрации G вследствие смещений точек A, B, C вдоль границы справедлива следующая теорема.

Теорема 1'. При уменьшении потенциальной линии а) давление P в $G_1 + L_1 - L_1'$ увеличивается, если $h' = +\infty$, и уменьшается, если $h' = -\infty$, б) вектор скорости $\vec{v}$ увеличивается на неизменной части потенциальной линии и на неизменной линии тока и уменьшается на неизменной части увеличиваемой линии тока. При смещении точки раздела линий тока а) давление P , если $h' = +\infty$, увеличивается на неизменной части уменьшаемой линии тока и уменьшается на неизменной части увеличиваемой линии тока, а если $h' = -\infty$, в первом случае уменьшается, во втором — увеличивается, б) вектор скорости $\vec{v}$ увеличивается на неизменной части уменьшаемой линии тока и вблизи ее конца на потенциальной линии и уменьшается на неизменной части увеличиваемой линии тока и вблизи ее конца на потенциальной линии.

Для доказательства теоремы достаточно рассмотреть случай $h' = +\infty$. Пусть уменьшается потенциальная линия вследствие смещения точки C в положение C' (см. рис. 25). В этом случае в плоскости ω образы AD и AC находятся на вещественной оси, образ

DC' — на мнимой оси, образ CC' — кривая во второй четверти плоскости, монотонная по σ и τ . Из вида годографа Ω следует

$$u_1 < u, P_1 > P \text{ в } G_1 + L_1 - L'_1, \\ \left. \frac{d\tau}{ds} \right|_{DC'} > 0, \left. \frac{d\sigma}{ds} \right|_{AD} > 0, \left. \frac{d\sigma}{ds} \right|_{AC} < 0.$$

При помощи аналогичных неравенств, соответствующих смещению точки D , убеждаемся в справедливости первой части теоремы.

Пусть теперь точка A смещается в положение A' (см. рис. 25). В плоскости ω образы AD и $A'C$ находятся на вещественной оси, образ AA' — на прямой, параллельной вещественной оси в нижней полуплоскости, образ CD — на мнимой оси. Учитывая это, так же как и в предыдущем случае, убеждаемся в справедливости второй части теоремы.

При изменении области фильтрации G вследствие произвольных вдавливаний линий тока и потенциальной линии, но при неизменных точках из раздела A, B, C справедливы такие теоремы.

Теорема 2". При вдавливании потенциальной линии а) давление P в $G_1 + L_1 - L'_1$ увеличивается, если $h' = -\infty$, и уменьшается, если $h' = +\infty$, б) вектор скорости $\vec{v}$ уменьшается на неизменной части потенциальной линии и на одной из линий тока, а на другой линии тока уменьшается вблизи ее конца, примыкающего к потенциальной линии.

Теорема 3". При вдавливании линии тока а) давление P , если $h' = +\infty$, увеличивается на неизменной линии тока и на примыкающей к ней неизменной части вдавливаемой линии тока и уменьшается на неизменной части вдавливаемой линии тока, примыкающей к потенциальной линии, а если $h' = -\infty$, в первом случае уменьшается, во втором — увеличивается, б) вектор скорости $\vec{v}$ увеличивается на неизменной линии тока и вблизи ее конца на потенциальной линии и уменьшается на неизменной части вдавливаемой линии тока и вблизи ее конца на потенциальной линии.

Для доказательства теорем 2" и 3" достаточно рассмотреть случай $h' = +\infty$. Годограф T_1 имеет вид, указанный на рис. 32, т. е. такой же, как и годограф T в плоскости ω . Пусть вдавливается часть потенциальной линии CD' (см. рис. 25). Область g_1 в плоскости ω ограничена контуром $add'ec'sa$ (см. рис. 32). В плоскости ω образы AD и AC находятся на вещественной оси, образы CC' и DD' — на мнимой оси, образ $D'EC'$ — в правой полуплоскости. Построив, исходя из этих данных, годограф Ω , так же как и в предыдущих случаях, приходим к утверждениям теоремы 2".

Пусть теперь вдавливается часть линии тока $B"C"$ (см. рис. 25). Область g_1 в плоскости ω ограничена контуром $adcc''e''b''a$ (см. рис. 32). В плоскости ω образы DA , AB'' и $C"C$ находятся на вещественной оси, образ CD — на мнимой оси и образ $B"E"C"$ — в верхней полуплоскости. Построив годограф Ω с учетом, что мнимая часть ω ограничена, приходим к доказательству теоремы 3".

Теоремы сравнения при наличии промежутка высачивания

Установим характер изменения основных фильтрационных характеристик для области фильтрации, содержащей в своей границе промежуток высачивания, при замене ее какой-либо из областей, рассмотренных в предыдущем параграфе.

1. Область фильтрации, ограниченная двумя потенциальными линиями, двумя линиями тока и промежутком высачивания. Схема

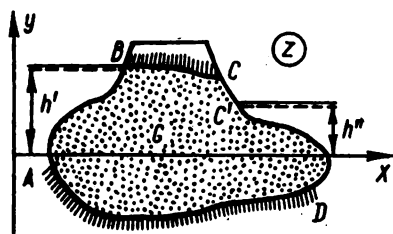


Рис. 33.

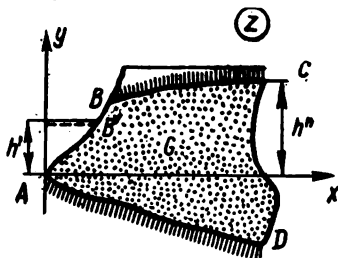


Рис. 34.

такой области фильтрации представлена на рис. 33 и 34. Контурные условия в каждом из указанных на рисунках случаев соответственно имеют вид

$$\left. \begin{aligned} u|_{AB} &= -k_0 h' = \text{const}, \quad u|_{DC} = -k_0 h'' = \text{const}, \\ u|_{CC'} &= -k_0 y > -k_0 h', \\ v|_{BC} &= \text{const}, \quad v|_{AD} = \text{const}, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$\left. \begin{aligned} u|_{AB'} &= -k_0 h' = \text{const}, \quad u|_{DC} = -k_0 h'' = \text{const}, \\ u|_{B'B} &= -k_0 y > -k_0 h'', \\ v|_{BC} &= \text{const}, \quad v|_{AD} = \text{const}, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

где h' , h'' и $H = h' - h''$ — то же самое, что и выше, причем в первом случае $h' > h''$, а во втором⁸ — $h' < h''$.

Пусть величины h' и h'' остаются неизменными. Тогда справедливы следующие теоремы.

Теорема 4. При замене промежутка высачивания линией тока а) расход жидкости Q уменьшается, б) давление P в $G_1 + L_1 - L_1$ увеличивается, в) вектор скорости $\vec{v}$ увеличивается на потенциальной линии, примыкающей к промежутку высачивания, и вблизи ее конца на неизменной линии тока и уменьшается на неизменной части увеличиваемой линии тока, на потенциальной линии, примыкающей к ней, и вблизи конца последней на неизменной линии тока.

Теорема 5. При замене промежутка высачивания потенциальной линией а) расход жидкости Q увеличивается, б) давление P в $G_1 +$

⁸ В осесимметричной фильтрации в случае контурных условий (21) допускается вырождение линии наибольшего напора в точку, лежащую на бесконечности.

+ $L_1 - L'_1 L'$ уменьшается, в) вектор скоростей $\vec{v}$ уменьшается на неизменной части увеличиваемой потенциальной линии и вблизи ее конца на примыкающей к ней линии тока и увеличивается на линии тока, примыкающей к промежутку высачивания, на неизменной потенциальной линии и вблизи ее конца на другой линии тока.

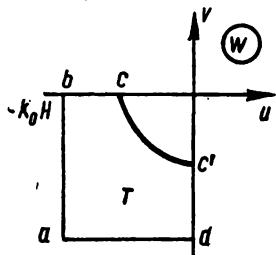


Рис. 35.

Для доказательства теорем 4 и 5 достаточно рассмотреть случай $h' > h''$. В условиях обеих теорем годограф T имеет вид, представленный на рис. 35. В условиях теоремы 4 в плоскости ω образы AB и DC' находятся на мнимой оси, образ BC — на вещественной оси, образ AD — на прямой, параллельной вещественной оси, образ CC' — в верхней полуплоскости. Годограф Ω имеет вид, указанный на рис. 36. Существенно, что точка c_2 должна иметь наибольшую ординату из всех точек линии $c_2 c'_2$, так как расход жидкости

через весь промежуток высачивания больше, чем через его часть. Учитывая это, сразу же при помощи годографа Ω приходим к утверждениям теоремы 4. В условиях теоремы 5 в плоскости ω образы AB и DC' находятся на мнимой оси, образ BC — на вещественной оси, образ AD — на прямой, параллельной вещественной оси, образ CC' — в правой полуплоскости. Точка c_2 имеет наибольшую абсциссу по сравнению со всеми точками отрезка $[b_2 c_2]$ ⁹ (рис. 37). В остальном утверждения теоремы 5 вытекают из рассмотрения годографа Ω , как и в предыдущих случаях.

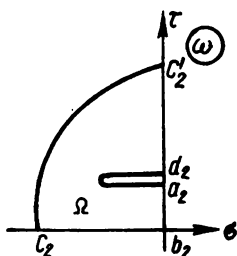


Рис. 36.

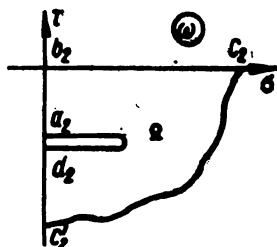


Рис. 37.

Замечание. Теоремы 4 и 5 в соответствии с теоремой 1 означают, что расход жидкости Q , давление P и вектор скорости $\vec{v}$ изменяются при замене промежутка высачивания линией тока так же, как и при замене линией тока потенциальной линии, а при замене его потен-

⁹ Предполагается, что ордината промежутка высачивания CC' изменяется монотонно. Если бы это было не так, то все утверждения теоремы 5 оставались бы неизменными, только вектор скорости $\vec{v}$ увеличивался бы не на всей линии тока BC , а вблизи точки B .

циальной линией — так же, как и при замене линии тока потенциальной линией.

2. Область фильтрации, ограниченная двумя потенциальными линиями, линией тока и промежутком высачивания. Схемы такой области фильтрации представлены на рис. 33 и 34, если считать точку D совпадающей с точкой A . Контурные условия соответственно имеют вид

$$\left. \begin{aligned} u|_{AB} &= -k_0 h' = \text{const}, \quad u|_{AC'} = -k_0 h'' = \text{const}, \\ u|_{C'C} &= -k_0 y > -k_0 h', \\ v|_{BC} &= \text{const}, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

$$\left. \begin{aligned} u|_{AB'} &= -k_0 h' = \text{const}, \quad u|_{AC} = -k_0 h'' = \text{const}, \\ u|_{B'B} &= -k_0 y > -k_0 h'', \\ v|_{BC} &= \text{const}, \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

где h' , h'' и $Q = \infty$ — то же самое, что и ранее, причем в первом случае считается $H = h' - h'' > 0$, а во втором $H < 0$.

Пусть величины h' и h'' остаются неизменными. Тогда справедливы такие теоремы.

Теорема 4'. При замене промежутка высачивания линией тока

а) давление P в $G_1 + L_1 - L_1'$ увеличивается, б) вектор скорости $\vec{v}$ увеличивается на потенциальной линии, примыкающей к промежутку высачивания, и уменьшается на неизменной части линии тока и на потенциальной линии, примыкающей к ней.

Теорема 5'. При замене промежутка высачивания потенциальной линией а) давление P в $G_1 + L_1 - L_1 L_1'$ уменьшается,

б) вектор скорости $\vec{v}$ уменьшается на неизменной части увеличиваемой потенциальной линии и увеличивается на линии тока и на потенциальной линии, примыкающей к ней.

В самом деле, при $h' > h''$ в условиях теорем 4' и 5' годограф T имеет вид, указанный на рис. 38. В условиях теоремы 4' в плоскости ω образы AB и AC' находятся на мнимой оси, образ BC — на вещественной оси, образ $C'C$ — в верхней полуплоскости. Из вида годографа Ω и неравенств

$$\left. \frac{d\sigma}{ds} \right|_{BC} < 0, \quad \left. \frac{d\tau}{ds} \right|_{AB} < 0, \quad \left. \frac{d\tau}{ds} \right|_{AC'} < 0$$

следует справедливость теоремы 4' при $h' > h''$. Так же устанавливаем справедливость ее при $h' < h''$.

В условиях теоремы 5' при $h' > h''$ в плоскости ω образы AB и AC' находятся на мнимой оси, BC — на вещественной оси, $C'C$ — в правой полуплоскости. Годограф Ω имеет вид, указанный на

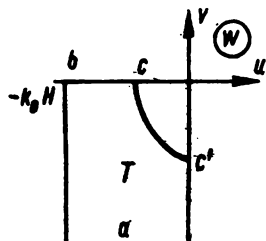


Рис. 38.

рис. 39. Существенно, что точка c_3 имеет наибольшую абсциссу из всех точек линии b_2c_2 ¹⁰. Рассматривая годограф Ω , убеждаемся в справедливости теоремы 5' при $h' > h''$. Так же эти утверждения устанавливаются при $h' < h''$.

Замечание. В соответствии с теоремой 1' теоремы 4' и 5' означают, что давление P и вектор скорости $\vec{v}$ изменяются при замене

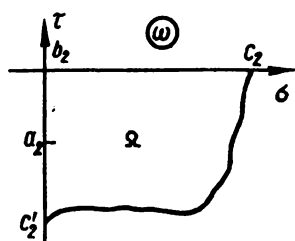


Рис. 39.

промежутка высачивания линией тока так же, как и при замене линией тока потенциальной линии, а при замене его потенциальной линией — так же, как при замене линии тока потенциальной линией.

3. Область фильтрации, ограниченная двумя линиями тока, потенциальной линией и промежутком высачивания. Схема такой области фильтрации представлена на рис. 33, если считать точку

B совпадающей с точкой A , а также на рис. 34, если считать точку D совпадающей с точкой C . Контурные условия в каждом из указанных случаев следующие:

$$\left. \begin{aligned} u|_{DC'} = -k_0 h'' = \text{const}, \quad u|_{C'C} = -k_0 y, \quad u|_A = -\infty, \\ v|_{AC} = \text{const}, \quad v|_{AD} = \text{const}, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

$$\left. \begin{aligned} u|_{AB'} = -k_0 h' = \text{const}, \quad u|_{B'B} = -k_0 y, \quad u|_A = -\infty, \\ v|_{AC} = \text{const}, \quad v|_{BC} = \text{const}, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

где h' и h'' — то же, что и ранее.

Пусть в дальнейшем расход жидкости Q и напор жидкости на потенциальной линии остаются неизменными. Тогда справедливы такие теоремы.

Теорема 4". При замене промежутка высачивания линией тока

а) давление P в $G_1 + L_1 - L_1'$ уменьшается, б) вектор скорости $\vec{v}$ увеличивается на потенциальной линии и на неизменной линии тока и уменьшается на неизменной части увеличиваемой линии тока.

Теорема 5". При замене промежутка высачивания потенциальной линией а) давление P в $G_1 + L_1 - L_1' L'$ уменьшается, б) вектор скорости $\vec{v}$ уменьшается на неизменной части потенциальной линии и на линии тока, примыкающей к ней, и увеличивается на линии тока, примыкающей к промежутку высачивания.

Для доказательства теорем 4" и 5" достаточно рассмотреть контурные условия (24). Годограф T в условиях обеих теорем имеет вид, указанный на рис. 40. В условиях теоремы 4" в плоскости ω образы AC и AD находятся на вещественной оси, образ DC' — на

¹⁰ Предполагается, что ордината промежутка высачивания изменяется монотонно. Если бы это было не так, то вектор скорости увеличивался бы на линии тока вблизи ее конца, примыкающего к неизменной потенциальной линии.

мнимой оси, образ $C'C$ — в верхней полуплоскости. Точка c_2 (образ точки C' в плоскости ω) имеет наибольшую ординату из всех точек, соответствующих промежутку высачивания. Учитывая, что годограф Ω должен удовлетворять всем этим условиям, приходим к утверждениям теоремы 4".

В случае теоремы 5" в плоскости ω образы AD и AC находятся на вещественной оси, образ DC' — на мнимой оси, образ $C'C$ — в правой полуплоскости. И если предположить, что ордината промежутка высачивания изменяется монотонно¹¹, то точка c_2 (образ точки C в плоскости ω) будет иметь наибольшую абсциссу из всех точек границы Ω . Учитывая это, так же как и в предыдущем случае, убеждаемся в справедливости теоремы 5".

Замечание. Теоремы 4" и 5" в соответствии с теоремой 1', в частности, означают, что дав-

ление P и вектор скорости $\vec{v}$ при замене промежутка высачивания линией тока изменяются так же, как и при замене потенциальной линии линией тока, а при замене его потенциальной линией — так же, как и при замене линии тока потенциальной линией.

Следует указать, что изложенный метод применим также для установления поведения основных фильтрационных характеристик плоской и осесимметричной фильтрации в однородной и неоднородной средах при самых разнообразных граничных условиях. Выше рассмотрены граничные условия, наиболее типичные для задач плоской и пространственной фильтрации с осевой симметрией при произвольной области, заполненной фильтрующей жидкостью.

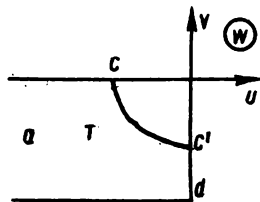


Рис. 40.

Метод мажорантных областей в плоской и осесимметричной фильтрации в однородной и неоднородной средах

Доказанные выше теоремы сравнения позволяют без каких-либо изменений распространить на случай плоской фильтрации в неоднородной среде и случай пространственной фильтрации с осевой симметрией в однородной и неоднородной средах метод мажорантных областей, впервые предложенный в работе [100] (в применении к плоской фильтрации в однородной среде). Для того чтобы определить ту или иную интегральную характеристику фильтрационного потока при заданной или приближенно известной области фильтрации G , необходимо в соответствии с доказанными теоремами сравнения построить фильтрационные потоки во вспомогательных об-

¹¹ Без этого предположения о поведении вектора скорости $\vec{v}$ на AD и AC можно лишь утверждать, что он уменьшается на AD вблизи точки D . Остальные утверждения теоремы 5" остаются неизменными.

лостях — мажорантных по данной интегральной характеристике — G^0 и G_0 так, чтобы численные значения соответствующей интегральной характеристики для G^0 и G_0 были известны и давали оценку искомой величины соответственно сверху и снизу. Построение таких мажорантных областей всегда возможно, а если не требуется большой точности в определении искомой величины, оно осуществляется в каждом конкретном случае особенно просто. Покажем это на нескольких простейших примерах.

1. *Задача о дебите несовершенной цилиндрической скважины в грунте бесконечной глубины.* Схема такой области фильтрации представлена на рис. 41, где r — радиус скважины, b — ее глубина, h' и h'' — приведенное давление соответственно на стенках скважины и на бесконечности ($h'' > h'$), $\bar{k}$ — коэффициент фильтрации ($\bar{k} = \text{const}$), $H = h'' - h'$.

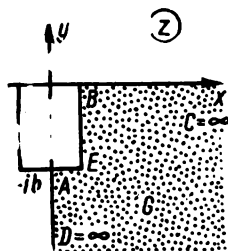


Рис. 41.

Пусть $b < r$. Область G_0 , в соответствии с теоремой сравнения 1, можно получить, заменяя границу скважины AEB частью эллипса, проходящего через точки A и B , лежащие в четвертой четверти плоскости. Дебит жидкости Q_0 можно определить в точном виде

$$Q_0 = \pi \bar{k} H \sqrt{r^2 - b^2} \left(\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{r-b}{r+b}} \right)^{-1}.$$

В качестве G^0 можно взять область фильтрации, получающуюся из G заменой границы скважины частью эллипса в четвертой четверти плоскости, проходящего через точку E и имеющего фокусы в точках $(\sqrt{r^2 - b^2}, 0)$ и $(-\sqrt{r^2 - b^2}, 0)$. В этом случае дебит Q^0 также после несложных вычислений принимает вид

$$Q^0 = \pi \bar{k} H \left(\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{r-b}}{\sqrt{r+b}} \right)^{-1}.$$

Таким образом, для искомого дебита цилиндрической скважины получаем неравенства

$$\frac{\pi \bar{k} H \sqrt{r^2 - b^2}}{\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{r-b}{r+b}}} < Q < \frac{\pi \bar{k} H \sqrt{r^2 - b^2}}{\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{r-b}}{\sqrt{r+b}}}.$$

Очевидно, что эти оценки мало отличаются друг от друга, особенно при малой глубине скважины, и определяют, следовательно, значение искомой величины с достаточной степенью точности.

Пусть $b = r$. Для простоты области G_0 и G^0 можно получить заменой AEB дугами окружностей с центром в начале координат, проходящими соответственно через точки B и E . Получаем

$$2\pi \bar{k} H r < Q < 2\pi \bar{k} H r \sqrt{2}.$$

Пусть $b > r$. В качестве G_0 в этом случае можно взять, например, область фильтрации, получающуюся из G заменой AEB дугой эллипса, проходящего через точки $(r, 0)$ и $(0, -b)$, которая лежит в четвертой четверти плоскости. Далее, G^0 можно получить, заменяя AEB такой же дугой эллипса, проходящего через точку E и имеющего фокусы в точках $(0, -\sqrt{b^2 - r^2})$ и $(0, \sqrt{b^2 - r^2})$. После некоторых подсчетов дебитов, соответствующих G_0 и G^0 , искомый дебит цилиндрической скважины записывается в виде

$$\frac{2\pi k H \sqrt{b^2 - r^2}}{\ln\left(\frac{b}{r} + \sqrt{\frac{b^2}{r^2} - 1}\right)} < Q < \frac{2\pi k H \sqrt{b^2 - r^2}}{\ln\left(\sqrt{\frac{b}{r}} + \sqrt{\frac{b}{r} - 1}\right)}.$$

2. *Задача о притоке грунтовых вод к осесимметричному водоему трапециoidalного сечения.* Схема такой области фильтрации G представлена на рис. 42, если считать ось x совпадающей с естественным уровнем грунтовых вод. Здесь b и R — соответственно глубина и радиус водоема, r — радиус его дна, a — уровень жидкости в водоеме, отсчитываемый от его дна, k — коэффициент фильтрации ($\bar{k} = \text{const}$).

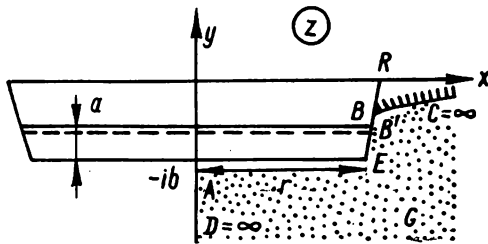


Рис. 42.

Приведенное давление на стенках водоема AEB' $h' = a - b$, приведенное давление на бесконечности $h'' = 0$. Вид промежутка высачивания $B'B$ заранее не задается.

В соответствии с теоремами сравнения 4, 5 и 1 в качестве нижней мажорантной области G_0 можно принять область, получающуюся из G заменой промежутка высачивания $B'B$ и потенциальной линии EB' линией тока и отгибанием последней до совпадения с горизонтальной прямой. Приток жидкости Q_0 , соответствующий G_0 , определяется сразу в точном виде [125]

$$Q_0 = 4\bar{k}(b - a)r.$$

В качестве верхней мажорантной области G^0 , если откосы водоема вертикальны, можно принять область, ограниченную потенциальной линией, которая представляет собой часть эллипса в четвертой четверти плоскости, проходящего через точку E , с фокусами в точках $(\sqrt{r^2 - b^2}, 0)$ и $(-\sqrt{r^2 - b^2}, 0)$, и линией тока $x > C, y = 0$, где C — большая полуось эллипса. В этом случае приток жидкости после несложных вычислений

$$Q^0 = \bar{k}\pi(b - a)\sqrt{r^2 - b^2} \left(\arctg \frac{\sqrt{r - b}}{\sqrt{r + b}} \right)^{-1},$$

и искомый приток жидкости Q к осесимметричному водоему трапециoidalного сечения в случае вертикальных откосов записывается

$$4\bar{k}(b-a)r < Q < \bar{k}\pi(b-a)\sqrt{r^2-b^2}\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{r-b}}{\sqrt{r}+\sqrt{b}}\right)^{-1}.$$

Поскольку радиус дна водоема r всегда во много раз больше его глубины b , последние неравенства определяют искомый приток жидкости с высокой степенью точности.

При невертикальных откосах водоема нижняя оценка для притока жидкости остается такой же, а определение верхней оценки несколько не отличается от получения ее в случае вертикальных откосов.

Метод мажорантных областей в применении ко многим классам задач теории фильтрации, решение которых в точном виде связано с принципиальными трудностями, получил дальнейшее развитие [126—135]. В частности, исследованы [126—128] задача о фильтрации под плоским флюидобетом с двумя шпунтами и задача о фильтрации из осесимметричного водоема в слоистый грунт, рассмотрены задача о зависимости выходных скоростей от подземного водоупора криволинейной формы и задача о фильтрации из канала при наличии щели в подземном водоупоре [129—133]. На основании указанных результатов [126—135] можно сделать вывод о том, что при решении конкретных задач теории фильтрации при довольно широком произволе в выборе мажорантных областей верхние и нижние оценки искомых фильтрационных характеристик очень мало отличаются друг от друга. Это объясняется самой природой рассматриваемых физических процессов, характеризующихся в некотором смысле большой устойчивостью по отношению к изменению области, и дает возможность достаточно эффективно применять метод мажорантных областей.

§ 2. ВАРИАЦИОННО-ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ СРАВНЕНИЯ И МЕТОД МАЖОРАНТНЫХ ОБЛАСТЕЙ В ТЕОРИИ КРУЧЕНИЯ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

В работе [20] поставлен и изучен вопрос о характере изменений вполне определенных интегральных характеристик краевых задач теории кручения валов переменного сечения в зависимости от изменений области и краевых условий. При помощи теоремы о сохранении области для p -аналитических и (p, q) -аналитических функций установлены теоремы сравнения, аналогичные соответствующим теоремам теории фильтрации, приведенным в § 1, и распространен метод мажорантных областей на решение задач о кручении тел вращения.

В настоящем параграфе результаты исследований в указанном направлении изложены в основном в соответствии с работой [20].

Комплексный потенциал напряжений

Общие уравнения равновесия упругого изотропного тела при отсутствии объемных сил в цилиндрической системе координат r, θ, z (рис. 43) имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}, \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}, \\ \gamma_{\theta z} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}, \\ \epsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \epsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \lambda \vartheta + 2\mu \epsilon_r, \quad \tau_{r\theta} = \mu \gamma_{r\theta}, \\ \sigma_\theta &= \lambda \vartheta + 2\mu \epsilon_\theta, \quad \tau_{rz} = \mu \gamma_{rz}, \\ \sigma_z &= \lambda \vartheta + 2\mu \epsilon_z, \quad \tau_{\theta z} = \mu \gamma_{\theta z}, \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

где $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{r\theta}, \tau_{\theta z}, \tau_{rz}$ — компоненты тензора напряжений, $\epsilon_r, \epsilon_\theta, \epsilon_z, \gamma_{r\theta}, \gamma_{\theta z}, \gamma_{rz}$ — компоненты тензора деформаций, u, v, w — компоненты вектора смещений соответственно в направлениях осей r, θ и z , λ и μ — постоянные Ламэ, $\vartheta = \epsilon_r + \epsilon_\theta + \epsilon_z$ (см. [136]).

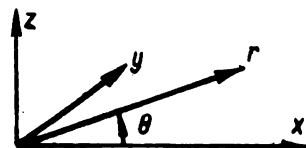


Рис. 43.

В случае кручения валов, симметричных относительно оси z при переменном диаметре и симметричном нагружении относительно оси вращения, как известно, полагают [137]

$$\mu = 0, \quad w = 0, \quad v = v(r, z). \quad (29)$$

При этом первые два из уравнений (26) обращаются в тождества, а из третьего и уравнений (27) и (28) получаем

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0, \quad (30)$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}, \quad \gamma_{\theta z} = \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \tau_{r\theta} = \mu \gamma_{r\theta}, \quad \tau_{\theta z} = \mu \gamma_{\theta z}, \quad (31)$$

$$\epsilon_r = \epsilon_\theta = \epsilon_z = \gamma_{rz} = \sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_z = \tau_{r\theta} = 0. \quad (32)$$

Уравнения (30) — (32) представляют собой полную систему дифференциальных уравнений кручения валов переменного сечения.

Из уравнений (30) и (31) следуют равенства

$$\tau_{r\theta} = \mu r \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \tau_{z\theta} = \mu r \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad (33)$$

где $\varphi = \frac{v}{r}$ — так называемая функция перемещений. ψ — функция напряжений. Пусть C — кривая в плоскости $\zeta = r + iz$ ($\text{Re } \zeta > 0$), s — длина дуги кривой C , отсчитываемая в направлении ее положительного обхода, $\vec{n}$ — правая нормаль к C , v_n и v_s — проекции вектора касательных напряжений $\vec{v} = \tau_{r\theta} + i\tau_{z\theta}$ соответственно на $\vec{n}$ и на положительное направление касательной (рис. 44). В соответствии с равенствами (33)

$$\left. \begin{aligned} v_n &= \mu r \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial s}, \\ v_s &= \mu r \frac{\partial \varphi}{\partial s} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial n}. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

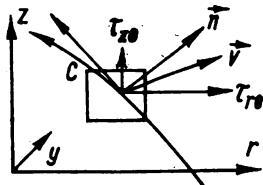


Рис. 44.

Введем функцию комплексного переменного

$$w = w(\zeta) = \varphi + i\psi, \quad (35)$$

вещественная и мнимая части которой, как функции от $\zeta = r + iz$, удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{\mu r^3} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{1}{\mu r^3} \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (36)$$

Функцию, определенную равенствами (35) и (36), будем называть комплексным потенциалом напряжений, а функции перемещений φ и напряжений ψ — соответственно потенциальной функцией и функцией тока. Очевидно, что комплексный потенциал напряжений является p -аналитической функцией от $\zeta = r + iz$ с характеристикой $p = \mu r^3$.

Комплексный потенциал напряжений вместе с равенствами (32) полностью определяют все элементы напряженного состояния. Так, для вектора напряжений $\vec{v} = \tau_{r\theta} + i\tau_{z\theta}$, вектора деформаций $\gamma_{r\theta} + i\gamma_{z\theta}$, потенциальных линий — линий постоянного угла поворота и линий тока — справедливы равенства

$$\left. \begin{aligned} \vec{v} &= \tau_{r\theta} + i\tau_{z\theta} = \mu (\gamma_{r\theta} + i\gamma_{z\theta}) = \mu r \nabla \varphi = -\frac{i}{r^2} \nabla \psi, \\ \varphi &= \text{const}, \quad \psi = \text{const}, \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

для приращения угла поворота φ вдоль кривой C и для момента M_C относительно оси z сил, действующих на кривую C со стороны ее правой нормали $\vec{n}$ — равенства

$$\varphi_C = [\varphi]_C, \quad M_C = [\psi]_C, \quad (38)$$

на потенциальных линиях и линиях тока — равенства

$$\left. \begin{aligned} \vec{v} &= e^{i\alpha} \mu r \frac{\partial \varphi}{\partial n} = e^{i\alpha} \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial s}, \\ \vec{v} &= e^{i\beta} \mu r \frac{\partial \varphi}{\partial s} = -e^{i\beta} \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial n}, \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

где α — угол, составленный с осью r правой нормалью $\vec{n}$ к потенциальной линии, β — угол, составленный с осью r положительным направлением касательной к линии тока.

Исходя из физических соображений, можно рассматривать три случая контурных условий для определения комплексного потенциала напряжений:

1) если боковая поверхность вала, образованная вращением кривой C вокруг оси z , свободна от внешних усилий, то кривая C является линией тока, т. е. $\psi|_C = \text{const}$;

2) если на указанной боковой поверхности угол поворота неизменный, то линия C является потенциальной линией, т. е. $\varphi|_C = \text{const}$;

3) указанная выше боковая поверхность не является свободной от внешних усилий и не является поверхностью, на которой угол поворота постоянный. Тогда C — линия, на которой заданы переменные значения или потенциальной функции — переменный угол поворота, или функции тока — момента внешних усилий относительно оси z ; в этом случае кривую C будем называть кривой переменного потенциала, или кривой переменного значения функции тока.

Пусть G — область в плоскости $\zeta = r + iz$ ($\text{Re } \zeta > 0$), ограниченная кусочно-гладким контуром L и являющаяся осевым сечением вала. Условимся такую область G называть областью напряжений. Очевидно, что решение задачи о кручении вала сводится к нахождению комплексного потенциала напряжений $\omega = \varphi + i\psi$ по контурным условиям указанных выше трех типов, заданным на границе L области G . В частности, если вал сплошной, то в границу L входит отрезок оси z и этот отрезок является линией тока, так как на оси z

$$\tau_{r\theta} = \tau_{z\theta} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0.$$

На основании теоремы о сохранении области для p -аналитических функций (гл. 1, § 7) можно утверждать, что образом области G в плоскости комплексного потенциала $\omega = \varphi + i\psi$ является некоторая область T — годограф комплексного потенциала напряжений.

Пусть G_1 — область напряжений, получающаяся из G при вариации ее границы, такая, что $G_1 \subset G$, g_1 — образ G_1 в плоскости ω , $\omega_1 = \varphi_1 + i\psi_1$ — комплексный потенциал напряжений, соответствующий области G_1 , T_1 — годограф комплексного потенциала ω_1 , $\vec{v}_1$ — вектор касательных напряжений, соответствующий области

G_1 , и вообще все величины, взятые с индексом 1 внизу, означают, что они соответствуют области напряжений G_1 .

Введем, по аналогии с тем, как это было сделано нами в теории фильтрации, функцию комплексного переменного

$$\omega = \omega(\zeta) = w_1 - w = \sigma + i\tau, \quad (40)$$

в дальнейшем будем называть ее вариацией комплексного потенциала напряжений. Вариация комплексного потенциала как функция от $\zeta = r + iz$ в области G_1 удовлетворяет системе дифференциальных уравнений (36), а как функция от $w = \varphi + i\psi$ в области G_1 — системе уравнений

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} = \frac{\partial \tau}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \psi} = -\frac{1}{\mu r^2} \frac{\partial \tau}{\partial \varphi}. \quad (41)$$

Следовательно, по теореме о сохранении области (гл. 1, § 7) образом области G_1 , или, что то же самое, образом области G_1 в плоскости $\omega = \sigma + i\tau$ является некоторая область Ω — географ вариации комплексного потенциала.

Вдоль линий, являющихся одновременно потенциальными линиями начального и измененного напряженных состояний (соответствующих G и G_1), в силу (34)

$$\frac{\partial \tau}{\partial s} = r^2 (\vec{v}_1 - \vec{v}) e^{-i\alpha}. \quad (42)$$

Точно так же вдоль линий тока, общих для начального и измененного напряженных состояний,

$$\frac{\partial \sigma}{\partial s} = \frac{1}{\mu r} (\vec{v}_1 - \vec{v}) e^{-i\beta}. \quad (43)$$

Поскольку образом области напряжений G_1 в плоскости $\omega = \sigma + i\tau$ является область в сочетании с частично известными контурными условиями для вариации комплексного потенциала напряжений, можно изучить характер изменения вектора напряжений, линий тока и потенциальных линий в зависимости от всевозможных изменений области напряжений. Возможны несколько общих случаев краевых условий.

Теоремы сравнения кручения тел вращения для области напряжений, ограниченной двумя линиями тока и двумя потенциальными линиями

Схема области напряжений G , ограниченной двумя линиями тока и двумя потенциальными линиями, представлена на рис. 45. Краевые условия имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \varphi|_{AB} = h' = \text{const}, \quad \varphi|_{DC} = h'' = \text{const}, \\ \psi|_{AD} = M' = \text{const}, \quad \psi|_{BC} = M'' = \text{const}, \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

где $h'' - h' = H$ — угол поворота потенциальной линии DC относительно потенциальной линии AB , $M'' - M' = M$ — момент от-

носителем оси z сил, приложенных к указанной линии DC со стороны ее правой нормали, т. е. внешних сил, приложенных к поверхности, образованной вращением линии DC на угол $\theta = 1$. Будем считать в дальнейшем, что $h' = 0$ и $H > 0$, так как эти условия всегда можно выполнить, соответственно расположив скручиваемый вал относительно системы координат. Условимся называть величину H суммарным углом поворота, M — суммарным скручивающим моментом, линию AB — закрепленной потенциальной линией, DC — свободной потенциальной линией. Далее, через L' обозначим совокупность линий, отличных от линий тока, входящих в границу L области напряжений G , L_1 — то же самое, но в применении к области напряжений G_1 . При сравнении линий тока в областях напряжений G и G_1 под соответствующими линиями тока будем понимать такие линии тока, которым соответствует одна и та же постоянная, т. е. $\psi = \psi_1 = \text{const}$. При рассмотрении соответствия между плоскостями ξ , ω и ω точки в плоскости ξ обозначим прописными буквами, соответствующие им точки в плоскости ω — строчными буквами, а в плоскости ω — теми же строчными буквами с индексом 2 внизу.

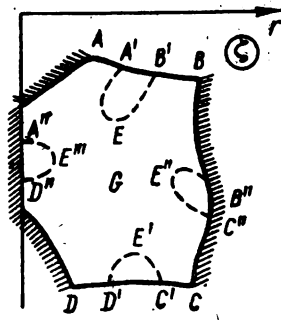


Рис. 45.

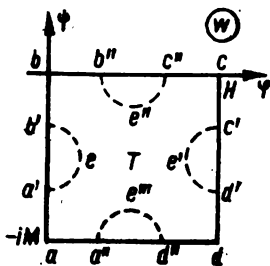


Рис. 46.

Пусть суммарный скручивающий момент M остается неизменным. Тогда при изменении области напряжений G вследствие смещения какой-либо из точек A, B, C, D вдоль границы области G справедлива следующая теорема.

Теорема 1. При уменьшении потенциальной линии

а) $H_1 > H$;

б) $\phi_1 > \phi$ в $G_1 + L_1$ вне закрепленной част-

ти L_1L' , если уменьшается закрепленная по-

тенциальная линия, если же уменьшается свободная потенциальная линия, то $\phi_1 > \phi$ на неизменной ее части и на неизменной линии тока и $\phi_1 < \phi$ на неизменной части увеличиваемой линии тока;

в) $|\vec{v}_1| > |\vec{v}|$ на неизменной части уменьшаемой потенциальной линии, на неизменной линии тока и вблизи ее конца на неизменной потенциальной линии; $|\vec{v}_1| < |\vec{v}|$ на неизменной части увеличиваемой линии тока и вблизи ее конца на неизменной потенциальной линии¹²;

г) линии тока в $G_1 + L'$ отодвигаются от увеличенной линии тока, если считать, что последняя соответствует самой себе.

¹² Здесь, как и в последующих теоремах, не исключена возможность вырождения неравенств для величин скоростей в равенства в отдельных точках.

В самом деле, пусть уменьшается линия AB вследствие смещения точки A в положение точки A' (см. рис. 45). Годографы T и T_1 в этом случае имеют вид, указанный на рис. 46 и 47. В плоскости $\omega = \sigma + i\tau$ образы BC и AD находятся на вещественной оси, образ $A'B$ — на мнимой оси, образ DC — на вертикальной прямой, образ AA' — кривая в четвертой четверти плоскости, монотонная по σ и τ . Годограф Ω , удовлетворяющий всем этим условиям с точностью до топологических преобразований, не нарушающих эти

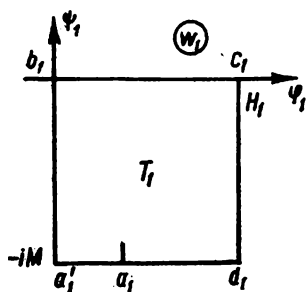


Рис. 47.

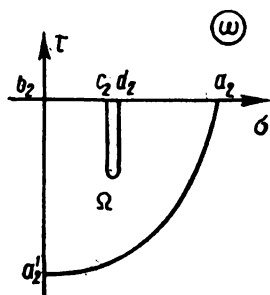


Рис. 48.

условия, представлен на рис. 48. Из рассмотрения Ω следуют неравенства

$$H_1 > H, \quad \varphi_1 > \varphi \text{ в } G_1 + L_1 \text{ вне } A'B, \quad \psi_1 < \psi \text{ в } G_1 + L',$$

$$\left. \frac{d\tau}{ds} \right|_{A'B} > 0, \quad \left. \frac{d\sigma}{ds} \right|_B > 0, \quad \left. \frac{d\tau}{ds} \right|_{DC} > 0 \text{ вблизи } C,$$

$$\left. \frac{d\sigma}{ds} \right|_{AD} < 0, \quad \left. \frac{d\tau}{ds} \right|_{DC} < 0 \text{ вблизи } D.$$

Эти неравенства в соответствии с формулами (42) и (43) означают справедливость утверждений теоремы при смещении точки A .

Пусть теперь точка B смещается в положение точки B' (см. рис. 45). В плоскости $\omega = \sigma + i\tau$ образы AD и BC находятся на вещественной оси, образ AB' — на мнимой оси, образ DC — на вертикальной прямой, образ $B'B$ — кривая в первой четверти плоскости, монотонная по σ и τ . Построив по этим данным годограф Ω , приходим к неравенствам

$$H_1 > H, \quad \varphi_1 > \varphi \text{ в } G_1 + L_1 \text{ вне } A'B, \quad \psi_1 < \psi \text{ в } G_1 + L',$$

$$\left. \frac{d\tau}{ds} \right|_{AB'} > 0, \quad \left. \frac{d\sigma}{ds} \right|_{AD} > 0, \quad \left. \frac{d\tau}{ds} \right|_{DC} > 0 \text{ вблизи } C,$$

$$\left. \frac{d\sigma}{ds} \right|_{BC} < 0, \quad \left. \frac{d\tau}{ds} \right|_{DC} < 0 \text{ вблизи } D,$$

означающим справедливость теоремы при смещении точки B .

Пусть теперь уменьшается свободная потенциальная линия DC вследствие смещения точки C в положение точки C' (см. рис. 45).

В плоскости ω образы BC и AD находятся на вещественной оси, образ AB — на мнимой оси, образ DC' — на вертикальной прямой, образ CC' — кривая в верхней полуплоскости, монотонная по σ и τ и лежащая слева от указанной вертикальной прямой. Годограф Ω , удовлетворяющий всем этим условиям с точностью до топологических преобразований, не нарушающих этих условий, представлен на рис. 49. Из годографа Ω следуют неравенства

$$H < H_1, \quad \varphi_1 > \varphi \text{ на } AD, \quad \varphi_1 < \varphi \text{ на } BC,$$

$$\varphi_1 > \varphi \text{ в } G_1 + L', \quad \left. \frac{d\tau}{ds} \right|_{DC'} > 0, \quad \left. \frac{d\sigma}{ds} \right|_{AD} > 0,$$

$$\left. \frac{d\tau}{ds} \right|_{AB} > 0 \text{ вблизи } A, \quad \left. \frac{d\sigma}{ds} \right|_{BC} < 0,$$

$$\left. \frac{d\tau}{ds} \right|_{AB} < 0 \text{ вблизи } B.$$

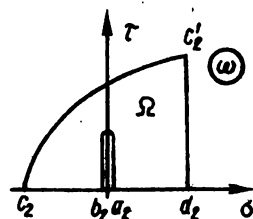


Рис. 49.

При смещении точки D в положение точки D' (см. рис. 45) в плоскости ω образы BC и AD по-прежнему будут на вещественной оси, образ AB — на мнимой оси, образ $D'C$ — на вертикальной прямой, образ DD' — кривая в нижней полуплоскости, монотонная по σ и τ и лежащая слева от указанной вертикальной прямой. Построив по этим данным годограф Ω , так же как и в предыдущем случае, приходим к неравенствам

$$H_1 > H, \quad \varphi_1 > \varphi \text{ на } BC, \quad \varphi_1 < \varphi \text{ на } AD, \quad \varphi_1 < \varphi \text{ в } G_1 + L',$$

$$\left. \frac{d\tau}{ds} \right|_{AB} > 0 \text{ вблизи } B, \quad \left. \frac{d\tau}{ds} \right|_{AB} < 0 \text{ вблизи } A, \quad \left. \frac{d\tau}{ds} \right|_{D'C} > 0,$$

$$\left. \frac{d\sigma}{ds} \right|_{BC} > 0, \quad \left. \frac{d\sigma}{ds} \right|_{AD} < 0,$$

полностью завершающим доказательство теоремы 1.

При уменьшении области напряжений G вследствие произвольных вдавливаниях одной из потенциальных линий или одной из линий тока, но при неизменных точках их раздела A, B, C, D справедливы следующие теоремы.

Теорема 2. При вдавливании потенциальной линии

а) $H_1 < H$;

б) $\varphi_1 < \varphi$ в $G_1 + L_1$ вне закрепленной части $L_1 L'$, если вдавливается закрепленная потенциальная линия, если же вдавливается свободная потенциальная линия, то $\varphi_1 < \varphi$ на неизменной ее части, на одной из линий тока и вблизи конца другой линии тока, примыкающего к вдавливаемой потенциальной линии, и $\varphi_1 > \varphi$ вне концов на вдавленной части потенциальной линии;

в) $|\vec{v}_1| < |\vec{v}|$ на неизменной части вдавливаемой потенциальной линии и на одной из линий тока, на другой линии тока $|\vec{v}_1| < |\vec{v}|$ или

$|\vec{v}_1| < |\vec{v}|$ вблизи ее конца, примыкающего к вдавливаемой потенциальной линии, и $|\vec{v}_1| > |\vec{v}|$ вблизи другого ее конца, причем на неизменной потенциальной линии в первом случае $|\vec{v}_1| < |\vec{v}|$ вблизи концов и $|\vec{v}_1| > |\vec{v}|$ вне ее концов, а во втором случае $|\vec{v}_1| < |\vec{v}|$ вблизи ее конца, примыкающего к линии тока, на которой $|\vec{v}_1| < |\vec{v}|$, и

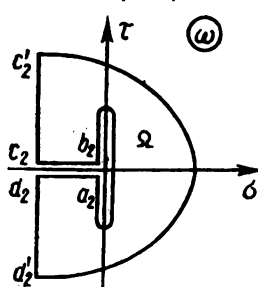


Рис. 50.

$|\vec{v}_1| > |\vec{v}|$ вблизи другого ее конца.

Теорема 3. При вдавливании линии тока

а) $H_1 > H$;

б) $\varphi_1 > \varphi$ на неизменной линии тока и на неизменной части вдавливаемой линии тока со стороны свободной потенциальной линии и $\varphi_1 < \varphi$ на неизменной части последней со стороны закрепленной потенциальной линии;

в) $|\vec{v}_1| > |\vec{v}|$ на неизменной линии тока и вблизи ее концов на потенциальных линиях,

$|\vec{v}_1| < |\vec{v}|$ на неизменной части вдавливаемой

линии тока и вблизи ее концов на потенциальных линиях;

г) линии тока в $G_1 + L'$ отодвигаются от вдавленной линии тока, если последнюю считать соответствующей самой себе.

В самом деле, пусть вдавливается линия $A'B'$, т. е. часть закрепленной потенциальной линии AB (см. рис. 45). Область g_1 в этом случае ограничена контуром $aa'eb'bcda$ (см. рис. 46). В плоскости ω образы BC и AD находятся на вещественной оси, образы AA' и $B'B$ — на мнимой оси, образ DC — на вертикальной прямой, образ $A'EB'$ — в левой полуплоскости. Построив по этим данным годограф Ω , приходим к теореме 2, соответствующей вдавливанию закрепленной потенциальной линии AB . Если вдавливается часть свободной потенциальной линии $D'C'$ (см. рис. 45), то годограф Ω в плоскости вариации комплексного потенциала имеет вид, представленный на рис. 50. Существенно, что двоянный отрезок a_2b_2 может оказаться целиком лежащим в верхней или нижней полуплоскости. Учитывая это, приходим к теореме 2 в общем случае.

Пусть вдавливается часть линии тока $A''D''$ (см. рис. 45). В этом случае область g_1 ограничена контуром $abcd''e''a''a$ (см. рис. 46), а годограф Ω имеет вид, представленный на рис. 51. Из этого годографа следуют неравенства

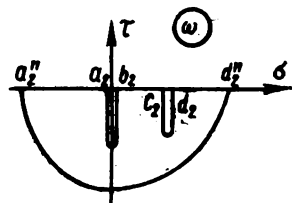


Рис. 51.

$H_1 > H$, $\varphi_1 > \varphi$ на BC , $D''D$, $\varphi_1 < \varphi$ на AA'' , $\psi_1 < \psi$ в $G_1 + L'$,

$\frac{d\tau}{ds} \Big|_{AB} > 0$ вблизи B , $\frac{d\tau}{ds} \Big|_{AB} < 0$ вблизи A , $\frac{d\tau}{ds} \Big|_{DC} > 0$ вблизи D

$$\left. \frac{d\tau}{ds} \right|_{DC} < 0 \text{ вблизи } C, \quad \left. \frac{d\sigma}{ds} \right|_{BC} > 0,$$

$$\left. \frac{d\sigma}{ds} \right|_{D^*D} < 0, \quad \left. \frac{d\tau}{ds} \right|_{AB} > 0, \quad \left. \frac{d\sigma}{ds} \right|_{AA^*} < 0,$$

означающие справедливость теоремы 3 при вдавливании линии тока AD .

Пусть теперь вдавливается линия $B''C''$ (см. рис. 45). Область g_1 ограничена контуром $abb''e''c''da$ (см. рис. 46). В плоскости ω образы BB'' , $C''C$, AD находятся на вещественной оси, образ AB на мнимой оси, образ DC — на вертикальной прямой, образ $B''E''C''$ — кривая в верхней полуплоскости. Построив по этим данным годограф Ω в плоскости ω , приходим к неравенствам, аналогичным предыдущим и полностью завершающим доказательство теоремы 3.

Пусть, далее, величина H остается неизменной. Тогда при изменении области напряжений G вследствие смещения какой-либо одной из точек A , B , C , D вдоль границы области или вследствие вдавливания одной из граничных потенциальных линий и линий тока, но при неизменных точках их раздела справедливы такие теоремы.

Теорема 1а. При уменьшении потенциальной линии

а) $M_1 < M$;

б) $\varphi_1 > \varphi$ в $G_1 + L_1 - L'_1L'$, если уменьшается закрепленная потенциальная линия, и $\varphi_1 < \varphi$, если уменьшается свободная потенциальная линия;

в) $|\vec{v}_1| > |\vec{v}|$ на неизменной части уменьшаемой потенциальной линии и вблизи ее конца на неизменной линии тока, $|\vec{v}_1| < |\vec{v}|$ на неизменной части увеличиваемой линии тока, на неизменной потенциальной линии и вблизи ее конца на неизменной линии тока;

г) линии тока в $G_1 + L_1$ отодвигаются от увеличенной линии тока, если последнюю считать соответствующей самой себе.

Теорема 2а. При вдавливании потенциальной линии

а) $M_1 > M$;

б) $\varphi_1 > \varphi$ в $G_1 + L_1 - L'_1L'$, если вдавливается свободная потенциальная линия, и $\varphi_1 < \varphi$, если вдавливается закрепленная потенциальная линия;

в) $|\vec{v}_1| < |\vec{v}|$ на неизменной части вдавливаемой потенциальной линии и вблизи ее концов на линиях тока и $|\vec{v}_1| > |\vec{v}|$ на неизменной потенциальной линии и вблизи ее концов на линиях тока.

Теорема 3а. При вдавливании линии тока

а) $M_1 < M$;

б) $\varphi_1 > \varphi$ на неизменной части вдавливаемой линии тока со стороны свободной потенциальной линии и $\varphi_1 < \varphi$ на неизменной ее части со стороны закрепленной потенциальной линии;

в) $|\vec{v}_1| < |\vec{v}|$ на неизменной части вдавливаемой линии тока и на одной из потенциальных линий, на другой потенциальной линии $|\vec{v}_1| <$

б) $|\vec{v}_1| > |\vec{v}|$ на неизменной части потенциальной линии и неизменной линии тока, $|\vec{v}_1| < |\vec{v}|$ на неизменной части увеличиваемой линии тока;

в) линии тока в $G_1 + L_1'$ отодвигаются от увеличенной линии тока, если последнюю считать соответствующей самой себе.

При смещении точки раздела линий тока

а') $\varphi_1 > \varphi$ на неизменной части уменьшаемой линии тока, $\varphi_1 < \varphi$ на неизменной части увеличиваемой линии тока;

б') $|\vec{v}_1| > |\vec{v}|$ на неизменной части уменьшаемой линии тока и вблизи ее конца на потенциальной линии, $|\vec{v}_1| < |\vec{v}|$ на неизменной части увеличиваемой линии тока и вблизи ее конца на потенциальной линии;

в') линии тока в $G_1 + L_1'$ отодвигаются от увеличенной линии тока, если последнюю считать соответствующей самой себе.

В самом деле, пусть потенциальная линия уменьшается вследствие смещения точки B в положение точки B' (см. рис. 45). Годограф Ω имеет вид, указанный на рис. 53. Существенно, что в силу ограниченности τ точка d_2 лежит в конечной части плоскости, а кривая $b_2'b_2$ монотонная по σ и τ . Отсюда следует справедливость теоремы в случае смещения точки B .

В случае уменьшения потенциальной линии вследствие смещения точки A в положение точки A' (см. рис. 45), построив годограф Ω , приходим к неравенствам

$$\varphi_1 > \varphi \text{ в } G_1 + L_1 - L_1', \quad \left. \frac{d\tau}{ds} \right|_{A'B} > 0, \quad \left. \frac{d\sigma}{ds} \right|_{BD} > 0, \quad \left. \frac{d\sigma}{ds} \right|_{AD} < 0,$$

соответствующим теореме. При смещении точки D в положение точки D' (см. рис. 45) в плоскости ω образ AB находится на мнимой оси, образы BD' , AD — на вещественной оси, образ DD' — на горизонтальной прямой $\tau = \text{const}$. Построив по этим данным годограф Ω , приходим к неравенствам, аналогичным предыдущим и завершающим доказательство теоремы.

При изменении области напряжений G вследствие произвольных вдавливания одной из граничных линий тока или потенциальной линии при неизменных точках их раздела A, B, D справедливы следующие теоремы.

Теорема 2'. При вдавливании потенциальной линии а) $\varphi_1 < \varphi$ в $G_1 + L_1 - L_1L'$;

б) $|\vec{v}_1| < |\vec{v}|$ на неизменной части потенциальной линии и на одной из линий тока, на другой линии тока $|\vec{v}_1| < |\vec{v}|$ или $|\vec{v}_1| < |\vec{v}|$ вблизи ее конца, примыкающего к потенциальной линии, и $|\vec{v}_1| > |\vec{v}|$ вблизи другого ее конца.

Теорема 3'. При вдавливании линии тока

а) $\varphi_1 > \varphi$ на неизменной линии тока и на примыкающей к ней неизменной части вдавливаемой линии тока, $\varphi_1 < \varphi$ на

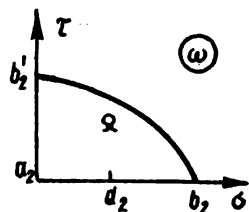


Рис. 53.

неизменной части, вдавливаемой линии тока, примыкающей к потенциальной линии;

б) $|\vec{v}_1| < |\vec{v}|$ на неизменной части вдавливаемой линии тока и вблизи ее конца на потенциальной линии, $|\vec{v}_1| > |\vec{v}|$ на неизменной линии тока и вблизи ее конца на потенциальной линии;

в) линии тока в $G_1 + L_1$ отодвигаются от вдавленной линии тока, если последнюю считать соответствующей самой себе.

В самом деле, при вдавливании части потенциальной линии (см. рис. 45) область g_1 в плоскости ω ограничена контуром $adbb'ea'a$ (см. рис. 52), а в плоскости ω образы AD, BD находятся на вещественной оси, образы $AA', B'B$ — на мнимой оси, образ $A'E'B'$ — в левой полуплоскости. Рассмотрев годограф Ω , удовлетворяющий этим условиям, приходим к теореме 2'. При вдавливании части линии тока $A''D''$ (см. рис. 45) область g_1 в плоскости ω ограничена контуром $aa''e'''d''dba$ (см. рис. 52), а в плоскости ω образы $AA'', D''D, DB$ находятся на вещественной оси, образ AB — на мнимой оси, образ $A'E'''D''$ — в нижней полуплоскости. Построив по этим данным годограф Ω , приходим к теореме 3', соответствующей вдавливанию линии тока AD . Так же устанавливаем справедливость этой теоремы при вдавливании линии тока BD .

Теоремы сравнения

скручивания тел вращения для области напряжений, ограниченной двумя линиями тока

Общая схема области напряжений G , ограниченной двумя линиями тока, совпадает со схемой, представленной на рис. 45, при условии, что точки B и C совпадают соответственно с точками A и D . Контурные условия имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \varphi|_A = h' = -\infty, \quad \varphi|_D = h'' = \infty, \\ \psi|_{AD} = M' = \text{const}, \quad \psi|_{AB^*D} = M'' = \text{const} \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

где $h' = -\infty$, $h'' = \infty$, $M'' - M' = M$ имеют тот же смысл, что и ранее. Годограф T в плоскости $\omega = \varphi + i\psi$ имеет вид полосы, указанной на рис. 54.

Рис. 54.

Пусть в дальнейшем, как и в предыдущем параграфе, суммарный скручивающий момент M остается неизменным. Тогда при

изменении области напряжений G вследствие смещения одной из точек раздела граничных линий тока вдоль границы области справедлива следующая теорема.

Теорема 1". При смещении точки раздела линий тока

а) $|\vec{v}_1| > |\vec{v}|$ на неизменной части уменьшаемой линии тока, $|\vec{v}_1| < |\vec{v}|$ на неизменной части увеличиваемой линии тока;

б) линии тока в G_1 пододвигаются к уменьшенной линии тока, если последнюю считать соответствующей самой себе.

В самом деле, пусть точка A смещается в положение точки A'' (см. рис. 45). В плоскости ω образы $A''D$ и $AB''D$ находятся на вещественной оси, образ AA'' — на горизонтальной прямой $\tau = \text{const}$. Построив по этим данным годограф Ω , получаем неравенства

$$\psi_1 > \psi \text{ в } G_1, \quad \left. \frac{d\sigma}{ds} \right|_{A''D} > 0, \quad \left. \frac{d\sigma}{ds} \right|_{AB''D} < 0,$$

означающие справедливость теоремы при смещении точки A в положение точки A'' . Так же устанавливаем справедливость теоремы в общем случае.

Пусть точки раздела граничных линий тока остаются неизменными. Тогда справедлива такая теорема.

Теорема 2". При вдавливании линии тока

а) $|\vec{v}_1| < |\vec{v}|$ на неизменной части вдавливаемой линии тока, $|\vec{v}_1| > |\vec{v}|$ на неизменной линии тока;

б) линии тока в G_1 отодвигаются от вдавленной линии тока, если последнюю считать соответствующей самой себе.

В самом деле, пусть вдавливается линия $A''D''$, т. е. часть линии тока AD (см. рис. 45). Область g_1 в плоскости ω в этом случае ограничена контуром $aa''e''d''db''a$ (см. рис. 54). В плоскости ω образы AA'' , $D''D$, $AB''D$ находятся на вещественной оси, образ $A''E''D''$ — в нижней полуплоскости. Построив по этим данным годограф Ω , получаем неравенства

$$\psi_1 < \psi \text{ в } G_1, \quad \left. \frac{d\sigma}{ds} \right|_{AA''} < 0, \quad \left. \frac{d\sigma}{ds} \right|_{D''D} < 0, \quad \left. \frac{d\sigma}{ds} \right|_{AB''D} > 0,$$

означающие справедливость теоремы 2" при вдавливании линии тока AD . Таким же способом устанавливаем справедливость этой теоремы в общем случае, т. е. при вдавливании линии тока $AB''D$.

Теоремы сравнения

кручения тел вращения для области напряжений,

в границу которой входят

линии переменного потенциала

Установим характер изменения основных характеристик напряженного состояния в области напряжений, в границу которой входят линии переменного потенциала, при замене ее одной из рассмотренных выше областей напряжений.

1. *Область напряжений, ограниченная двумя линиями тока и одной линией переменного потенциала.* Общая схема такой области напряжений G совпадает со схемой, представленной на рис. 45, при условии, что точка C совпадает с точкой D . Контурные условия имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \varphi|_{AB} &= h'(s), \quad \varphi|_D = h'' = \infty, \\ \psi|_{AD} &= M' = \text{const}, \quad \psi|_{BD} = M'' = \text{const}, \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

где $M'' - M' = M$ имеют тот же смысл, что и ранее, $h'(s)$, $h'(0) = 0$ — функция длины дуги s линии переменного потенциала AB отсчитываемой от точки A , $m'(s) = \psi|_{AB}$ — значения функции тока на линии переменного потенциала AB . При неизменном значении суммарного скручивающего момента M справедлива следующая теорема.

Теорема 4. При замене линии переменного потенциала в случае монотонного ¹³ $h'(s)$ потенциальной линией $\varphi|_{AB} = 0$

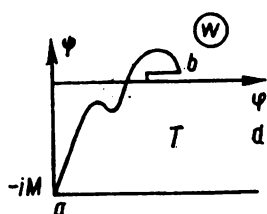


Рис. 55.

а) $\varphi_1 < \varphi$ в $G_1 + L_1$, если $h'(s)$ возрастает, и $\varphi_1 > \varphi$, если $h'(s)$ убывает, разность $\varphi_1 - \varphi$ монотонная на $L_1 - L'$;

б) $|\vec{v}_1| < |\vec{v}|$ на линии тока наименьшего значения $h'(s)$, и если при этом $m'(s)$ монотонно, то $|\vec{v}_1| > |\vec{v}|$ — на другой линии тока.

В самом деле, при $h'(s)$ возрастающем годограф T имеет вид, указанный на рис. 55

В плоскости ω образы AD , BD находятся на вещественной оси, образ AB — кривая в левой полуплоскости, монотонная по переменной σ . Построив по этим данным годограф Ω согласно формулам (42), (43) устанавливаем теорему. Так же устанавливаем справедливость этой теоремы при $h'(s)$ убывающем.

Теорема 5. При увеличении $m'(s)$ с помощью положительного монотонно возрастающего слагаемого ¹⁴

а) $M_1 > M$;

б) при монотонном $h'(s)$ $|\vec{v}_1| > |\vec{v}|$ на линии тока наименьшего значения $h'(s)$, а при монотонном $m'(s)$ $|\vec{v}_1| > |\vec{v}|$ на обеих линиях тока.

В самом деле, в плоскости ω образ BD находится на вещественной оси, образ AD — на горизонтальной прямой, образ AB — кривая монотонная по переменной τ . Отсюда в силу формулы (43) следует теорема.

2. Область напряжения, ограниченная двумя линиями тока одной потенциальной линией и одной линией переменного потенциала. Схема такой области напряжений представлена на рис. 45, где AD , BC — линии тока, AB — потенциальная линия, DC — линия переменного потенциала. Контурные условия имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \varphi|_{AB} = h' = 0, \quad \varphi|_{DC} = h''(s), \\ \psi|_{AD} = M' = \text{const}, \quad \psi|_{BD} = M'' = \text{const}, \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

где $M'' - M' = M$ имеет тот же смысл, что и ранее ($M > 0$) $h''(s) > 0$ — функция длины дуги s линии переменного потенциала;

¹³ Здесь и далее, когда говорится о монотонности, возрастании и убывании функций $h'(s)$ и $m'(s)$, предполагается, что это относится ко всей линии переменного потенциала AB .

¹⁴ Это означает, что к линии переменного потенциала прилагаются добавочные внешние усилия с отрицательным моментом относительно оси z .

DC, отсчитываемой от точки D, $t''(s) = \psi|_{DC}$ — значения функции тока на линии переменного потенциала DC.

При неизменном значении M справедлива теорема 6.

Теорема 6. При замене линии переменного потенциала в случае монотонного ¹⁵ $h''(s)$ потенциальной линией $\varphi|_{DC} = h'' = \text{const}$

а) $\varphi_1 > \varphi$ на линии тока наименьшего значения $h''(s)$ и $\varphi_1 < \varphi$ на другой линии тока;

б) $|\vec{v}_1| < |\vec{v}|$ на линии тока наибольшего значения $h''(s)$ и вблизи ее конца на потенциальной линии, $|\vec{v}_1| > |\vec{v}|$ на потенциальной линии вблизи другого ее конца, и если при этом $t''(s)$ монотонно, то $|\vec{v}_1| > |\vec{v}|$ на линии тока наименьшего значения $h''(s)$.

В самом деле, при $h''(s)$ возрастающем годограф T имеет вид, указанный на рис. 56. В плоскости ω образы BC, AD находятся на вещественной оси, образ AB — на мнимой оси. Отсюда согласно формулам (42), (43) следует теорема при $h''(s)$ возрастающем. Так же устанавливаем теорему при $h''(s)$ убывающем.

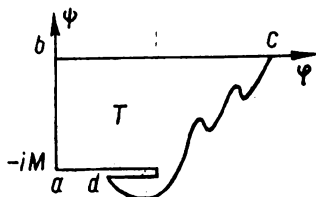


Рис. 56.

Теорема 7. При замене линии переменного потенциала в случае монотонного $h''(s)$ потенциальной линией $\varphi|_{DC} = \max_{DC} h''(s)$

а) $M_1 > M$;

б) $\varphi_1 > \varphi$ в $G_1 + L_1 - AB$;

в) $|\vec{v}_1| > |\vec{v}|$ на потенциальной линии и вблизи ее концов на линиях тока, $|\vec{v}_1| < |\vec{v}|$ на линии тока наибольшего значения $h''(s)$ вблизи ее конца, примыкающего к линии переменного потенциала, и если при этом $t''(s)$ монотонно, то $|\vec{v}_1| > |\vec{v}|$ на линии тока наименьшего значения $h''(s)$.

В самом деле, при $h''(s)$ возрастающем годограф T имеет вид, указанный на рис. 56, годограф Ω представлен на рис. 57. Рассмотрев эти годографы при $h''(s)$ возрастающем и при $h''(s)$ убывающем убеждаемся в справедливости теоремы.

Теорема 8. При замене линии переменного потенциала в случае монотонного $h''(s)$ потенциальной линией $\varphi|_{DC} = \min_{DC} h''(s)$

а) $M_1 < M$;

б) $\varphi_1 < \varphi$ в $G_1 + L_1 - AB$;

¹⁵ Здесь и далее, когда говорится о монотонности, возрастании и убывании функций $h''(s)$ и $t''(s)$, предполагается, что это относится ко всей линии переменного потенциала DC.

в) $|\vec{v}_1| < |\vec{v}|$ на линии тока наибольшего значения $h''(s)$, на потенциальной линии и вблизи ее конца на другой линии тока, и если при этом $t''(s)$ монотонно, то $|\vec{v}_1| > |\vec{v}|$ на последней линии тока вблизи ее конца, примыкающего к линии переменного потенциала.

В самом деле, при $h''(s)$ возрастающем годограф T имеет вид, указанный на рис. 56. В плоскости ω образ BC находится на вещественной оси, образ AD — на горизонтальной прямой, образ AB — на мнимой оси, образ DC — кривая во второй четверти плоскости, монотонная по σ . В соответствии с формулами (42) и (43) устанавливаем теорему при $h''(s)$ возрастающем. Так же устанавливаем справедливость этой теоремы и при $h''(s)$ убывающем.

Теорема 9. При увеличении $h''(s)$ с помощью положительного монотонного слагаемого $h_0''(s)$

а) $M_1 > M$;

б) $\varphi_1 > \varphi$ в $G_1 + L_1 - AB$;

в) при монотонном $h''(s)$ $|\vec{v}_1| > |\vec{v}|$ на потенциальной линии и вблизи ее концов на линиях тока, а при монотонном $t''(s)$ $|\vec{v}_1| > |\vec{v}|$ на линии тока наибольшего значения $h_0''(s)$, на потенциальной линии и вблизи ее конца на другой линии тока.

В самом деле, при $h_0''(s)$ убывающем годограф Ω имеет вид, указанный на рис. 57. Из этого годографа следует теорема при $h_0''(s)$ убывающем. Так же устанавливается теорема при $h_0''(s)$ возрастающем.

Теорема 10. При увеличении $t''(s)$ с помощью положительного монотонно возрастающего слагаемого ¹⁶

а) $M_1 > M$;

б) $\varphi_1 > \varphi$ в $G_1 + L_1 - AB$;

в) при монотонном $h''(s)$ $|\vec{v}_1| > |\vec{v}|$ на линии тока наибольшего значения $h''(s)$, на потенциальной линии и вблизи ее конца на другой линии тока, а при монотонном $t''(s)$ $|\vec{v}_1| > |\vec{v}|$ на обеих линиях тока и на потенциальной линии.

В самом деле, в плоскости ω образ AB — на мнимой оси, образ BC — на вещественной оси, образ AD — на горизонтальной прямой, образ DC — кривая, монотонная по τ . Отсюда согласно формулам (42), (43) непосредственно следует теорема.

3. Область напряжений, ограниченная двумя линиями тока и двумя линиями переменного потенциала. Схема такой области напряжений G представлена на рис. 45, где BC , AD — линии тока, AB , CD — линии переменного потенциала. Контурные условия имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \varphi|_{AB} &= h'(s), \quad \varphi|_{DC} = h''(s), \\ \psi|_{AD} &= M' = \text{const}, \quad \psi|_{BC} = M'' = \text{const}, \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

¹⁶ Это означает, что к линии переменного потенциала DC прилагаются добавочные внешние усилия с положительным моментом относительно оси z .

где $h'(s)$, $h'(0) = 0$, $h''(s) > 0$, $M'' - M' = M > 0$, $m'(s)$, $m''(s)$ имеют тот же смысл, что и ранее.

Пусть $m''(s)$ остается неизменным, т. е. остаются неизменными силы, приложенные к линии переменного потенциала DC . Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 11. При замене линии переменного потенциала AB в случае монотонного $h'(s)$ потенциальной линией $\varphi|_{AB} = 0$.

а) $\varphi_1 < \varphi$ в $G_1 + L_1$, если $h'(s)$ возрастает, и $\varphi_1 > \varphi$, если $h'(s)$ убывает, разность $\varphi_1 - \varphi$ монотонна на $L_1 - AB$;

б) при монотонном $m''(s)$ $|\vec{v}_1| < |\vec{v}|$ на линии тока наименьшего значения $h'(s)$, и если при этом $m'(s)$ монотонно, то $|\vec{v}_1| > |\vec{v}|$ на другой линии тока.

Пусть $h''(s)$ остается неизменным с точностью до постоянного слагаемого и пусть остается неизменной величина M . Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 12. При замене линии переменного потенциала AB в случае монотонного $h'(s)$ потенциальной линией $\varphi|_{AB} = 0$

а) $\varphi_1 < \varphi$ в $G_1 + L_1$, если $h'(s)$ возрастает, и $\varphi_1 > \varphi$, если $h'(s)$ убывает, разность $\varphi_1 - \varphi$ монотонна на $L_1 - AB - DC$;

б) при монотонных $m''(s)$, $m'(s)$ $|\vec{v}_1| < |\vec{v}|$ на линии тока наименьшего значения $h'(s)$, а при монотонных $m'(s)$, $m''(s)$ $|\vec{v}_1| > |\vec{v}|$ на другой линии тока.

Годограф T в условиях теорем 11 и 12 при $h'(s)$ возрастающем имеет вид, указанный на рис. 58, и справедливость этих теорем как и в предыдущих случаях, устанавливается с помощью рассмотрения годографов в плоскости вариации комплексного потенциала.

Пусть $h''(s)$, т. е. угол поворота на линии переменного потенциала DC , остается неизменным. Тогда справедливы следующие теоремы.

Теорема 13. При уменьшении $h'(s)$ за счет отрицательного монотонного слагаемого $h_0(s)$

а) $M_1 > M$;

б) $\varphi_1 < \varphi$ в $G_1 + L_1 - DC$;

в) при монотонных $m'(s)$, $m''(s)$ $|\vec{v}_1| > |\vec{v}|$ на линии тока наименьшего значения $h_0(s)$, на линии переменного потенциала DC и вблизи ее конца на другой линии тока.

Теорема 14. При увеличении $m'(s)$ с помощью положительного монотонно возрастающего слагаемого

а) $M_1 > M$;

б) $\varphi_1 < \varphi$ в $G_1 + L_1 - DC$;

в) при монотонных $h'(s)$, $m''(s)$ $|\vec{v}_1| > |\vec{v}|$ на линии тока наименьшего значения $h'(s)$, на линии переменного потенциала DC

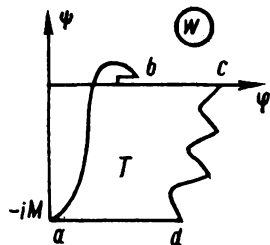


Рис. 58.

и вблизи ее конца на другой линии тока, а при монотонных $m'(s)$ и $m''(s)$ $|\vec{v}_1| > |\vec{v}|$ на обеих линиях тока и на линии переменного потенциала.

Теоремы 13, 14, как и предыдущие, доказываются на основе теоремы о сохранении области для p -аналитических и (p, q) -аналитических функций с учетом частично известных контурных условий для вариаций комплексного потенциала.

К вопросу о законе затухания и принципе Сен-Венана

При выборе конструкции валов переменного сечения важное значение имеет так называемый закон затухания напряжений, заключающийся в том, что резкое повышение напряжений, с которым встречаются при решении всех задач о концентрации напряжений, всегда сопровождается значительным уменьшением напряжений вблизи зоны концентрации. В случае кручения валов переменного сечения вблизи всякой кольцевой выточки — зоны концентрации напряжений — напряжения уменьшаются; теоретически этот закон проверен в применении к таким кольцевым выточкам, для которых известны те или иные приближенные решения [138, стр. 11, 139]. Приведенные выше теоремы сравнения кручения тел вращения и именно те их пункты, в которых говорится о поведении вектора напряжений $\vec{v}$, представляют собой математическое доказательство закона затухания в общем виде для валов произвольных сечений с произвольными выточками,

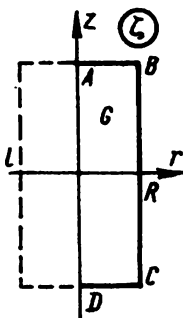


Рис. 59.

а также возможные уточнения и обобщения этого закона. Поэтому указанные теоремы сравнения, как и закон затухания, но в более полной форме, являются обоснованием рационального устройства разгружающих выточек, уменьшающих максимальные напряжения на поверхности вала. В отдельных случаях они позволяют математически обосновать известный экспериментальный принцип Сен-Венана и дать его количественную характеристику. Покажем это на одном из примеров.

Пусть дан цилиндрический вал радиуса R и длины l с торцевыми поверхностями, ортогональными к его боковой поверхности. Пусть боковая поверхность свободна от внешних усилий, на закрепленной торцевой поверхности, образованной вращением отрезка AB вокруг оси z (рис. 59), угол поворота $\varphi|_{AB} = 0$, а на другой торцевой поверхности $\varphi|_{DC} = h''(s) > 0$, где $h''(s)$ — монотонная функция длины s отрезка DC , отсчитываемой от точки D . Пусть M — заданный суммарный скручивающий момент. Требуется установить, насколько напряжения на торцевой поверхности, образованной вращением отрезка AB вокруг оси z , отличаются от напряжений на

этой поверхности, соответствующих постоянному углу поворота на обеих торцевых поверхностях при том же значении суммарного скручивающего момента. Для решения этой задачи достаточно использовать теоремы 6, 7, 8.

В самом деле, по теореме 6, если положить $\varphi|_{DC} = h'' = \text{const}$,

$$h < h'' < \tilde{h},$$

где

$$h = \min_{DC} h''(s), \quad \tilde{h} = \max_{DC} h''(s).$$

Комплексный потенциал $w = \varphi + i\psi$ в этом случае имеет вид

$$w = \varphi + i\psi = \frac{M}{R^3} \left(-\frac{4}{\mu} z + ir^4 \right) = -\frac{\mu h''}{4l} \left(-\frac{4}{\mu} z + ir^4 \right).$$

Полагая $\varphi|_{DC} = h$ и $\varphi|_{DC} = \tilde{h}$, получаем комплексные потенциалы в виде

$$w = -\frac{\mu h}{4l} \left(-\frac{4}{\mu} z + ir^4 \right), \quad \tilde{w} = -\frac{\mu \tilde{h}}{4l} \left(-\frac{4}{\mu} z + ir^4 \right).$$

Отсюда в соответствии с теоремами 7, 8 и равенствами (39) находим искомую величину вектора напряжений на закрепленной торцевой поверхности

$$\mu r \frac{h}{l} < |\vec{v}| < \mu r \frac{\tilde{h}}{l}$$

и соответствующие напряжения при постоянном угле поворота на обеих торцевых поверхностях

$$|\vec{v}_1| = \mu r \frac{h''}{l} = \frac{4M}{R^3} r.$$

Таким образом, искомая величина отклонения напряжений

$$\delta = \left| \frac{|\vec{v}| - |\vec{v}_1|}{|\vec{v}_1|} \right| \leq \frac{\tilde{h} - h}{h''} = \frac{\tilde{h} - M}{4Ml} R^3 \mu.$$

Например, при $R^3 \mu = M$, $\tilde{h} - h = 1$, $l = 10$ искомое отклонение напряжений не превосходит 2,5%, при $l = 25$ — снижается до 1,0%, вообще оно обратно пропорционально длине скручиваемого вала или расстоянию от места изменения приложенных внешних усилий.

Метод мажорантных областей в теории концентрации напряжений в валах переменного сечения

Одной из наиболее важных задач теории кручения валов переменного сечения является задача о кручении цилиндрических валов с кольцевыми выточками той или иной формы, так как правильные представления о распределении напряжений на поверх-

ности вала позволяют уменьшить величину коэффициента запаса, облегчить вес конструкций и избежать поломки их от перенапряжения [138, 140, стр. 135]. О важности и трудности этой задачи свидетельствует появление значительного количества работ, посвященных ее приближенным решениям, начиная с опубликования в 1900 г. Мичелем основных уравнений теории кручения валов переменного сечения [137]. Во всех приближенных решениях

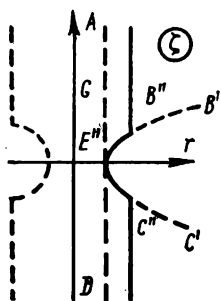


Рис. 60.

краевые условия задачи удовлетворяются не полностью, не на всей поверхности вала, а только на ее части, или не на той поверхности, для которой ставится краевая задача, и при этом, что важно заметить, не приводятся оценки погрешности решений, а также не указывается, в каком отношении они находятся с истинными значениями искомых величин, что является существенным недостатком.

Установленные выше вариационные теоремы, а также непосредственное использование теоремы о сохранении области для p -аналитических и (p, q) -аналитических функций позволяют

сравнивать решения краевых задач, соответствующих различным областям напряжений. Поэтому представляется возможным распространить предложенный нами ранее метод мажорантных областей в теории фильтрации (§ 1) на решение задач кручения валов переменного сечения. А именно: для того чтобы определить ту или иную интегральную характеристику напряженного состояния, т. е. величину, представляющую непосредственный интерес (например, максимальное значение вектора напряжений на боковой поверхности вала) при заданной или приближенно известной области напряжений G , необходимо, согласно доказанным вариационным теоремам, рассмотреть напряженные состояния в каких-либо вспомогательных областях напряжений — «мажорантных по данной интегральной характеристике» — G^0 и G_0 таких, чтобы численные значения соответствующей интегральной характеристики для G^0 и G_0 были известны или находились просто и являлись оценками искомой величины соответственно сверху и снизу. Очевидно, что получаемые таким образом решения должны быть свободны от указанного выше существенного недостатка известных приближенных решений, в которых не указываются оценки истинных значений искомых величин. Указанные выше мажорантные области всегда можно построить при помощи известных простейших напряженных состояний, и в каждой конкретной задаче весьма просто, если не требуется большой точности в определении искомых величин.

Покажем это на отдельных простейших примерах.

1. *Задача о максимальных напряжениях на боковой поверхности цилиндрического вала бесконечной длины с кольцевой выточкой гиперболической формы.* Пусть дан цилиндрический вал бесконечной длины и радиуса R , имеющий на боковой поверхности кольце-

вую выточку гиперболической формы, α — глубина выточки, 2β — ее ширина. Пусть боковая поверхность вала свободна от внешних усилий, M — заданный суммарный скручивающий момент. Требуется определить максимальное значение вектора напряжений на боковой поверхности вала.

Область напряжений G , соответствующая данному валу, имеет вид, указанный на рис. 60, где AD , $AB''E''C''D$ — линии тока. В соответствии с теоремой сравнения 2'' для оценки сверху вектора напряжений $\vec{v}$ на линиях тока AB'' , $C''D$, принимая за область G^0 полосу шириной R , получаем неравенства

$$|\vec{v}|_{AB''}, |\vec{v}|_{C''D} < \frac{4M}{R^3}. \quad (50)$$

Для оценки сверху вектора напряжений на поверхности выточки $B''E''C''$, в силу этой же теоремы 2'', можно взять область G^0 , ограниченную линиями тока AD и гиперболой $B'B''E''C''C'$ (см. рис. 60). Введя функцию Н. Е. Жуковского

$$\zeta = \frac{c}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) = \frac{c}{2} \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right) \cos \theta + i \frac{c}{2} \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right) \sin \theta,$$

где $t = \rho e^{i\theta}$, c — фокусное расстояние гиперболы $B'E''C'$, уравнение последней можем записать в виде

$$\theta = \theta_1 = \text{const}, \quad \cos \theta_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \beta^2 \alpha^{-1} (2R - \alpha)^{-1}}}, \quad c = \frac{R - \alpha}{\cos \theta_1}.$$

Система уравнений (36), в силу инвариантности по отношению к конформным преобразованиям, принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} &= \frac{1}{\left[\frac{c}{2} \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right) \right]^3} \cdot \frac{1}{\rho \cos^3 \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} &= - \frac{1}{\left[\frac{c}{2} \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right) \right]^3} \cdot \frac{\rho}{\cos^3 \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \rho}, \end{aligned}$$

откуда, вводя обозначение

$$\lambda = \lambda(R, \alpha, \beta) = \sin \theta_1 = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha(2R - \alpha) + \beta^2}}, \quad (51)$$

получаем комплексный потенциал w^0 , соответствующий G^0 :

$$w^0 = \varphi^0 + i\psi^0 = \frac{M}{\frac{2}{3} + \frac{\lambda^3}{3} - \lambda} \left[\varphi_1^0 + i \left(\frac{\sin^3 \theta}{3} - \sin \theta \right) \right].$$

Вектор напряжений в точках гиперболы $B'E''C'$ в соответствии с (39)

$$|\vec{v}^0|_{\theta=\theta_1} = \left\{ \frac{1}{r^2} \left| \frac{\partial \psi}{\partial n} \right| \right\}_{\theta=\theta_1} = \left\{ \frac{1}{r^2} \left| \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial t}{\partial \zeta} \frac{1}{t} \right| \right\}_{\theta=\theta_1},$$

или

$$|\vec{v}^0|_{\theta=\theta_1} = \frac{2M(1 - \lambda^2)^2}{\left(\frac{2}{3} + \frac{\lambda^3}{3} - \lambda \right)(R - \alpha)} \left\{ \frac{1}{\rho + \frac{1}{\rho} - 2 \cos \theta} \frac{1}{r^2} \right\}_{\theta=\theta_1}. \quad (52)$$

В частности, максимальное значение эта величина имеет у дна выточки в точке E'' :

$$|\vec{v}^0|_{E''} = \frac{4M}{(R-\alpha)^3} \Pi(\lambda), \quad (53)$$

где

$$\Pi(\lambda) = \frac{3}{4\lambda^3} \cdot \frac{(1+\lambda)^3}{\lambda+2}. \quad (54)$$

Для получения оценки снизу величины $\vec{v}$ в точке E'' область G_0 следует выбрать в виде полосы шириной $R - \alpha$. Оценки сверху

Т а б л и ц а 1

λ	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
$\Pi(\lambda)$	1	1,153	1,356	1,638	2,051	2,700	3,828	6,123	12,273	43,215

и снизу для искомой величины $\max |\vec{v}|$ на боковой поверхности вала $AB''E''C''D$ находим в виде

$$\frac{4M}{(R-\alpha)^3} < \max |\vec{v}| < \frac{4M}{(R-\alpha)^3} \Pi(\lambda), \quad (55)$$

где $\Pi(\lambda)$ и λ — коэффициенты, определенные соответственно равенствами (54) и (51). В табл. 1 представлены численные значения

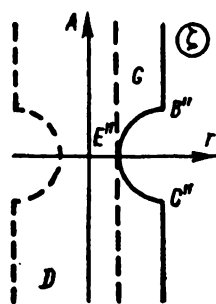


Рис. 61.

коэффициента $\Pi(\lambda)$, показывающие, что неравенства (55) являются весьма точными оценками величины максимального напряжения на боковой поверхности вала при численных значениях λ , достаточно близких к единице, т. е. при не очень большой глубине или при не очень малой ширине выточки.

2. Задача о максимальных напряжениях на боковой поверхности цилиндрического вала бесконечной длины с кольцевой выточкой круговой формы. Пусть дан цилиндрический вал бесконечной длины радиуса R , имеющий на боковой поверхности кольцевую выточку круговой формы радиуса β и глубины $\alpha \leq 2\beta$ (рис. 61). Пусть боковая поверхность свободна от внешних усилий, M — суммарный скручивающий момент¹⁷. Поставим задачу об определении $\max |\vec{v}|$ — макси-

мы радиуса β и глубины $\alpha \leq 2\beta$ (рис. 61). Пусть боковая поверхность свободна от внешних усилий, M — суммарный скручивающий момент¹⁷. Поставим задачу об определении $\max |\vec{v}|$ — макси-

¹⁷ Приближенное решение задачи о таком цилиндрическом вале в частном случае, при $\alpha = 2\beta$, получено в монографии [140] в очень сложной форме — в виде бесконечных рядов, причем в этом решении, как обычно, краевые условия полностью не удовлетворяются и строго математически обоснованные оценки погрешностей не приводятся, хотя из чисто физических соображений можно ожидать, что эти погрешности сравнительно малы.

мального значения вектора напряжений на боковой поверхности вала как величины, представляющей наиболее существенный интерес.

Как и в предыдущем случае, для оценки величины вектора напряжений $\vec{v}$ на линиях тока AB'' , $C''D$ используем неравенства (50). Оценку этой величины в точке E'' у дна выточки находим в виде

$$|\vec{v}|_{E''} > \frac{4M}{(R-\alpha)^3}. \quad (56)$$

Для оценки сверху величины $\vec{v}$ на поверхности выточки $B''E''C''$ (см. рис. 61) в соответствии с теоремой сравнения 5 можно рассмотреть область G^0 , представленную на рис. 62, где AD и $AB''E''C''D$ — линии тока, a — абсцисса точки пересечения окружностей, ортогональных к мнимой оси и к окружности $B'B''E''C''C'$, $R_0 = R - \alpha$. Для области G^0 комплексный потенциал $\omega^0 = \varphi^0 + i\psi^0$ можно найти общеизвестными способами. Полагая

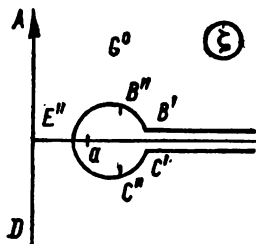


Рис. 62.

$$\omega = \rho e^{i\theta} = \frac{\zeta - a}{\zeta + a},$$

$$\zeta = r + iz = \frac{a(1 - \rho^2)}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos \theta} + i \frac{a2\rho \sin \theta}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos \theta},$$

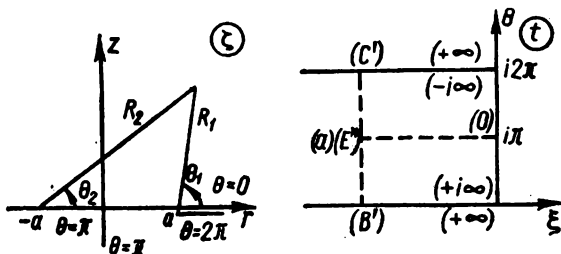


Рис. 63.

и вводя комплексную плоскость биполярных координат $t = \xi + i\theta$ (рис. 63),

$$t = \xi + i\theta = \ln \omega = \ln \frac{R_1}{R_2} + i(\theta_1 - \theta_2), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

$$R_{1,2} = \sqrt{(r \mp a)^2 + z^2}, \quad \theta_{1,2} = \arctg \frac{r}{r \mp a},$$

$$r = -\frac{a \operatorname{sh} \xi}{\operatorname{ch} \xi - \cos \theta}, \quad z = \frac{a \sin \theta}{\operatorname{ch} \xi - \cos \theta},$$

из условия

$$\rho|_{B''E''C''} = \left| \frac{R_0 - a}{R_0 + a} \right| = \left| \frac{R_0 + 2\beta - a}{R_0 + 2\beta + a} \right| = \text{const}$$

находим

$$a = \sqrt{R_0^2 + 2R_0\beta}, \quad (57)$$

$$\xi_0 = \xi |_{B^*E^*C^*} = \ln \frac{a - R_0}{a + R_0}. \quad (58)$$

Система уравнений μr^3 -аналитических функций от $\xi = r + iz$ (36) принимает вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = -\frac{1}{\mu a^3 q^2 \operatorname{sh}^3 \xi} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{1}{\mu a^3 q^2 \operatorname{sh}^3 \xi} \frac{\partial \psi}{\partial \xi},$$

где

$$q = (\operatorname{ch} \xi - \cos \theta)^{-\frac{3}{2}}. \quad (59)$$

В силу тождества

$$qL(vq) = \frac{\partial}{\partial \xi} (pq^2 v_\xi) + \frac{\partial}{\partial \theta} (pq^2 v_\theta) + vqL(q),$$

где

$$L(u) = \frac{\partial}{\partial \xi} (pu_\xi) + \frac{\partial}{\partial \theta} (pu_\theta),$$

а p — любая непрерывно дифференцируемая функция, при $\psi =$

$$= vq, \quad p = \frac{1}{q^2 \operatorname{sh}^3 \xi}$$

$$L(q) = \frac{9}{4} \cdot \frac{q}{p},$$

и уравнение для определения v принимает вид

$$v_{\xi\xi} + v_{\theta\theta} - v_\xi 3 \operatorname{cth} \xi + \frac{9}{4} v = 0. \quad (60)$$

Полагая

$$v = \alpha(\xi) \sin \frac{\theta}{2}, \quad v = \beta(\xi) \sin \frac{3\theta}{2}$$

и определяя $\alpha(\xi)$ и $\beta(\xi)$ из уравнений

$$\alpha'' - \alpha' 3 \operatorname{cth} \xi + 2\alpha = 0, \quad \beta'' - \beta' 3 \operatorname{cth} \xi = 0,$$

устанавливаем следующие частные случаи функции тока:

$$\psi_1 = q \operatorname{ch} \xi \sin \frac{\theta}{2}, \quad \psi_2 = q(1 + \operatorname{ch}^2 \xi) \sin \frac{\theta}{2},$$

$$\psi_3 = q \sin \frac{3\theta}{2}, \quad \psi_4 = q(3 \operatorname{ch} \xi - \operatorname{ch}^3 \xi) \sin \frac{3\theta}{2}.$$

Функция

$$\psi^0 = \frac{Mq}{\sqrt{2}(b-1)^2} \left\{ 3 \sin \frac{\theta}{2} [b(1 + \operatorname{ch}^2 \xi) - (1 + b^2) \operatorname{ch} \xi] + \right. \\ \left. + 3 \sin \frac{3\theta}{2} \frac{1}{b+2} [3 \operatorname{ch} \xi - \operatorname{ch}^3 \xi - 3b + b^3] \right\},$$

где

$$b = \operatorname{ch} \xi_0 = 1 + \frac{R_0}{\beta}, \quad (61)$$

равна нулю на линии тока $AB'B''E''C''C'D$ и равна $-M$ на линии тока AD . Это значит, что комплексный потенциал $w^0 = \varphi^0 + i\psi^0$ для указанной выше области G^0 имеет вид

$$w^0 = \varphi^0 + i\psi^0 = \varphi^0 + i \frac{Mq}{\sqrt{2}(b-1)^2} \left\{ 3 \sin \frac{\theta}{2} [b(1 + \operatorname{ch}^2 \xi) - (1 + b^2) \operatorname{ch} \xi] + \frac{1}{b+2} \sin \frac{3\theta}{2} [3 \operatorname{ch} \xi - \operatorname{ch}^3 \xi - 3b + b^3] \right\}. \quad (62)$$

Согласно общим формулам (39), на дуге окружности $B''E''C''$

$$\left| \vec{v}^0 \right|_{B''E''C''} = \left| \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi^0}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial n} \right|_{\xi=\xi_0} = \left| \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi^0}{\partial \xi} \frac{2a}{\zeta^2 - a^2} \right|_{\xi=\xi_0}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi^0}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_0} &= \frac{3M \operatorname{sh} \xi_0 (b+1)}{\sqrt{2}(b-1)(b-\cos \theta)^{3/2}} \left[\sin \frac{\theta}{2} - \frac{1}{b+2} \sin \frac{3\theta}{2} \right], \\ \frac{1}{r^2} \Big|_{\xi=\xi_0} &= \frac{1}{a^2} \frac{(\operatorname{ch} \xi_0 - \cos \theta)^2}{\operatorname{sh}^2 \xi_0}, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\left| \vec{v}^0 \right|_{B''E''C''} = \frac{3\sqrt{2}M}{a \operatorname{sh} \xi_0} \cdot \frac{b+1}{b-1} \sqrt{b-\cos \theta} \frac{\sin \frac{\theta}{2} - \frac{1}{b+2} \sin \frac{3\theta}{2}}{|\zeta^2 - a^2|_{\xi=\xi_0}}. \quad (63)$$

В частности, у дна выточки в точке E'' последняя величина принимает наибольшее значение:

$$\left| \vec{v}^0 \right|_{E''} = \frac{3\sqrt{2}M}{a} \cdot \frac{b+1}{(b-1)^{3/2}} \cdot \frac{b+3}{b+2} \cdot \frac{1}{a^2 - R_0^2}. \quad (64)$$

Учитывая (57) и (61), равенство (64) можно записать в виде

$$\left| \vec{v}^0 \right|_{E''} = \frac{4M}{(R-\alpha)^2} \Pi(\lambda), \quad (65)$$

где

$$\Pi(\lambda) = \sqrt{1+\lambda} \frac{1+\frac{\lambda}{2}}{1+\frac{2}{3}\lambda}, \quad \lambda = \lambda(R, \alpha, \beta) = \frac{R-\alpha}{2\beta}. \quad (66)$$

Таким образом, для $\max |\vec{v}|$ — максимального значения вектора напряжений на боковой поверхности цилиндрического вала бесконечной длины радиуса R с кольцевой выточкой круговой формы радиуса β и глубины $\alpha \leq 2\beta$ — получаем оценки сверху и снизу:

$$\frac{4M}{(R-\alpha)^3} \leq \max |\vec{v}| \leq \frac{4M}{(R-\alpha)^2} \Pi(\lambda), \quad (67)$$

где коэффициенты $\Pi(\lambda)$ и λ определяются равенствами (66). В табл. 2 приведены численные значения коэффициента $\Pi(\lambda)$,

показывающие, что оценки (67) весьма близки и определяют максимальные напряжения на боковой поверхности вала с достаточно высокой степенью точности. Например, при $R = 2$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$

$$4M < \max |\vec{v}| < 4M \cdot 1,148.$$

Приняв в качестве приближенного значения искомой величины среднее арифметическое верхней и нижней оценок, находим погрешность, не превышающую 6,8%. При $R = 2$, $\alpha = \frac{3}{2}$, $\beta = 1$ получаем искомую величину с погрешностью, не превышающей 3,5%.

Таблица 2

λ'	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$\Pi(\lambda)$	1	0,033	1,063	1,092	1,121	1,148	1,175	1,200	1,225	1,249
λ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\Pi(\lambda)$	1,273	1,485	1,667	1,829	1,978	2,116	2,246	2,368	2,485	2,596

Дальнейшее развитие в применении к задачам о кручении валов переменного сечения метод мажорантных областей получил в работах [141—147]. В частности, значительно улучшен результат по решению рассмотренной выше задачи о кручении цилиндрического вала бесконечной длины с кольцевой выточкой круговой формы.

Метод мажорантных областей можно применить также к другим задачам, связанным с p -аналитическими и (p, q) -аналитическими функциями. Например, им достаточно удобно пользоваться при решении задач о кручении призматических стержней [148]. В работах [149, 150] в связи с задачами об изгибе призматических стержней исследован вопрос о знаке вариации нормальной производной на границе области решений уравнения Пуассона в зависимости от изменения правой части уравнения и краевых условий. А. А. Скоробогатко исследовала этот вопрос в применении к решениям уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}(p u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(p u_y) = F(x, y), \quad (68)$$

где $F(x, y)$ и $p = p(x, y)$ — заданные функции от x и y , $p(x, y) > 0$. Установленные ею теоремы сравнения о знаке вариации нормальной производной решений уравнения (68) в зависимости от изменения правой части уравнения, краевых условий и характеристики $p = p(x, y)$ существенно дополняют вариационно-топологические теоремы сравнения метода мажорантных областей, так как

многие величины, имеющие важное значение непосредственно в приложениях, выражаются через нормальную производную вещественной части, соответствующей p -аналитической функции. Поэтому при решении такого рода задач с помощью указанных теорем сравнения представляется возможным заменять не только одни области другими, но и варьировать краевые условия, характеристику $p = p(x, y)$ и вещественную часть p -аналитической функции, заменяя ее функцией, не удовлетворяющей уравнению (68) при $F(x, y) = 0$.

§ 3. О ПРИМЕНЕНИИ p -АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ К ЗАДАЧАМ О БЕЗМОМЕНТНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

Однородные уравнения равновесия безмоментной оболочки, как известно, при помощи замены переменных сводятся к условиям Коши — Римана относительно соответствующих двух неизвестных функций в том и только в том случае, когда оболочка представляет собой поверхность второго порядка [151—155]. В этом случае решение задачи о безмоментном напряженном состоянии оболочки получается в замкнутом виде при помощи аналитических функций комплексного переменного.

В случае оболочки вращения произвольного вида, образующая которой описывается уравнением $r = r(x_3)$ в геодезической системе координат ($x_3 = \text{const}$ — параллели, $\beta = \text{const}$ — меридианы, рис. 64), уравнения равновесия имеют вид (например, [151])

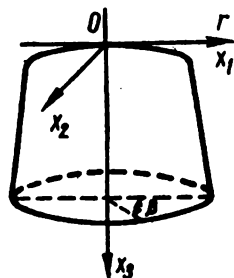


Рис. 64.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} + r r'' \frac{\partial \Psi}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} + r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} = 0, \quad (69)$$

где $r'' = \frac{d^2 r(x_3)}{dx_3^2}$. Через функции Φ и Ψ по известным формулам выражаются усилия, возникающие в оболочке [151, 152].

Рассмотрим случай оболочек вращения с положительной гауссовой кривизной ($r'' < 0$). Следуя работе [164], введем новые независимые переменные

$$x = \int \sqrt{-\frac{r''(x_3)}{r(x_3)}} dx_3, \quad y = \beta \quad (70)$$

и комплексную переменную $z = x + iy$. Тогда система уравнений (69) принимает вид

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{1}{p} \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad -\frac{\partial \Psi}{\partial y} = -\frac{1}{p} \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad (71)$$

где $p = p(x) = \sqrt{-r'' r^3}$. Это значит, что $w = w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) = -\Psi(x, y) + i\Phi(x, y)$ представляет собой p -ана-

литическую функцию комплексного переменного $z = x + iy$ с характеристикой $p = p(x) = \sqrt{-r''r^3}$.

Таким образом, решение задачи о безмоментном напряженном состоянии произвольной оболочки вращения с положительной гауссовой кривизной сводится к нахождению соответствующей p -аналитической функции комплексного потенциала.

В работе [156] рассмотрена так называемая стаканообразная оболочка, уравнение образующей которой в цилиндрической системе координат r, θ, x_3 имеет вид

$$r = r(x_3) = \sqrt{1 + \frac{1}{2cx_3}} \ln \left(1 + \frac{1}{2cx_3} \right), \quad (72)$$

где c — числовой параметр, $c > 0$ (см. рис. 64). При помощи приведенного выше метода решение сводится к нахождению p -аналитической функции $w = \varphi + i\psi$ комплексного переменного $z = x + iy$ с характеристикой $p = x^2$ и получается в замкнутой форме — в виде квадратур.

Пусть оболочка вращения с положительной гауссовой кривизной в некоторой точке A загружена сосредоточенными силой (P_1, P_2, P_3) и моментом (M_1, M_2, M_3) , где индексы 1, 2, 3 означают проекции векторов силы и момента на соответствующие оси декартовой системы координат (см. рис. 64). Тогда безмоментное напряженное состояние оболочки, как и ранее, описывается p -аналитической функцией $w = \varphi + i\psi$ комплексного переменного $z = x + iy$ с характеристикой $p = p(x) = \sqrt{-r''r^3}$, имеющей особенность в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, соответствующей точке A . В работе [157] показано, что интегральные уравнения равновесия элемента оболочки, содержащего точку A , можно записать при помощи интегралов по сопряженным переменным с характеристикой $p = p(x) = \sqrt{-r''r^3}$ в виде

$$\left. \begin{aligned} P_1 + iP_2 + \int_{\Gamma} \varphi d\tilde{Z}_1 + i\psi dZ_1 &= 0, \\ Z_1 &= -\frac{i}{r} e^{iy}, \quad \tilde{Z}_1 = ir' e^{iy}, \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

$$\left. \begin{aligned} M_2 - iM_1 + \int_{\Gamma} \varphi d\tilde{Z}_2 + i\psi dZ_2 &= 0, \\ Z_2 &= -i \frac{x_3}{r} e^{iy}, \quad \tilde{Z}_2 = -i(r - x_3 r') e^{iy}, \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

$$\left. \begin{aligned} P_3 - iM_3 + \int_{\Gamma} \varphi d\tilde{Z}_3 + i\psi dZ_3 &= 0, \\ Z_3 &= -y + i \int \frac{dx}{p}, \quad \tilde{Z}_3 = -y + i \int p dx, \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

где $r = r(x_3)$ — уравнение образующей оболочки вращения, $r' = \frac{dr(x_3)}{dx_3}$, Γ — замкнутый контур в плоскости $z = x + iy$, соответствующий замкнутому контуру, ограничивающему элемент оболочки, содержащей точку A . В частности, для рассмотренной выше стаканообразной оболочки соответствующие сопряженные переменные с характеристикой $p = x^2$ имеют вид

$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= -\frac{\sqrt{c}}{x} (e^z - e^{\bar{z}}), & \bar{Z}_1 &= -i\sqrt{c} [(x-1)e^z + (x+1)e^{\bar{z}}], \\ Z_2 &= \frac{1}{2\sqrt{c}} \frac{i}{x} e^z, & \bar{Z}_2 &= \frac{i}{2\sqrt{c}} (x-1)e^z, \\ Z_3 &= -y - \frac{i}{x}, & \bar{Z}_3 &= -y + i\frac{x^3}{3}, \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

и все преобразования и вычисления, связанные с этими сопряженными переменными, становятся весьма компактными.

§ 4. МЕТОД p -АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Вопрос о применении обобщенных аналитических функций в осесимметричной теории упругости был поставлен впервые в работе [18]. Выяснено, что, для того чтобы провести как можно большую аналогию с методом Колосова — Мусхелишвили в плоской теории упругости, целесообразнее всего принять за основу p -аналитические функции от $z = x + iy$ с характеристикой $p = x$. Установлены основные формулы осесимметричной теории упругости, в основном аналогичные известным формулам Колосова — Мусхелишвили для плоского напряженного состояния. Отличие состоит лишь в том, что вместо двух аналитических функций от z в них подставляются две x -аналитические функции от z . В работе [10] построен однозначно и в явном виде обратимый интегральный оператор, преобразующий формулы Колосова — Мусхелишвили в формулы осесимметричной теории упругости и соответствующее плоское напряженное состояние в осесимметричное напряженное состояние.

Таким образом, применение p -аналитических функций от $z = x + iy$ с характеристикой $p = x$ приводит к вполне определенному методу решения задач осесимметричной теории упругости — методу p -аналитических функций в осесимметричной теории упругости. Развитие этого метода возможно в трех направлениях:

1) использование математического аппарата, и прежде всего интегральных представлений p -аналитических функций от $z = x + iy$ с характеристикой $p = x$;

2) сведение осесимметричных задач теории упругости к плоским или к задачам специального вида в классе аналитических функций;

3) использование обобщенного интеграла типа Коши (гл. 1, § 4) для x -аналитических функций от z и установленных нами формул осесимметричной теории упругости, позволяющее сводить осесимметричные задачи к интегральным уравнениям, аналогично тому, как это делается при помощи обычного интеграла типа Коши и формул Колосова — Мусхелишвили в плоской теории упругости [158].

Основные формулы осесимметричной теории упругости

Выведем основные формулы осесимметричной теории упругости [18, 10, 11, 159].

Пусть ось z пространственной системы координат x, y, z совпадает с осью симметрии тела вращения, подверженного воздействию усилий, симметричных относительно оси вращения тела; r, θ, z — цилиндрическая система координат (см. рис. 43), $u = u(r, z)$, $v = v(r, z)$, $w = w(r, z)$ — компоненты вектора смещений в направлении осей r, θ, z ; $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{r\theta}, \tau_{rz}, \tau_{\theta z}$ — общепринятые обозначения для компонент тензора напряжений; $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z, \gamma_{r\theta}, \gamma_{rz}, \gamma_{\theta z}$ — компоненты тензора деформаций $\vartheta = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z$; λ, μ — упругие постоянные Ламэ. Тогда уравнения статики упругого тела в перемещениях при отсутствии объемных сил, как известно (например, [136, 140]), запишутся следующим образом:

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial \vartheta}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} \right) = 0, \quad (77)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial \vartheta}{\partial z} - \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right] = 0, \quad (78)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right) = 0. \quad (79)$$

Компоненты тензора деформаций, в силу независимости вектора смещений от θ , имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}, & \varepsilon_\theta &= \frac{u}{r}, & \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}, & \gamma_{rz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}, & \gamma_{\theta z} &= \frac{\partial v}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

закон Гука —

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \lambda \vartheta + 2\mu \varepsilon_r, & \sigma_\theta &= \lambda \vartheta + 2\mu \varepsilon_\theta, & \sigma_z &= \lambda \vartheta + 2\mu \varepsilon_z, \\ \tau_{r\theta} &= \mu \gamma_{r\theta}, & \tau_{rz} &= \mu \gamma_{rz}, & \tau_{\theta z} &= \mu \gamma_{\theta z}. \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

Из равенств (77) — (81) следует, что общее напряженное состояние тела вращения, симметричное относительно оси z , можно рассматривать как наложение двух независимых напряженных состояний. Первое из этих состояний, называемое круговой симметрией, описывается уравнениями (77), (78) при условии, что $v = 0$,

и, следовательно, в этом случае равенства (81) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \lambda \vartheta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \sigma_\theta = \lambda \vartheta + 2\mu \frac{u}{r}, \quad \sigma_z = \lambda \vartheta + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \tau_{rz} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right), \quad \tau_{r\theta} = \tau_{z\theta} = 0, \quad \vartheta = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (81')$$

Второе из указанных напряженных состояний, называемое кручением, описывается уравнением (79) при выполнении условий $u = w = 0$. В этом случае уравнения (81) записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} \tau_{r\theta} &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right), \quad \tau_{z\theta} = \mu \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \sigma_r &= \sigma_\theta = \sigma_z = \tau_{rz} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (81'')$$

Введя функцию кручения $\varphi = \frac{v}{r}$, из равенств (81'') получаем

$$\tau_{r\theta} = \mu r \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad \tau_{z\theta} = \mu r \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

а из уравнения (79) —

$$\tau_{r\theta} = \mu r \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \tau_{z\theta} = \mu r \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (82)$$

Таким образом, напряженное состояние кручения полностью описывается μr^2 -аналитическими функциями $w = \varphi + i\psi$ комплексного переменного $\zeta = r + iz$. Существенное использование свойств r -аналитических функций (и особенно топологических) при решении задач о кручении показано в § 2. Теперь рассмотрим напряженное состояние круговой симметрии, т. е. систему уравнений (77), (78), (81'). Покажем, что общее решение системы уравнений (77), (78), (81') можно представить в виде следующих формул осесимметричной теории упругости:

$$2\mu(w - iU) = k\Phi(\zeta) - 2z \frac{\partial \bar{\Phi}(\zeta)}{\partial z} + \bar{\Psi}(\zeta), \quad (83)$$

$$R^* + iZ^* = [\Phi(\zeta) + 2z \frac{\partial \bar{\Phi}(\zeta)}{\partial z} - \bar{\Psi}(\zeta)]_c - 2\mu \int_c \frac{u}{r} dz, \quad (84)$$

где $k = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}$, $U = ru$, а $\Phi(\zeta) = P + iQ$ и $\Psi(\zeta) = R + iS$ — произвольные r -аналитические функции комплексного переменного $\zeta = r + iz$,

$$\left. \begin{aligned} R^* &= \int_c R_n ds = \int_c -\tau_{rz} dr + \sigma_r dz, \\ Z^* &= \int_c r Z_n ds = \int_c -r \sigma_z dr + r \tau_{rz} dz, \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

C — гладкий контур, R_n и Z_n — проекции на оси r и z усилий, приложенных к C со стороны правой нормали к C (рис. 65), $[]_C$ — приращение величины, стоящей в скобках, при обходе контура C .

Отметим вначале, что формулу (84) можно записать в следующей эквивалентной форме:

$$R_1^* + iZ_1^* = \left[\Phi(\zeta) + 2z \frac{\partial \bar{\Phi}(\zeta)}{\partial z} - \bar{\Psi}(\zeta) \right]_C + \int_C \frac{(k+1)Q - D}{r^2} dz, \quad (84')$$

где

$$R_1^* = R^* + \int_C \frac{Z^*}{r^2} dz, \quad (84'')$$

$$D = \operatorname{Im} \left[\Phi(\zeta) + 2z \frac{\partial \bar{\Phi}(\zeta)}{\partial z} - \bar{\Psi}(\zeta) \right]_{\zeta=\zeta_0}, \quad (84''')$$

ζ_0 — начальная точка контура C .

В самом деле, из (83) и (84) находим

$$Z^* - 2\mu U = (k+1)Q - \operatorname{Im} \left[\Phi(\zeta) + 2z \frac{\partial \bar{\Phi}(\zeta)}{\partial z} - \bar{\Psi}(\zeta) \right]_{\zeta=\zeta_0}$$

или

$$2\mu \frac{u}{r} = -\frac{k+1}{r^2} Q + \frac{D}{r^2} + Z^*.$$

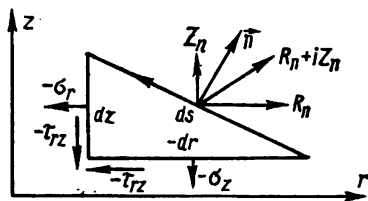


Рис. 65.

Подставляя это выражение в (84), получаем равенство (84'). Если точка ζ_0 фиксирована, можно, не меняя вектора смещений и тензора напряжений, выбрать мнимые части функций $\Phi(\zeta)$ и $\Psi(\zeta)$ так, чтобы постоянная D в формуле (84') равнялась нулю. Для этого достаточно к мнимым частям $\Phi(\zeta)$ и $\Psi(\zeta)$

прибавить постоянные c_1 и c_2 такие, что $kc_1 - c_2 = 0$, $c_1 + c_2 = -D$.

Докажем теперь формулы (83), (84). Полагая $\Omega = r \left(\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial z} \right)$, можно записать систему уравнений (77), (78) в виде

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial \vartheta}{\partial r} - \frac{\mu}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0, \quad (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \vartheta}{\partial z} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} = 0. \quad (86)$$

Из этих уравнений следует, что $(\lambda + 2\mu) \vartheta + i\mu \Omega$ является r -аналитической функцией от $\zeta = r + iz$. Поэтому

$$(\lambda + 2\mu) \vartheta + i\mu \Omega = (k+1) F(\zeta) = (k+1)(p + iq), \quad (87)$$

где $k = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}$, $F(\zeta)$ — произвольная r -аналитическая функция от $\zeta = r + iz$. Из (87) следует, что

$$\mu \vartheta = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \operatorname{Re} (k+1) F(\zeta) = (k-1) \operatorname{Re} F(\zeta),$$

и поэтому равенство (87) принимает вид

$$\mu \vartheta + i\mu\Omega = kF(\zeta) - \bar{F}(\zeta).$$

Полагая $U = ru$, последнее равенство можем записать в виде

$$\mu \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + i \left(r \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial U}{\partial z} \right) \right] = kF(\zeta) - \bar{F}(\zeta). \quad (88)$$

В силу определения операторной производной по сопряженной переменной Z ((89), гл. 1) при условии, что Z и $\bar{Z}$ определяются равенствами (80), если $\omega = \alpha + i\beta = r + iz$ (гл. 1, § 3), равенств (88) можно записать

$$2\mu \frac{\hat{d}_p(\omega - iU)}{dZ} = kF(\zeta) - \bar{F}(\zeta), \quad \omega = \alpha + i\beta = r + iz. \quad (89)$$

Отсюда

$$2\mu(\omega - iU) = k \int F(\zeta) d_p Z - \int \bar{F}(\zeta) d_p Z. \quad (90)$$

Но на основании формулы (95''') гл. 1

$$\int \bar{F}(\zeta) d_p Z = 2\beta \bar{F}(\zeta) - \bar{\Psi}(\zeta), \quad \beta = z,$$

где $\Psi(\zeta) = R + iS$ — произвольная r -аналитическая функция от $\zeta = r + iz$. Поэтому, если положить

$$\int F(\zeta) d_p Z = \Phi(\zeta) = P + iQ, \quad F(\zeta) = \frac{\hat{d}_p \Phi(\zeta)}{dZ} = \frac{\partial \Phi(\zeta)}{\partial \beta},$$

равенство (90) принимает вид

$$2\mu(\omega - iU) = k\Phi(\zeta) - 2z \frac{\partial \bar{\Phi}(\zeta)}{\partial z} + \bar{\Psi}(\zeta).$$

Формула (83) доказана.

Из условия равновесия (рис. 65) вытекает, что

$$R_n = -\tau_{rz} \frac{dr}{ds} + \sigma_r \frac{dz}{ds}, \quad (91)$$

$$Z_n = -\sigma_z \frac{dr}{ds} + \tau_{rz} \frac{dz}{ds}, \quad (92)$$

и, следовательно, равенства (85) справедливы. В силу (87)

$$\mu \left(\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{k+1}{r} q, \quad \vartheta = \frac{k+1}{\lambda+2\mu} p, \quad p = \frac{\partial P}{\partial z}, \quad q = \frac{\partial Q}{\partial z}. \quad (87')$$

Компоненты тензора напряжений в соответствии с (81') имеют вид

$$\tau_{rz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) = \frac{k+1}{r} q + \frac{2\mu}{r} \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{k+1}{r} q + 2\mu \frac{\partial w}{\partial r},$$

$$\sigma_z = \lambda \vartheta + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} = \lambda \vartheta + 2\mu \left(\vartheta - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \right) = (\lambda + 2\mu) \vartheta - 2\mu \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} = \\ = (k+1) p - 2\mu \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r},$$

$$\sigma_r = (\lambda + 2\mu) \vartheta - 2\mu \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{u}{r} \right) = (k+1) p - 2\mu \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{u}{r} \right).$$

Подставляя эти выражения в (85) и учитывая, что $p = \frac{\partial P}{\partial z}$, $q = \frac{\partial Q}{\partial z}$, находим

$$R^* = \int_c \left[(k+1) \frac{\partial P}{\partial r} - 2\mu \frac{\partial w}{\partial r} \right] dr + \left[(k+1) \frac{\partial P}{\partial z} - 2\mu \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{u}{r} \right) \right] dz,$$

$$Z^* = \int_c \left[(k+1) \frac{\partial Q}{\partial r} + 2\mu \frac{\partial U}{\partial r} \right] dr + \left[(k+1) \frac{\partial Q}{\partial z} + 2\mu \frac{\partial U}{\partial z} \right] dz,$$

или

$$R^* = [(k+1) P - 2\mu w]_c - 2\mu \int_c \frac{u}{r} dz,$$

$$Z^* = [(k+1) Q + 2\mu U]_c,$$

следовательно,

$$R^* + iZ^* = [(k+1) \Phi - 2\mu (w - iU)]_c - 2\mu \int_c \frac{u}{r} dz. \quad (93)$$

Подставляя далее в (93) вместо $2\mu (w - iU)$ правую часть равенства (83), получаем формулу (84). Таким образом, доказана справедливость второй основной формулы осесимметричной теории упругости — (84).

При помощи (83), (84) можно получить другие формулы, аналогичные основным формулам плоской теории упругости.

Положим

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r} \operatorname{Im} \left[\Phi(\zeta) + 2z \frac{\partial \bar{\Phi}(\zeta)}{\partial z} - \bar{\Psi}(\zeta) \right] &= \frac{\partial \Omega}{\partial r}, \\ - \operatorname{Re} \left[\Phi(\zeta) + 2z \frac{\partial \bar{\Phi}(\zeta)}{\partial z} - \bar{\Psi}(\zeta) \right] &= \frac{\partial \Omega}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

или

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial r} &= \frac{1}{r} \left(Q - 2z \frac{\partial Q}{\partial z} + S \right), \\ \frac{\partial \Omega}{\partial z} &= - \left(P + 2z \frac{\partial P}{\partial z} - R \right), \end{aligned} \right\} \quad (94')$$

где Ω — вещественная функция от r и z . Введем r -аналитические функции от $\zeta = r + iz$

$$\tilde{P} + i\tilde{Q} = \hat{\int} (P + iQ) d_r Z, \quad \tilde{R} + i\tilde{S} = \hat{\int} (R + iS) d_r Z, \quad (95)$$

где Z — сопряженная переменная, соответствующая характеристике $\rho = r$ (см. (80) гл. 1). В силу равенства (94) гл. 1

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial z} + i \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial z} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial r} + ir \frac{\partial \tilde{P}}{\partial r} = P + iQ, \\ \frac{\partial \tilde{R}}{\partial z} + i \frac{\partial \tilde{S}}{\partial z} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial r} + ir \frac{\partial \tilde{R}}{\partial r} = R + iS. \end{aligned} \right\} \quad (96)$$

При помощи этих тождеств легко находим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial r} &= \frac{\partial \tilde{P}}{\partial r} - 2z \frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial r \partial z} + \frac{\partial \tilde{R}}{\partial r}, \\ \frac{\partial \Omega}{\partial z} &= -\frac{\partial \tilde{P}}{\partial z} - 2z \frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial z^2} + \frac{\partial \tilde{R}}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (97)$$

следовательно, функция Ω выражается через r -гармонические функции от $\zeta = r + iz$ $\tilde{P}$ и $\tilde{T} = \tilde{P} + \tilde{R}$:

$$\Omega = -2z \frac{\partial \tilde{P}}{\partial z} + \tilde{T}, \quad \tilde{T} = \tilde{P} + \tilde{R}. \quad (98)$$

Формулы (83) и (84) принимают вид

$$\begin{aligned} 2\mu(\omega - iU) &= -i \left(r \frac{\partial \Omega}{\partial r} + i \frac{\partial \Omega}{\partial z} \right) + (k+1) \Phi(\zeta) = \\ &= -i \left(r \frac{\partial \Omega}{\partial r} + i \frac{\partial \Omega}{\partial z} \right) + (k+1) \left(\frac{\partial \tilde{P}}{\partial z} + ir \frac{\partial \tilde{P}}{\partial r} \right), \end{aligned} \quad (99)$$

$$R^* + iZ^* = i \left[r \frac{\partial \Omega}{\partial r} + i \frac{\partial \Omega}{\partial z} \right]_C - 2\mu \int_C \frac{u}{r} dz, \quad (100)$$

при этом

$$\Delta_1 \Omega = -4 \frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial z^2}, \quad \Delta_1 \tilde{P} = 0, \quad \Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}. \quad (101)$$

Равенства (99), (100) следует рассматривать как общее решение уравнений осесимметричной теории упругости в смещениях и напряжениях. В соответствии с (81'), (85), (87'), (99), (100) компоненты тензора напряжений имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\partial R^*}{\partial z} = -\frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} + \frac{k+1}{r^2} Q, \\ \sigma_z &= -\frac{1}{r} \frac{\partial Z^*}{\partial r} = -\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r}, \quad \tau_{rz} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r \partial z}, \\ \sigma_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} - \frac{k+1}{r^2} Q + \frac{2\lambda}{\lambda+\mu} \frac{\partial P}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (102)$$

Учитывая (96) — (98) и полагая $U^* = r \frac{\partial \Omega}{\partial r} = -2z \frac{\partial \Omega}{\partial z} + T$, $T = Q + S$, на основании (101) получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(-r \frac{\partial \Omega}{\partial r} + 4Q \right), \quad \Delta_2 U^* = -4 \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}, \\ \Delta_2 \Delta_2 U^* &= 0, \quad \Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}. \end{aligned} \right\} \quad (103)$$

Подставляя эти значения в равенства (102), находим общее решение¹⁸ уравнений осесимметричной теории упругости в напряжениях, выраженное через две $\frac{1}{r}$ -гармонические функции Q и $T = Q + S$ от комплексной переменной $\zeta = r + iz$,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(-2z \frac{\partial Q}{\partial z} + T - 4Q \right) = \frac{1}{r} \left(-2z \frac{\partial Q}{\partial z} + T \right) + \frac{k+1}{r^2} Q, \\ \sigma_z &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(-2z \frac{\partial Q}{\partial z} + T \right), \quad \tau_{rz} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left(-2z \frac{\partial Q}{\partial z} + T \right), \\ \sigma_\theta &= \frac{1}{r^2} \left(-2z \frac{\partial Q}{\partial z} + T \right) - \frac{k+1}{r^2} Q - \frac{2\lambda}{\lambda+\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial Q}{\partial r}. \end{aligned} \right\} \quad (104)$$

Из (99) находим

$$2\mu(w - iu) = \frac{\partial}{\partial z} (\Omega + (k+1)\tilde{P}) - i \frac{\partial}{\partial r} (\Omega - (k+1)\tilde{P}).$$

Полагая $-k\tilde{P} + \tilde{R} = \chi$, получаем общее решение¹⁹ уравне-

¹⁸ Аналогично общее решение уравнений плоской теории упругости в напряжениях $\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$, $\sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$, $U = 2x\varphi + \psi$, где φ и ψ — гармонические функции от x и y , можно представить в виде

$$\sigma_x = 4\rho - \frac{\partial}{\partial x} (2xp + q), \quad \sigma_y = \frac{\partial}{\partial x} (2xp + q), \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial}{\partial y} (2xp + q),$$

где ρ и q — произвольные гармонические функции от x и y ,

$$\rho = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad q = 2\varphi + \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

¹⁹ Аналогично общее решение уравнений плоской теории упругости в смещениях [158]

$$2\mu(u + iw) = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y} \right) + (k+1)\varphi(z),$$

где $\varphi(z) = \rho + ip_1$ — аналитическая функция от $z = x + iy$, $U = 2xp + \psi$ — гармоническая функция от x и y , можно представить в виде

$$2\mu(u + iw) = -\frac{\partial}{\partial x} (2xp + q) + 2(k+1)\rho - i \frac{\partial}{\partial y} (2xp + q),$$

где ρ и q — произвольные гармонические функции $q = \psi + (k+1)P$,

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\rho_1.$$

ний осесимметричной теории упругости в смещениях, выраженное через две r -гармонические функции P и χ ,

$$2\mu(u + iw) = \frac{\partial}{\partial r}(-2zP + \chi) + i \left[\frac{\partial}{\partial z}(-2zP + \chi) + (2k + 1)P \right]. \quad (105)$$

Точно так же из основных формул (83) и (84) можно получить известные формы общих решений уравнений осесимметричной теории упругости [137, 160—167]. Например, полагая $U^* = -r \frac{\partial \Omega}{\partial r}$, $\chi^* = -4Q$ и учитывая тождество $k + 1 = 4(1 - \sigma)$ ($\sigma = \frac{2\lambda}{\lambda + \mu}$ — коэффициент Пуассона), непосредственно из (104) и (103) находим равенства

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(U^* + \chi^*) - \frac{U^*}{r^2} - \frac{1 - \sigma}{r^2} \chi^*, \\ \sigma_z &= -\frac{1}{r} \frac{\partial U^*}{\partial r}, \quad \tau_{rz} = \frac{1}{r} \frac{\partial U^*}{\partial z}, \\ \Delta_2 U^* &= \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2}, \quad \Delta_2 \chi = 0, \end{aligned} \right\} \quad (106)$$

полученные ранее в работе [163] в виде следствия из общего решения уравнений теории упругости в форме Гродского [164].

Приведем еще некоторые эквивалентные формы основных формул осесимметричной теории упругости (83), (84), (84'). Для этого введем вместо независимой комплексной переменной $\zeta = r + iz$ новую комплексную переменную $z = x + iy$. Тогда основные формулы (83), (84), (84') примут вид

$$2\mu(w - iU) = k\Phi(z) - 2y \frac{\partial \bar{\Phi}(z)}{\partial y} + \bar{\Psi}(z), \quad (107)$$

$$R^* + iZ^* = \left[\Phi(z) + 2y \frac{\partial \bar{\Phi}(z)}{\partial y} - \bar{\Psi}(z) \right]_c - 2\mu \int_c \frac{u}{x} dy, \quad (108)$$

$$R_1^* + iZ^* = \left[\Phi(z) + 2y \frac{\partial \bar{\Phi}(z)}{\partial y} - \bar{\Psi}(z) \right]_c + \int_c \frac{(k+1)Q - D}{x^2} dy, \quad (108')$$

где $\Phi(z) = P + iQ$ и $\Psi(z) = R + iS$ — произвольные x -аналитические функции от $z = x + iy$.

В соответствии с замечанием 2 § 11 гл. 1 функция

$$F(z) = -x \frac{\partial \Phi(z)}{\partial x} - y \frac{\partial \Phi(z)}{\partial y} - \frac{1}{2} \bar{\Phi}(z), \quad (109)$$

как и функция $\Phi(z)$, является x -аналитической. Учитывая это, основные формулы (107), (108), (108') можно записать следующим образом:

$$2\mu(w - iU) = (k+1)\Phi(z) + 2x \frac{\partial \bar{\Phi}(z)}{\partial x} + \bar{\Psi}_1(z), \quad (110)$$

$$R^* + iZ^* = - \left[2x \frac{\partial \bar{\Phi}(z)}{\partial x} + \bar{\Psi}_1(z) \right]_c - 2\mu \int_c \frac{u}{x} dy, \quad (111)$$

$$R_1^* + iZ^* = - \left[2x \frac{\partial \bar{\Phi}(z)}{\partial x} + \bar{\Psi}_1(z) \right]_c + 2\mu \int_c \frac{(k+1)Q - D}{x} dy, \quad (111')$$

где $\Phi(z) = P + iQ$ — та же функция, что и в (83), (84), (84'), $\Psi_1(z) = R_1 + iS_1 = \Psi(z) - 2x \frac{\partial \Phi(z)}{\partial x} - 2y \frac{\partial \Phi(z)}{\partial y} - \bar{\Phi}(z)$ — произвольная x -аналитическая функция.

Как следствие из (110) можно записать равенства вида (см. [166])

$$\left. \begin{aligned} 2\mu u &= \frac{\partial P^*}{\partial x} + \frac{\partial Q^*}{\partial x} - (k+1) \frac{Q^*}{x}, \\ 2\mu w &= \frac{\partial P^*}{\partial y} + \frac{\partial Q^*}{\partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (110')$$

где P^* и Q^* — произвольные соответственно x - и $\frac{1}{x}$ -гармонические функции от x и y .

В самом деле, из (110) находим

$$2\mu u = - (k+1) \frac{Q}{x} + 2 \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{1}{x} S_1,$$

$$2\mu w = (k+1)P + 2x \frac{\partial P}{\partial x} + R_1.$$

Полагая $2Q = Q^*$, $(k+1)\bar{P} + \bar{R}_1 = P^*$,

$$P + iQ = \frac{\partial}{\partial y} (\bar{P} + i\bar{Q}), \quad R_1 + iS_1 = \frac{\partial}{\partial y} (\bar{R}_1 + i\bar{S}_1),$$

где $\bar{P} + i\bar{Q}$, $\bar{R}_1 + i\bar{S}_1$ — произвольные x -аналитические функции, получаем равенства (110'). При этом в силу (111) для компонент тензора напряжений выполняются равенства

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= - \frac{\partial^2}{\partial y^2} (P^* + Q^*) - \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial y} (P^* + Q^*) - \frac{k+1}{2x} \frac{\partial Q^*}{\partial x} + \frac{k+1}{x^2} Q^*, \\ \sigma_y &= - \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left[x \frac{\partial P^*}{\partial x} + x \frac{\partial Q^*}{\partial x} \right] + \frac{k+1}{2x} \frac{\partial Q^*}{\partial x}, \\ \tau_{xy} &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (P^* + Q^*) - \frac{k+1}{2x} \frac{\partial Q^*}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (110'')$$

Разделив мнимые части левых и правых частей основных формул осесимметричной теории упругости (107), (108), (108') на x , можно записать их в виде

$$2\mu(w - iu) = k\Phi^*(z) - 2y \frac{\partial \bar{\Phi}^*(z)}{\partial y} + \bar{\Psi}^*(z), \quad (112)$$

$$R^* + i \frac{1}{x} Z^* = \left[\Phi^*(z) + 2y \frac{\partial \bar{\Phi}^*(z)}{\partial y} - \bar{\Psi}^*(z) \right]_C - 2\mu \int_C \frac{u}{x} dy, \quad (113)$$

$$R_1^* + i \frac{1}{x} Z^* = \left[\Phi^*(z) + 2y \frac{\partial \bar{\Phi}^*(z)}{\partial y} - \bar{\Psi}^*(z) \right]_C + \int_C \frac{(k+1)Q-D}{x^2} dy, \quad (113')$$

где $\Phi^*(z)$, $\Psi^*(z)$ — присоединенные x -аналитические функции, удовлетворяющие уравнению (замечание 2 § 11 гл. 1)

$$\frac{\hat{d}f^*(z)}{dz} = \frac{1}{4x} (\bar{f}^* - f^*). \quad (114)$$

Основные формулы (107), (108), (108') можно записать также в виде

$$2\mu(w - iu) = \left(k + \frac{1}{2}\right) \Phi^*(z) + iz \frac{\partial \bar{\Phi}^*(z)}{\partial y} + \bar{\Psi}_2^*(z), \quad (115)$$

$$R^* + i \frac{1}{x} Z^* = \left[\frac{1}{2} \Phi^*(z) - iz \frac{\partial \bar{\Phi}^*(z)}{\partial y} - \bar{\Psi}_2^*(z) \right]_C - 2\mu \int_C \frac{u}{x} dy, \quad (116)$$

$$R_1^* + i \frac{1}{x} Z^* = \left[\frac{1}{2} \Phi^*(z) - iz \frac{\partial \bar{\Phi}^*(z)}{\partial y} - \bar{\Psi}_2^*(z) \right]_C + \int_C \frac{(k+1)Q-D}{x^2} dy, \quad (116')$$

где $\Psi_2^*(z) = \Psi^*(z) + F^*(z)$, $\Phi^*(z)$ и $\Psi^*(x)$ — те же функции, что и в (112), (113), (113'), $\Psi_2^*(z)$ — присоединенная x -аналитическая функция по отношению к функции

$$\Psi_2(z) = \Psi(z) - x \frac{\partial \Phi(z)}{\partial x} - y \frac{\partial \Phi(z)}{\partial y} - \frac{1}{2} \bar{\Phi}(z),$$

$F^*(z)$ — присоединенная x -аналитическая функция по отношению к функции $F(z)$, определенной равенством (109) (см. замечание 2 § 11 гл. 1),

$$F^*(z) = iz \frac{\partial \Phi^*(z)}{\partial y} - \frac{1}{2} \bar{\Phi}^*(z), \quad (109')$$

Переходя от (112), (113), (113') к комплексно-сопряженным равенствам, при помощи (109), (109') устанавливаем, что основные формулы осесимметричной теории упругости можно записать в следующей эквивалентной форме:

$$2\mu(w + iu) = 2(-y + ikz) \Phi_1^*(z) + \Psi_3^*(z), \quad (117)$$

$$R^* - i \frac{1}{x} Z^* = [2ix\Phi_1^*(z) - \Psi_4^*(z)]_C - 2\mu \int_C \frac{u}{x} dy, \quad (118)$$

$$R_1^* - i \frac{1}{x} Z^* = [2ix\Phi_1^*(z) - \Psi_4^*(z)]_C + \int_C \frac{(k+1)Q-D}{x^2} dy, \quad (118')$$

где $\Phi_1(z) = P_1 + iQ_1 = \frac{\partial \Phi(z)}{\partial y}$ — произвольная x -аналитическая функция, $\Psi_3(z) = R_3 + iS_3$ и $\Psi_4(z) = R_4 + iS_4$ — произвольные x -аналитические функции, связанные друг с другом соотношениями

$$\Psi_3(z) = \Psi(z) - 2kF(z), \quad \Psi_4(z) = \Psi(z) + 2F(z), \quad (119)$$

$$Q = \int -xP_1 dx + Q_1 dy, \quad (120)$$

$F(z)$ определяется равенством (109), $\Psi(z)$ имеет тот же смысл, что и в основных формулах (107), (108), (108'), $\Phi_1^*(z)$, $\Psi_3^*(z)$, $\Psi_4^*(z)$ — присоединенные x -аналитические функции, соответствующие функциям $\Phi_1(z)$, $\Psi_3(z)$, $\Psi_4(z)$, т. е. получающиеся при делении их мнимых частей на x .

Замечание 1. Пусть область G в правой полуплоскости $z = x + iy$, являющаяся осевым сечением осесимметрично деформируемого тела, в своей границе имеет отрезок L или n отдельных отрезков $L, L_1, L_2, \dots, L_{n-1}$ мнимой оси. Тогда, поскольку $U = xu$ и Z^* определяется вторым из равенств (85), на каждом из указанных отрезков $U = 0$, $Z^* = 0$ или в силу (107) и (108)

$$\operatorname{Im} \left(k\Phi(z) - 2y \frac{\partial \bar{\Phi}(z)}{\partial y} + \bar{\Psi}(z) \right)_{L, L_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \quad (121)$$

$$\operatorname{Im} \left[\Phi(z) + 2y \frac{\partial \bar{\Phi}(z)}{\partial y} - \bar{\Psi}(z) \right]_{L, L_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n-1. \quad (122)$$

Из (122) находим

$$\operatorname{Im} \left(\Phi(z) + 2y \frac{\partial \bar{\Phi}(z)}{\partial y} - \bar{\Psi}(z) \right)_{L, L_j} = c, \quad c_j, \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \quad (122')$$

где $c, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$ — постоянные, а из (121) и (122') —

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Im} \Phi(z)|_L &= \frac{1}{k+1} c, \quad \operatorname{Im} \Psi(z)|_L = -\frac{k}{k+1} c, \\ \operatorname{Im} \Phi(z)|_{L_j} &= \frac{1}{k+1} c_j, \quad \operatorname{Im} \Psi(z)|_{L_j} = -\frac{k}{k+1} c_j, \\ j &= 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned} \right\} \quad (123)$$

При этом, не изменяя вектора смещения и напряжений, одну из постоянных $c, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$ можем считать равной нулю.

Установленные выше формулы осесимметричной теории упругости составляют основу метода p -аналитических функций в осесимметричной теории упругости. При помощи этих формул краевые задачи о напряженном состоянии круговой симметрии сводятся к вполне определенным краевым задачам x -аналитических функций от $z = x + iy$. Согласно результату, полученному в работе [168], формула (107) остается справедливой для случая осесимметричных движений вязких жидкостей и при этом все искомые величины выражаются через две x -аналитические функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$.

Отметим, что если ввести x -аналитические функции

$$\Psi_3(z) = \tilde{R}_3 + i\tilde{S}_3, \quad \tilde{\Psi}_4(z) = \tilde{R}_4 + i\tilde{S}_4, \quad (124)$$

такие, что

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} (\tilde{R}_3 + i\tilde{S}_3) &= R_3 + iS_3 = \Psi_3(z), \\ \frac{\partial}{\partial y} (\tilde{R}_4 + i\tilde{S}_4) &= R_4 + iS_4 = \Psi_4(z), \end{aligned} \right\} \quad (124')$$

то из формул (117), (118), (118') можно получить формы общего решения уравнений осесимметричной теории упругости в смещениях или в напряжениях, выраженные через две x -гармонические или две $\frac{1}{x}$ -гармонические, или x - и $\frac{1}{x}$ -гармонические функции от x , y , в том числе некоторые формы общего решения, представляющие интерес с точки зрения численных методов математики. Например, формулу (117) можно записать в виде

$$2\mu(w + iv) = (-2(k+1)y + i2kx) \left(\frac{\partial P}{\partial y} + i \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial \tilde{R}_3}{\partial y} + i \frac{\partial \tilde{R}_3}{\partial x}, \quad (117')$$

где P и $\tilde{R}_3$ — введенные выше x -гармонические функции. Формула (118') преобразуется к виду

$$\begin{aligned} R_1^* - i \frac{1}{x} Z^* &= - \left[2 \left(\frac{\partial Q}{\partial y} + i \frac{\partial Q}{\partial x} \right) + \frac{\partial \tilde{R}_4}{\partial y} + i \frac{\partial \tilde{R}_4}{\partial x} \right]_0 + \\ &+ \int_C \frac{(k+1)Q - D}{x^2} dy, \end{aligned} \quad (118'')$$

где Q и $\tilde{R}_4$ — введенные выше $\frac{1}{x}$ - и x -гармонические функции от x , y .

Преобразование осесимметричного напряженного состояния в плоское напряженное состояние

Формулы плоской теории упругости Колосова — Мусхелишвили имеют вид

$$2\mu(u_0 + iv_0) = k\varphi(z) - z \frac{d\overline{\varphi}(z)}{dz} - \overline{\psi}(z), \quad (125)$$

$$R + iZ = - \left[\varphi(z) + z \frac{d\overline{\varphi}(z)}{dz} + \overline{\psi}(z) \right]_C, \quad (126)$$

где C имеет тот же смысл, что и в (107), (108), $u_0 + iv_0$ — вектор смещения плоского напряженного состояния, $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — произвольные аналитические функции от z ,

$$R = \int_C R_n ds, \quad Z = \int_C Z_n ds,$$

R_n и Z_n определяются равенствами (91), (92), но только для плоского напряженного состояния.

Чтобы в наиболее полной и простой форме провести аналогию между осесимметричным и плоским напряженными состояниями и преобразовать одно из них в другое²⁰, формулы Колосова — Мусхелишвили после умножения обеих частей их равенств на $-i$ можно записать в следующей очевидной форме:

$$2\mu(v_0 - iu_0) = k\varphi_0(z) - 2y \frac{\partial \bar{\varphi}_0(z)}{\partial y} + \bar{\psi}_0(z), \quad (127)$$

$$R + iZ = \left[\varphi_0(z) + 2y \frac{\partial \bar{\varphi}_0(z)}{\partial y} - \bar{\psi}_0(z) \right]_C, \quad (128)$$

где $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ — произвольные аналитические функции от z ,

$$\varphi_0(z) = -i\varphi(z), \quad \psi_0(z) = -i\psi(z) - iz \frac{d\varphi(z)}{dz}. \quad (129)$$

Как и в случае основного интегрального представления x -аналитических функций (гл. 2, § 3), рассмотрим три вида областей G в правой полуплоскости $z = x + iy$, являющихся осевым сечением осесимметричного деформируемого тела.

А. Пусть область G в своей границе имеет отрезок L мнимой оси и в этой области дано плоское напряженное состояние с характеристическими аналитическими функциями $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$, удовлетворяющими условиям

$$\operatorname{Im} \varphi_0(z)|_L = 0, \quad \operatorname{Im} \psi_0(z)|_L = 0. \quad (130)$$

Условия (130) в силу формул Колосова — Мусхелишвили (127), (128) означают, что данное плоское напряженное состояние симметрично относительно мнимой оси.

Введем x -аналитические функции

$$\Phi(z) = P(\varphi_0(z)), \quad \Psi(z) = P(\psi_0(z)), \quad (131)$$

где $P(f(z))$ — оператор основного интегрального представления (случай «а») при $k = 1$ (54) (гл. 2),

$$P(f(z)) = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z f(\zeta) \frac{d\zeta}{V(z-\zeta)(\bar{z}+\zeta)} + i \operatorname{Im} \int_{z_0}^z f(\zeta) \left(\zeta - \frac{z-\bar{z}}{2} \right) \times \\ \times \frac{d\zeta}{V(z-\zeta)(\bar{z}+\zeta)}, \quad (132)$$

$$\zeta = \xi + i\eta, \quad \arg(x^2 - \xi^2)|_{x>\xi} = 0,$$

где $z_0 = x_0 + iy_0$ — начальная точка контура интегрирования Γ , лежащая на L (нефиксированная). Подставляя (131) в (107), (108),

²⁰ Другой способ преобразования осесимметричных напряженных состояний в плоские напряженные состояния указан Вебером [165] и А. Я. Александровым [169, 170]. К этому же направлению относятся работы В. И. Моссаковского [171] и М. Я. Беленького [172].

получаем формулы вполне определенного осесимметричного напряженного состояния в данной области G с характеристическими x -аналитическими функциями $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, определенными равенствами (131),

$$2\mu(w - iU) = kP(\varphi_0(z)) - 2y \frac{\partial}{\partial y} \bar{P}(\varphi_0(z)) + \bar{P}(\psi_0(z)), \quad (132)$$

$$R^* + iZ^* = \left[P(\varphi_0(z)) + 2y \frac{\partial}{\partial y} \bar{P}(\varphi_0(z)) - \bar{P}(\psi_0(z)) \right]_G - 2\mu \int_G \frac{u}{x} dy. \quad (134)$$

Если контур Γ , который соединяет точку $z_0 = 0 + iy$, лежащую на L , с точкой $z = x + iy$, — прямолинейный горизонтальный отрезок, то оператор $P(f(z))$ принимает вид

$$P(f(z)) = \tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y) = \int_0^x [u(\xi, y) + i\tilde{v}(\xi, y)] \frac{d\xi}{\sqrt{x^2 - \xi^2}} \quad (135)$$

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

а его обратный оператор записывается в виде [10, 11] (см. также гл. 2, § 3)

$$\begin{aligned} P^{-1}(\tilde{f}(z)) = f(z) = u(x, y) + iv(x, y) &= \frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\tilde{u}(\xi, y) \xi d\xi}{\sqrt{x^2 - \xi^2}} + \\ &+ i \frac{2}{\pi} \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\tilde{v}(\xi, y) \xi d\xi}{\sqrt{x^2 - \xi^2}} = \frac{2}{\pi} \tilde{u}(0, y) + \frac{2}{\pi} \int_0^x \left[x \frac{\partial \tilde{u}(\xi, y)}{\partial \xi} + i \frac{\partial \tilde{v}(\xi, y)}{\partial \xi} \right] \times \\ &\times \frac{d\xi}{\sqrt{x^2 - \xi^2}}. \end{aligned} \quad (136)$$

Учитывая (135) и (136), приходим к выводу, что для соответствующих друг другу в области G плоского (127), (128) (при выполнении условия (130)) и осесимметричного (133), (134) напряженных состояний на горизонтальных прямых с начальными точками на отрезке L мнимой оси справедливы равенства

$$w - iU = P(v_0 - iu_0), \quad v_0 - iu_0 = P^{-1}(w - iU), \quad (137)$$

$$R^* + iZ^* = P(R + iZ), \quad R + iZ = P^{-1}(R^* + iZ^*), \quad (138)$$

где $P(f(z))$ и $P^{-1}(\tilde{f}(z))$ — операторы (135) и (136).

Б. Пусть область G в своей границе имеет бесконечно удаленную точку $z_0 = \infty$, достижимую изнутри вдоль контура Γ , имеющего при $z = \infty$ предельное положение касательной. Пусть в этой области дано плоское напряженное состояние (127), (128) и при $z \rightarrow \infty$ вдоль контура Γ выполняются условия

$$\varphi_0(z), \psi_0(z) = O(|z|^{-1-\varepsilon}), \quad \varepsilon = \text{const} > 0. \quad (139)$$

Введем x -аналитические функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, определенные равенствами (131) при условии, что $P(f(z))$ — оператор основного интегрального представления (случай «б») при $k = 1$ (54) (гл. 2, § 3),

$$P(f(z)) = \operatorname{Re} \int_{\infty}^z f(\zeta) \frac{d\zeta}{V(z-\zeta)(\bar{z}+\zeta)} + i \operatorname{Im} \int_{\infty}^z f(\zeta) \left(\zeta - \frac{z-\bar{z}}{2} \right) \times \\ \times \frac{d\zeta}{V(z-\zeta)(\bar{z}+\zeta)}, \quad (140)$$

$$\zeta = \xi + i\eta, \quad \arg(x^2 - \xi^2)|_{x=\xi} = -\pi.$$

Данному плоскому напряженному состоянию однозначно соответствует осесимметричное напряженное состояние (133), (134), где $P(f(z))$ — оператор, определенный равенством (140). Вдоль прямолинейных горизонтальных контуров, проходящих через бесконечно удаленную точку (если такие имеются), выполняются равенства (137), (138) при условии, что

$$P(f(z)) = \tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y) = \\ = \int_{\infty}^x [-v(\xi, y) + i\xi u(\xi, y)] \frac{d\xi}{V\xi^2 - x^2}, \quad (141)$$

$$P^{-1}(\tilde{f}(z)) = u(x, y) + iv(x, y) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \int_{\infty}^x \frac{\tilde{v}(\xi, y) \xi d\xi}{V\xi^2 - x^2} + \\ + i \frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_{\infty}^x \frac{-\tilde{u}(\xi, y) \xi d\xi}{V\xi^2 - x^2}. \quad (142)$$

В. Пусть G — любая область правой полуплоскости $z = x + iy$ и в этой области дано плоское напряженное состояние (137), (138) такое, что при подходе к некоторой фиксированной точке $z_0 = x_0 + iy_0$ границы области G

$$\varphi_0(z), \psi_0(z) = O(|z - z_0|^{-1+\varepsilon}), \quad \varepsilon = \text{const} > 0. \quad (143)$$

Введем x -аналитические функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, определенные равенствами (131) при условии, что $P(f(z))$ — оператор основного интегрального представления (случай «в») при $k = 1$ (54) (гл. 2, § 3). Данному плоскому напряженному состоянию однозначно соответствует осесимметричное напряженное состояние (133), (134) с введенными характеристическими x -аналитическими функциями $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$. Вдоль прямолинейного горизонтального отрезка, лежащего в G , с начальной точкой z_0 (если такой имеется) выполняются равенства (137), (138) при условии, что

при $x_0 < x$

$$\begin{aligned} P(f(z)) = \tilde{f}(z) &= \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y) = \\ &= \int_{x_0}^x [u(\xi, y) + i\xi v(\xi, y)] \frac{d\xi}{\sqrt{x^2 - \xi^2}}, \end{aligned} \quad (144)$$

$$\begin{aligned} P^{-1}(\tilde{f}(z)) &= u(x, y) + iv(x, y) = \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_{x_0}^x \frac{u(\xi, y) \xi d\xi}{\sqrt{x^2 - \xi^2}} + i \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \int_{x_0}^x \frac{\tilde{v}(\xi, y) \xi d\xi}{\sqrt{x^2 - \xi^2}} \end{aligned} \quad (145)$$

и при $x_0 > x$

$$\begin{aligned} P(f(z)) = \tilde{f}(z) &= \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y) = \\ &= \int_{x_0}^x [-v(\xi, y) + i\xi u(\xi, y)] \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 - x^2}}, \end{aligned} \quad (146)$$

$$\begin{aligned} P^{-1}(\tilde{f}(z)) &= u(x, y) + iv(x, y) = \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \int_{x_0}^x \frac{\tilde{v}(\xi, y) \xi d\xi}{\sqrt{\xi^2 - x^2}} + i \frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_{x_0}^x \frac{-\tilde{u}(\xi, y) \xi d\xi}{\sqrt{\xi^2 - x^2}}. \end{aligned} \quad (147)$$

Заметим, что равенства (133), (134), как в случае «А», так и в случаях «Б» и «В», можно рассматривать как интегральные представления осесимметричного напряженного состояния через аналитические функции $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$, следует только иметь в виду, что под $P(f(z))$ понимается оператор основного интегрального представления при $k=1$ соответственно в случаях «а», «б», «в» (см. формулу (54) гл. 1). При помощи указанных интегральных представлений, как видим, краевые задачи осесимметричной теории упругости сводятся к задачам специального вида в классе аналитических функций.

О решении задач осесимметричной теории упругости сведением к плоским задачам теории упругости

Задача о напряженном состоянии круговой симметрии пространственного слоя рассматривалась в ряде работ (например, [167, 173]). Покажем, что при помощи x -аналитических функций или формул (107) и (108) можно очень просто получить решение этой задачи в виде квадратур.

Пусть $y = \beta$ и $y = -\beta$ ($\beta > 0$) — плоскости, ограничивающие пространственный слой в системе цилиндрических координат x, θ, y . Пусть заданные на этих плоскостях внешние усилия

определяются равенствами

$$\left. \begin{aligned} \int_0^x R_n dx &= R_1^*(x), & \int_0^x x Z_n dx &= Z_1^*(x) \text{ при } y = \beta, \\ \int_0^x R_n dx &= R_2^*(x), & \int_0^x x Z_n dx &= Z_2^*(x) \text{ при } y = -\beta, \end{aligned} \right\} \quad (148)$$

где $R_1^*, R_2^*, Z_1^*, Z_2^*$ — заданные функции от x при $0 \leq x < \infty$. Пусть

$$\begin{aligned} R_1(x) + iZ_1(x) &= P^{-1}(R_1^* + iZ_1^*), \\ R_2(x) + iZ_2(x) &= P^{-1}(R_2^* + iZ_2^*), \end{aligned} \quad (149)$$

где P^{-1} — оператор (136).

На основании доказанного выше данному напряженному состоянию пространственного слоя соответствует плоское напряженное состояние полуполосы $-\beta < y < \beta$, $x > 0$ с характеристическими аналитическими функциями $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$, мнимые части которых при $x = 0$ равны нулю. В силу (134), (136) краевые условия для определения функций $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ в полуполосе $x > 0$, $-\beta < y < \beta$ принимают вид

$$\left\{ \begin{aligned} \left[\varphi_0(z) + 2y \frac{\partial \bar{\varphi}_0(z)}{\partial y} - \bar{\psi}_0(z) \right]_0^x &= R_1(x) + iZ_1(x), & y &= \beta, \\ \left[\varphi_0(z) + 2y \frac{\partial \bar{\varphi}_0(z)}{\partial y} - \bar{\psi}_0(z) \right]_0^x &= R_2(x) + iZ_2(x), & y &= -\beta, \end{aligned} \right\} \quad (150)$$

$$\operatorname{Im} \varphi_0(z)|_{x=0} = 0, \quad \operatorname{Im} \psi_0(z)|_{x=0} = 0. \quad (151)$$

Условия (151) в общем случае означают, что функции $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ аналитически продолжаются в область, симметричную с областью G относительно мнимой оси, при этом вещественные части функций $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ — четные, а мнимые части — нечетные функции от x . Следовательно, плоское напряженное состояние, соответствующее рассматриваемому напряженному состоянию пространственного слоя, будет определено в целой полосе $-\beta < y < \beta$, причем, как это видно из (150), $R_{1,2}(x)$ будут четными, а $Z_{1,2}(x)$ — нечетными функциями от x . С физической точки зрения это означает, что данная полоса $|y| < \beta$, $-\infty < x < \infty$ на прямых $y = \pm \beta$ подвержена воздействию внешних усилий, симметричных относительно мнимой оси.

Для решения задачи о плоском напряженном состоянии можно воспользоваться функцией напряжений Эри $\chi(x, y)$, которая характеризуется равенствами

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} + i \frac{\partial \chi}{\partial y} = i \left(\varphi_0(z) + 2y \frac{\partial \bar{\varphi}_0(z)}{\partial y} - \bar{\psi}_0(z) \right), \quad (152)$$

$$\Delta \chi = 4 \operatorname{Re} \frac{\partial \varphi_0(z)}{\partial y}, \quad (153)$$

$$\Delta \Delta \chi = 0. \quad (154)$$

Краевые условия для определения функции χ в силу (152) и (150) имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{\partial \chi}{\partial x} + i \frac{\partial \chi}{\partial y} \right]_0^{\pm x} &= i [R_1(x) \pm i Z_1(x)] \quad \text{при } y = \beta, \\ \left[\frac{\partial \chi}{\partial x} + i \frac{\partial \chi}{\partial y} \right]_0^{\pm x} &= i [R_2(x) \pm i Z_2(x)] \quad \text{при } y = -\beta. \end{aligned} \right\} \quad (155)$$

Отсюда, в частности, видно, что $\frac{\partial \chi}{\partial x}$ — нечетная функция от x , и, следовательно, $\chi(x, y)$, как функция от x , будет четной.

Ищем теперь функцию напряжений $\chi(x, y)$ в предположении, что она представима интегралом Фурье

$$\chi(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \tilde{\chi}(\alpha, y) \cos \alpha x d\alpha, \quad (156)$$

где

$$\tilde{\chi}(\alpha, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \chi(\rho, y) \cos \alpha \rho d\rho, \quad (156')$$

допускающим четырехкратное дифференцирование по x и y под знаком интеграла. Подставляя (156) в двумерное бигармоническое уравнение (154), получаем для $\chi(\alpha, y)$ обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^4 \tilde{\chi}}{dy^4} - 2\alpha^2 \frac{d^2 \tilde{\chi}}{dy^2} + \alpha^4 \tilde{\chi} = 0. \quad (157)$$

Общее решение этого дифференциального уравнения находим в виде

$$\tilde{\chi}(\alpha, y) = A_1 \operatorname{sh} \alpha y + A_2 \operatorname{ch} \alpha y + y (A_3 \operatorname{sh} \alpha y + A_4 \operatorname{ch} \alpha y), \quad (158)$$

где A_1, A_2, A_3, A_4 — неопределенные постоянные интегрирования.

Из (156), (152), (128), учитывая, что $\frac{\partial \chi}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$, получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \chi(x, y)}{\partial x} &= -Z(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} -\tilde{\chi}(\alpha, y) \alpha \sin \alpha x d\alpha, \\ \frac{\partial^2 \chi(x, y)}{\partial x \partial y} &= \frac{dR(x, y)}{dx} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} -\frac{d\tilde{\chi}(\alpha, y)}{dy} \alpha \sin \alpha x d\alpha, \end{aligned} \right\} \quad (159)$$

где $Z(x, y)$ и $R(x, y)$ определяются равенствами

$$R(x, y) = \int_0^x R_n dx, \quad Z(x, y) = \int_0^x Z_n dx.$$

Сравнивая (159) с интегралом Фурье для нечетных функций

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \alpha x d\alpha \int_0^{\infty} f(\rho) \sin \alpha \rho d\rho,$$

приходим к выводу, что

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\chi}(\alpha, y) &= \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} Z(\rho, y) \sin \alpha \rho d\rho, \\ \frac{d\tilde{\chi}(\alpha, y)}{dy} &= -\frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{dR(\rho, y)}{d\rho} \sin \alpha \rho d\rho, \end{aligned} \right\} \quad (160)$$

откуда, введя обозначения для трансформаций Фурье

$$\tilde{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\rho) \sin \alpha \rho d\rho, \quad \tilde{f}'(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{df(\rho)}{d\rho} \sin \alpha \rho d\rho, \quad (161)$$

получаем систему линейных алгебраических уравнений для определения A_1, A_2, A_3, A_4

$$\left. \begin{aligned} A_1 \operatorname{sh} \alpha \beta + A_2 \operatorname{ch} \alpha \beta + A_3 \beta \operatorname{sh} \alpha \beta + A_4 \beta \operatorname{ch} \alpha \beta &= \frac{1}{\alpha} \tilde{Z}_1(\alpha), \\ -A_1 \operatorname{sh} \alpha \beta + A_2 \operatorname{ch} \alpha \beta + A_3 \beta \operatorname{sh} \alpha \beta - A_4 \beta \operatorname{ch} \alpha \beta &= \frac{1}{\alpha} \tilde{Z}_2(\alpha), \\ A_1 \alpha \operatorname{ch} \alpha \beta + A_2 \alpha \operatorname{sh} \alpha \beta + A_3 (\operatorname{sh} \alpha \beta + \alpha \beta \operatorname{ch} \alpha \beta) + \\ + A_4 (\operatorname{ch} \alpha \beta + \alpha \beta \operatorname{sh} \alpha \beta) &= -\frac{1}{\alpha} \tilde{R}_1(\alpha), \\ A_1 \alpha \operatorname{ch} \alpha \beta - A_2 \alpha \operatorname{sh} \alpha \beta - A_3 (\operatorname{sh} \alpha \beta + \alpha \beta \operatorname{ch} \alpha \beta) + \\ + A_4 (\operatorname{ch} \alpha \beta + \alpha \beta \operatorname{sh} \alpha \beta) &= -\frac{1}{\alpha} \tilde{R}_2(\alpha). \end{aligned} \right\} \quad (162)$$

Из этой системы легко находим

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{\gamma(\alpha)} [(\tilde{R}_1' + \tilde{R}_2') \beta \operatorname{ch} \alpha \beta + (\tilde{Z}_1 - \tilde{Z}_2) (\operatorname{ch} \alpha \beta + \alpha \beta \operatorname{sh} \alpha \beta)], \\ A_2 &= \frac{1}{\gamma_1(\alpha)} [(\tilde{R}_1' - \tilde{R}_2') \beta \operatorname{sh} \alpha \beta + (\tilde{Z}_1 + \tilde{Z}_2) (\operatorname{sh} \alpha \beta + \alpha \beta \operatorname{ch} \alpha \beta)], \\ A_3 &= -\frac{1}{\gamma_1(\alpha)} [(\tilde{R}_1' - \tilde{R}_2') \operatorname{ch} \alpha \beta + (\tilde{Z}_1 + \tilde{Z}_2) \alpha \operatorname{sh} \alpha \beta], \\ A_4 &= -\frac{1}{\gamma(\alpha)} [(\tilde{R}_1' + \tilde{R}_2') \operatorname{sh} \alpha \beta + (\tilde{Z}_1 - \tilde{Z}_2) \alpha \operatorname{ch} \alpha \beta], \end{aligned} \right\} \quad (163)$$

где $\gamma(\alpha) = 2(\operatorname{sh} 2\alpha\beta - 2\alpha\beta)$, $\gamma_1(\alpha) = \alpha(\operatorname{sh} 2\alpha\beta + 2\alpha\beta)$. Подставляя (163) в (158), получаем выражение для функции $\chi(\alpha, y)$ в явном виде. Отметим, что если

$$\frac{dR_1}{dx}, \frac{dR_2}{dx}, Z_1, Z_2 \in L(0, \infty), \quad (164)$$

то на основании свойств трансформации Фурье [173, 174] $\tilde{R}_1, \tilde{R}_2, \tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2 = o(\alpha)$ при $\alpha \rightarrow \infty$ и, следовательно, как это видно из (163), при $\alpha \rightarrow \infty$ $A_1, A_2, A_3, A_4 = o(e^{-\alpha\beta})$ и $\tilde{\chi}(\alpha, y) = o(e^{-\alpha(\beta-z)})$.

Равенства (152) и (153) принимают вид

$$i\left(\Phi_0(z) + 2y \frac{\partial \bar{\Phi}_0(z)}{\partial y} - \bar{\Phi}_0(z)\right) = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \left[-\tilde{\chi}(\alpha, y) \alpha \sin \alpha x + i \frac{d\tilde{\chi}(\alpha, y)}{dy} \cos \alpha x \right] d\alpha, \quad (152')$$

$$4 \operatorname{Re} \frac{\partial \Phi_0(z)}{\partial y} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \left[-\tilde{\chi}(\alpha, y) \alpha^2 + \frac{d^2 \tilde{\chi}(\alpha, y)}{dy^2} \right] \cos \alpha x d\alpha. \quad (153')$$

Восстанавливая аналитическую функцию по ее вещественной части (см., например, [175, стр. 191]), из (152') получаем

$$\frac{\partial \Phi_0(z)}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \left[-\tilde{\chi}(\alpha, y) \alpha^2 + \frac{d^2 \tilde{\chi}(\alpha, y)}{dy^2} \right]_{y=\frac{1}{2i}z} \cos \alpha \frac{z}{2} d\alpha - c, \quad (165)$$

где c — вещественная постоянная,

$$c = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \left[-\tilde{\chi}(\alpha, y) \alpha^2 + \frac{d^2 \tilde{\chi}(\alpha, y)}{dy^2} \right]_{y=0} d\alpha. \quad (165')$$

Чисто мнимая постоянная в равенстве (165) не прибавляется, так как

$$\operatorname{Im} \frac{\partial \Phi_0(z)}{\partial y} \Big|_{x=0} = 0.$$

Функция $\Phi_0(z)$ определяется интегрированием:

$$\Phi_0(z) = -i \int_0^z \frac{\partial \Phi_0(z)}{\partial y} dz + \gamma, \quad (166)$$

где γ — произвольная вещественная постоянная (мнимая постоянная интегрирования равна нулю, так как $\operatorname{Im} \Phi_0(z)|_{x=0} = 0$). Функция $\Psi_0(z)$ определяется из (152) в явном виде с точностью до слагаемого c_1 :

$$\Psi_0(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \left[-\frac{d\tilde{\chi}(\alpha, y)}{dy} \cos \alpha x + i \tilde{\chi}(\alpha, y) \alpha \sin \alpha x \right] d\alpha + \\ + \Phi_0(z) + 2y \frac{\partial \Phi_0(z)}{\partial y}. \quad (167)$$

Теперь по формулам (131), (135) через $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$ определяются характеристические x -аналитические функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$

(с точностью до слагаемого $\frac{\pi}{2} \gamma$). Подставляя $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ в основные формулы (107), (108), получаем искомое решение задачи об осесимметричном напряженном состоянии пространственного слоя. При этом постоянную интегрирования γ в равенстве (166) можно считать равной нулю, так как изменение ее в силу формул (107), (108) соответствует жесткому смещению пространственного слоя в направлении оси y и на распределение напряжений не влияет.

Точно таким же способом в работе автора и А. А. Капшивого [176] весьма просто получены решения осесимметричных задач для конечного сплошного цилиндра, когда на его торцах заданы нормальные смещения и касательные напряжения, а на боковой поверхности выполняется одно из условий: а) заданы нормальные и касательные напряжения, б) заданы нормальные и касательные смещения, в) заданы нормальные смещения и касательные напряжения, г) заданы нормальные напряжения и касательные смещения. Характерно, что при решении этих задач достаточно пользоваться разложениями в ряды только по тригонометрическим функциям кратного аргумента и лишь в конце при переходе от плоского напряженного состояния к осесимметричному напряженному состоянию при помощи оператора $P(f)$ появляются функции Бесселя. Окончательный результат получается в виде рядов Шлемилха, т. е. по функциям Бесселя кратного аргумента.

В работе А. А. Капшивого [97] получены в квадратурах решения смешанных задач осесимметричной теории для пространственного слоя с цилиндрической полостью, когда на торцевых плоскостях заданы нормальные смещения и касательные напряжения, а на цилиндрической поверхности выполняется одно из указанных выше условий. В работе [177], исходя из формул (107), (108), без перехода к плоскому напряженному состоянию в рядах решены смешанные задачи для конечного полого цилиндра, когда на его торцах заданы нормальные смещения и касательные напряжения, а на боковых поверхностях выполняется одно из указанных выше условий. Так же решены первая (когда на границе задаются усилия) и вторая (когда на границе задаются смещения) основные задачи осесимметричной теории упругости для бесконечно длинного полого цилиндра.

Применение интеграла типа Коши x-аналитических функций к задачам осесимметричной теории упругости

Интегральные уравнения являются эффективным средством исследования вопросов существования и единственности решений задач математической физики и все больше и больше используются для получения решений с доведением результатов до числа [178]. Весьма показательна в этом отношении плоская теория упругости, где при помощи интеграла типа Коши аналитических функций со-

ставлены и изучены интегральные уравнения всех основных краевых задач. Однако этого совсем нельзя сказать об осесимметричной теории упругости. Попытка составления интегральных уравнений первой (когда на границе тела заданы усилия) и второй (когда на границе тела заданы смещения) основных задач теории упругости была сделана Д. И. Шерманом [179]. Однако полученные им при помощи методов теории потенциала интегральные уравнения оказались очень сложными.

Первая попытка применения интеграла типа Коши обобщенных аналитических функций при решении задач осесимметричной теории упругости и составлении соответствующих интегральных уравнений сделана автором совместно с В. С. Чемерисом. В работах [180, 181] при решении основной задачи осесимметричной теории упругости для контурных значений характеристической x -аналитической функции $\Phi(z)$ получены сингулярные интегральные уравнения первого и второго рода. Через контурные значения $\Phi(z)$ при помощи интеграла типа Коши x -аналитических функций в точках рассматриваемой области восстанавливаются сама функция $\Phi(z)$ и функция $\Psi(z)$, а при помощи $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ по основным формулам (107) и (108) находятся все элементы осесимметричного напряженного состояния. Позднее, в работах В. С. Чемериса [182, 183], указанное сингулярное интегральное уравнение первого рода было сведено к интегральному уравнению Фредгольма второго рода.

Остановимся на этом вопросе подробнее.

В случае p -аналитических функций с характеристикой $p = x$ правильные сопряженные ядра, как показано в гл. 1, § 4, можно построить в явном виде. Правильное фундаментальное решение определяется равенством

$$\Gamma(\zeta, z) = -\frac{x}{V \xi x} K(x), \quad (168)$$

где $\zeta = \xi + i\eta$, $z = x + iy$, $K(x)$ — полный эллиптический интеграл первого рода

$$K(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{V 1 - x^2 \sin^2 \varphi} \quad (168')$$

с модулем

$$x = \frac{2V \xi x}{V (\xi + x)^2 + (\eta - y)^2}. \quad (168'')$$

Правильное сопряженное ядро $\Omega(\zeta, z)$ определяется равенством (143''') гл. 1, сопряженное с ним ядро $\tilde{\Omega}(\zeta, z) = \tilde{\Gamma}(\zeta, z) + i\tilde{H}(\zeta, z)$ — по формулам (124), (125) гл. 1.

Решение второй основной задачи осесимметричной теории упругости в области D , ограниченной гладким контуром C в правой полуплоскости $z = x + iy$, будем называть регулярным, если x -анали-

тические функции $\Phi(z)$, $\frac{\partial \Phi(z)}{\partial y}$ и $\Psi(z)$, соответствующие этому решению (формулы (107), (108)), непрерывно продолжимы изнутри на контур C . Считая, что регулярное решение второй основной задачи существует, исключим в формуле (107) функцию $\bar{\Psi}(z)$. Для этого поставим над обеими частями равенства (107) знак комплексного сопряжения. Затем от обеих частей полученного равенства возьмем оператор интеграла типа Коши x -аналитических функций, считая, что точка $z = x + iy$ лежит вне замкнутой области $D + C$. Таким образом,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_C \left[kP - 2\eta \frac{\partial P}{\partial \eta} - 2\mu w \right] d\tilde{\Omega}(\zeta, z) + \\ & + i \left[-kQ - 2\eta \frac{\partial Q}{\partial \eta} - 2\mu U \right] d\Omega(\zeta, z) = 0, \end{aligned} \quad (169)$$

где $\zeta = \xi + i\eta \subset C$, $P = P(\xi, \eta)$, $Q = Q(\xi, \eta)$. Переходя к пределу в равенстве (169) при $z = x + iy \rightarrow \zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0 \subset C$, по формулам Сохоцкого для интеграла типа Коши x -аналитических функций получаем

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \left[k\bar{\Phi}(\zeta_0) - 2\eta_0 \frac{\partial \Phi(\zeta_0)}{\partial \eta_0} - 2\mu(w + iU) \right] + \frac{1}{2\pi i} \int_C \left[kP - 2\eta \frac{\partial P}{\partial \eta} - \right. \\ & \left. - 2\mu w \right] d\tilde{\Omega}(\zeta, \zeta_0) + i \left[-kQ - 2\eta \frac{\partial Q}{\partial \eta} - 2\mu U \right] d\Omega(\zeta, \zeta_0) = 0. \end{aligned} \quad (170)$$

Учитывая непрерывную продолжительность $\frac{\partial \Phi(z)}{\partial y}$ на C и x -аналитичность ядер $d\Omega(\zeta, z)$ и $d\tilde{\Omega}(\zeta, z)$, записываем тождество

$$\frac{\partial P}{\partial \eta} d\tilde{\Omega}(\zeta, \zeta_0) + i \frac{\partial Q}{\partial \eta} d\Omega(\zeta, \zeta_0) = \frac{\partial \tilde{\Omega}(\zeta, \zeta_0)}{\partial \eta} dP + i \frac{\partial \Omega(\zeta, \zeta_0)}{\partial \eta} dQ,$$

где $P = P(\xi, \eta)$, $Q = Q(\xi, \eta)$, $\zeta = \xi + i\eta \subset C$, $\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0 \subset C$. При помощи этого тождества из (170) для контурных значений $P = P(\xi, \eta)$ и $Q = Q(\xi, \eta)$ получаем сингулярное интегральное уравнение первого рода

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi i} \int_C P d\tilde{\Gamma}(\zeta, \zeta_0) - iQ d\Gamma(\zeta, \zeta_0) + \frac{1}{k\pi i} \int_C P d \left[(\eta - \eta_0) \frac{\partial \tilde{\Omega}(\zeta, \zeta_0)}{\partial \eta} + \right. \\ & \left. + iQ d \left[(\eta - \eta_0) \frac{\partial \Omega(\zeta, \zeta_0)}{\partial \eta} \right] \right] = -\frac{1}{k} B(\zeta_0), \end{aligned} \quad (171)$$

где $B(\zeta_0)$ — заданная функция от $\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0$,

$$B(\zeta_0) = \mu[w(\zeta_0) + iU(\zeta_0)] - \frac{\mu}{\pi i} \int_C w(\zeta) d\tilde{\Omega}(\zeta, \zeta_0) + iU(\zeta) d\Omega(\zeta, \zeta_0). \quad (171')$$

Обозначая первый интеграл левой части равенства (171) через A и используя обобщения формул Сохоцкого на интеграл типа Коши p -аналитических функций с характеристикой $p = x$, находим

$$A = -[P(\zeta_0) - iQ(\zeta_0)] + \frac{1}{\pi} \int_C P(\zeta) d\bar{H}(\zeta, \zeta_0) - iQ(\zeta) dH(\zeta, \zeta_0),$$

где $P(\zeta_0) = P(\xi_0, \eta_0)$, $Q(\zeta_0) = Q(\xi_0, \eta_0)$, $P(\zeta) = P(\xi, \eta)$, $Q(\zeta) = Q(\xi, \eta)$. Подставляя выражение для A в (171), получаем

$$P(\zeta_0) - iQ(\zeta_0) - \frac{1}{\pi} \int_C P(\zeta) d \left[\bar{H}(\zeta, \zeta_0) - \frac{i}{k} (\eta - \eta_0) \frac{\partial \bar{\Omega}(\zeta, \zeta_0)}{\partial \eta} - \right. \\ \left. - iQ(\zeta) d \left[H(\zeta, \zeta_0) + \frac{i}{k} (\eta - \eta_0) \frac{\partial \Omega(\zeta, \zeta_0)}{\partial \eta} \right] \right] = \frac{1}{k} B(\zeta_0). \quad (172)$$

Равенство (172) представляет собой искомое интегральное уравнение Фредгольма второго рода второй основной задачи осесимметричной теории упругости относительно неизвестной функции

$$\bar{\Phi}(\zeta_0) = P(\zeta_0) - iQ(\zeta_0), \quad \zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0 \in C.$$

Предполагая единственность регулярного решения этой задачи, можно показать, что единственными фундаментальными функциями интегрального уравнения (172) (т. е. решениями уравнения (172) при $B(\zeta) = 0$) являются

$$\bar{\Phi}(\zeta_0) \equiv 1 \text{ и } \bar{\Phi}(\zeta_0) = i \text{ [183].}$$

В работе В. С. Чемериса [184] основное интегральное уравнение (172) применено при решении одного численного примера — второй основной задачи для конечного полого цилиндра со скругленными углами. Высота цилиндра $a = 3,25$, внутренний радиус $R_0 = 1,38$, внешний радиус $R = 4,63$, кривая C , аппроксимирующая осевое сечение цилиндра (рис. 66), бралась в виде

$$x = x(t) = 3 + 1,3(\cos t - \sin t) + 0,151722(\cos 3t + \sin 3t),$$

$$y = y(t) = 1,3(\cos t + \sin t) + 0,151722(\cos 3t - \sin 3t),$$

$$0 \leq t \leq 2\pi.$$

Интегральное уравнение (172) решалось численно на электронной вычислительной машине. Затем численно находились все элементы напряженного состояния в отдельных точках. При этом оказалось, что полная относительная погрешность [185] в определении напряжений и смещений составляла 0,5—2,8%.

Приведенные здесь результаты получили дальнейшее развитие, и в частности распространение на случай первой основной задачи осесимметричной теории упругости (когда на поверхности тела заданы усилия), в работах [105, 186—189]. В работах [105, 186, 187] вместо основных формул осесимметричной теории упругости (107), (108') используются эквивалентные им формулы (115), (116') (при

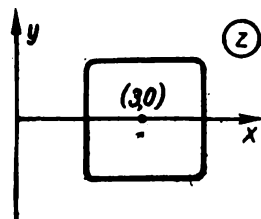


Рис. 66.

других обозначениях координат и упругих постоянных), а вместо интеграла типа Коши для x -аналитических функций (гл. 1, § 4) — его видоизменение на случай обобщенных аналитических функций четвертого класса, получающихся из x -аналитических функций при делении их мнимых частей на x [190].

§ 5. РЕШЕНИЕ ОСНОВНЫХ ЗАДАЧ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ЦИЛИНДРА И ПАРАБОЛОИДА ВРАЩЕНИЯ

Покажем [110], что рассматривавшиеся ранее с точки зрения различных методов основные задачи осесимметричной теории упругости для цилиндрических областей [167, 173] и параболоида вращения [191] можно сравнительно просто решить при помощи метода p -аналитических функций.

Рассмотрим решение первой и второй основных задач осесимметричной теории упругости в декартовых координатах.

1. В полосе D ($0 < x < x_1$, $-\infty < y < \infty$) найти x -аналитические функции $\Phi(z)$ и $\Psi_1(z)$ с мнимыми частями, равными нулю при $x = 0$, удовлетворяющие при $x = x_1$ краевому условию

$$(k+1)\Phi(z) + 2x \frac{\partial \Phi(z)}{\partial x} + \bar{\Psi}_1(z) = \varphi(y) + i\psi(y), \quad (173)$$

$$-\infty < y < \infty,$$

где $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ — заданные функции от y ($-\infty < y < \infty$).

Поставленная задача в силу (110) эквивалентна второй основной задаче осесимметричной теории упругости для цилиндра радиуса x_1 . Берем искомую функцию $\Phi(z)$ в виде правой части равенства (368) гл. 2, функцию $\Psi_1(z)$ — в виде правой части этого же равенства, заменяя $A(r)$, $B(r)$ величинами $A^*(r)$, $B^*(r)$ (при $\nu = 0$). Рассматривая при таком выборе функций $\Phi(z)$ и $\Psi_1(z)$ краевое условие (173), при $y > 0$ и $y < \infty$ получаем систему четырех линейных алгебраических уравнений (при обозначениях (373) гл. 2)

$$\left. \begin{aligned} & [(k+1)I_0(rx_1) + \\ & + 2rx_1I_1(rx_1)] A(r) + I_0(rx_1) A^*(r) = C \left[\frac{\varphi(y) + \varphi(-y)}{2} \right], \\ & [(k+1)I_0(rx_1) + \\ & + 2rx_1I_1(rx_1)] B(r) + I_0(rx_1) B^*(r) = S \left[\frac{\varphi(y) - \varphi(-y)}{2} \right], \\ & [-(k+1)x_1I_1(rx_1) + \\ & + 2rx_1^2I_0(rx_1)] B(r) + x_1I_1(rx_1) B^*(r) = C \left[\frac{\psi(y) + \psi(-y)}{2} \right], \\ & [(k+1)x_1I_1(rx_1) - \\ & - 2rx_1^2I_0(rx_1)] A(r) - x_1I_1(rx_1) A^*(r) = S \left[\frac{\psi(y) - \psi(-y)}{2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (174)$$

Решая эту систему относительно $A(r)$, $B(r)$, $A^*(r)$, $B^*(r)$, находим функции $\Phi(z)$ и $\Psi_1(z)$ в явном виде.

1'. В области H ($x_0 < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$) найти x -аналитические функции $\Phi(z)$ и $\Psi_1(z)$, удовлетворяющие при $x = x_0$ краевому условию (173) с заменой $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ величинами $\varphi_0(y)$ и $\psi_0(y)$.

Эта задача эквивалентна второй основной задаче осесимметричной теории упругости для пространства с цилиндрической полостью радиуса x_0 . Берем $\Phi(z)$ в виде правой части равенства (369) гл. 2, $\Psi_1(z)$ — в виде правой части этого же равенства, заменяя $C(r)$ и $D(r)$ величинами $C^*(r)$ и $D^*(r)$ (при $\nu = 0$). Из краевого условия (173) при $x = x_0$ и правой части $\varphi_0(y) + i\psi_0(y)$ получаем систему четырех линейных алгебраических уравнений

$$\left. \begin{aligned} &[(k+1)K_0(rx_0) - \\ &- 2rx_0K_1(rx_0)]C(r) + K_0(rx_0)C^*(r) = C\left[\frac{\varphi_0(y) + \varphi_0(-y)}{2}\right], \\ &[(k+1)K_0(rx_0) - \\ &- 2rx_0K_1(rx_0)]D(r) + K_0(rx_0)D^*(r) = S\left[\frac{\varphi_0(y) - \varphi_0(-y)}{2}\right], \\ &[(k+1)x_0K_1(rx_0) - \\ &- 2rx_0^2K_0(rx_0)]D(r) - x_0K_1(rx_0)D^*(r) = C\left[\frac{\psi_0(y) + \psi_0(-y)}{2}\right], \\ &[-(k+1)x_0K_1(rx_0) + \\ &+ 2rx_0^2K_0(rx_0)]C(r) + x_0K_1(rx_0)C^*(r) = S\left[\frac{\psi_0(y) - \psi_0(-y)}{2}\right]. \end{aligned} \right\} \quad (175)$$

Решая эту систему уравнений относительно $C(r)$, $D(r)$, $C^*(r)$, $D^*(r)$, находим функции $\Phi(z)$ и $\Psi_1(z)$ в явном виде.

1". В полосе D^* ($x_0 < x < x_1$, $-\infty < y < \infty$) найти x -аналитические функции $\Phi(z)$ и $\Psi_1(z)$, удовлетворяющие краевому условию (173) и при $x = x_0$ — краевому условию (173) с заменой $\varphi(y)$, $\psi(y)$ величинами $\varphi_0(y)$, $\psi_0(y)$.

Эта задача эквивалентна второй основной задаче осесимметричной теории упругости для полого цилиндра с внутренним радиусом x_0 и внешним радиусом x_1 . Берем $\Phi(z)$ в виде суммы правых частей равенств (368), (369) гл. 2, функцию $\Psi_1(z)$ — в виде этой же суммы, заменяя $A(r)$, $B(r)$, $C(r)$, $D(r)$ величинами $A^*(r)$, $B^*(r)$, $C^*(r)$, $D^*(r)$ (при $\nu = 0$). Из краевых условий задачи находим систему восьми линейных алгебраических уравнений. Первые четыре уравнения этой системы получаются из равенств (174) добавлением в их левых частях соответственно левых частей равенств (175) при замене x_0 величиной x_1 , остальные — из равенств (175) добавлением в их левых частях соответственно левых частей равенств (174) при замене x_1 величиной x_0 . Решая эту систему уравнений относительно $A(r)$, $B(r)$, $C(r)$, $D(r)$, $A^*(r)$, $B^*(r)$, $C^*(r)$, $D^*(r)$, получаем искомые функции $\Phi(z)$ и $\Psi_1(z)$ в явном виде.

2. В полосе D ($0 < x < x_1$, $-\infty < y < \infty$) найти x -аналитические функции $\Phi(z)$ и $\Psi_1(z)$ с мнимыми частями, равными нулю на мнимой оси, удовлетворяющие при $x = x_1$ краевому условию

$$-\frac{\partial}{\partial y} \left[2x \frac{\partial \bar{\Phi}(z)}{\partial x} + \bar{\Psi}_1(z) \right] 1 + \\ + (k+1) \frac{\operatorname{Im} \Phi(z)}{x^2} = \varphi(y) + i\psi(y). \quad (176)$$

Эта задача эквивалентна первой основной задаче осесимметричной теории упругости для цилиндра радиуса x_1 . Берем $\Phi(z)$ в виде правой части равенства (368) гл. 2, $\Psi_1(z)$ — в виде правой части этого же равенства, заменяя $A(r)$, $B(r)$ величинами $A^*(r)$, $B^*(r)$ (при $\nu = 0$). При краевом условии (176) приходим к системе четырех линейных алгебраических уравнений

$$\left. \begin{aligned} -I_1(rx_1) \left(2x_1 r^2 + \frac{k+1}{x_1} \right) B(r) - \\ - rI_0(rx_1) B^*(r) &= C \left[\frac{\varphi(y) + \varphi(-y)}{2} \right], \\ I_1(rx_1) \left(2x_1 r^2 + \frac{k+1}{x_1} \right) A(r) + \\ + rI_0(rx_1) A^*(r) &= S \left[\frac{\varphi(y) - \varphi(-y)}{2} \right], \\ -2(rx_1)^2 I_0(rx_1) A(r) + rx_1 I_1(rx_1) A^*(r) &= \\ &= C \left[\frac{\psi(y) + \psi(-y)}{2} \right], \\ -2(rx_1)^2 I_0(rx_1) B(r) - rx_1 I_1(rx_1) B^*(r) &= \\ &= S \left[\frac{\psi(y) - \psi(-y)}{2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (177)$$

Решая эту систему уравнений относительно $A(r)$, $B(r)$, $A^*(r)$, $B^*(r)$, получаем искомые функции $\Phi(z)$ и $\Psi_1(z)$ в явном виде.

2'. В области H ($x_0 < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$) найти x -аналитические функции $\Phi(z)$ и $\Psi_1(z)$, удовлетворяющие при $x = x_0$ краевому условию (176), заменяя $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ величинами $\varphi_0(y)$ и $\psi_0(y)$.

Эта задача эквивалентна первой основной задаче осесимметричной теории упругости для пространства с цилиндрической полостью радиуса x_0 . Берем функцию $\Phi(z)$ в виде правой части равенства (369) гл. 2, функцию $\Psi_1(z)$ — в виде правой части этого же равенства, заменяя $C(r)$ и $D(r)$ величинами $C^*(r)$ и $D^*(r)$ (при $\nu = 0$). Из краевого условия (176) при $x = x_0$ и правой части

$\varphi_0(y) + i\psi_0(y)$ находим систему четырех линейных алгебраических уравнений

$$\left. \begin{aligned} & K_1(rx_0) \left(2x_0 r^2 + \frac{k+1}{x_0} \right) D(r) - \\ & - rK_0(rx_0) D^*(r) = C \left[\frac{\varphi_0(y) + \varphi_0(-y)}{2} \right], \\ & - K_1(rx_0) \left(2x_0 r^2 + \frac{k+1}{x_0} \right) C(r) + \\ & + rK_0(rx_0) C^*(r) = S \left[\frac{\varphi_0(y) - \varphi_0(-y)}{2} \right], \\ & - 2(rx_0)^2 K_0(rx_0) C(r) - \\ & - rx_0 K_1(rx_0) C^*(r) = C \left[\frac{\psi_0(y) + \psi_0(-y)}{2} \right], \\ & - 2(rx_0)^2 K_0(rx_0) D(r) + \\ & + rx_0 K_1(rx_0) D^*(r) = S \left[\frac{\psi_0(y) - \psi_0(-y)}{2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (178)$$

Решая эту систему уравнений, получаем $\Phi(z)$ и $\Psi_1(z)$ в явном виде.

2". В полосе $D^*(x_0 < x < x_1, -\infty < y < \infty)$ найти x -аналитические функции $\Phi(z)$ и $\Psi_1(z)$, удовлетворяющие при $x = x_1$ краевому условию (176) и при $x = x_0$ краевому условию (176), если заменить $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ величинами $\varphi_0(y)$ и $\psi_0(y)$.

Эта задача эквивалентна первой основной задаче осесимметричной теории упругости для полого цилиндра с внутренним радиусом x_0 и внешним радиусом x_1 . Берем функцию $\Phi(z)$ в виде суммы правых частей равенств (368), (369) гл. 2, функцию $\Psi_1(z)$ — в виде этой же суммы, заменяя $A(r)$, $B(r)$, $C(r)$, $D(r)$ величинами $A^*(r)$, $B^*(r)$, $C^*(r)$, $D^*(r)$ (при $\nu = 0$). При краевых условиях задачи приходим к системе восьми линейных алгебраических уравнений. Первые четыре уравнения этой системы получаются из равенств (177) добавлением в их левых частях соответственно левых частей равенств (178) при замене x_0 величиной x_1 , остальные — из равенств (178) добавлением в их левых частях соответственно левых частей равенств (177) при замене x_1 величиной x_0 . Решая эту систему относительно $A(r)$, $B(r)$, $C(r)$, $D(r)$, $A^*(r)$, $B^*(r)$, $C^*(r)$, $D^*(r)$, получаем искомые функции $\Phi(z)$ и $\Psi_1(z)$ в явном виде.

Применим основные формулы осесимметричной теории упругости в форме (117), (118), (118') к осесимметричным задачам теории упругости в параболических координатах ξ , η (гл. 2, § 7).

3. В области T ($0 < \xi < \infty$, $0 < \eta < \eta_1$) найти x -аналитические функции $\Phi_1(z)$ и $\Psi_3(z)$ с мнимыми частями, равными нулю при $x = 0$, удовлетворяющие при $\eta = \eta_1$ краевому условию

$$2(- (k+1)y + ikx) \Phi_1^*(z) + \Psi_3^*(z) = \varphi(\xi) + i\psi(\xi), \quad 0 < \xi < \infty, \quad (179)$$

где $\varphi(\xi)$ и $\psi(\xi)$ — заданные функции от ξ .

Эта задача в силу (117) эквивалентна второй основной задаче осесимметричной теории упругости для параболоида вращения с образующей полупараболой $\eta = \eta_1$, $0 < \xi < \infty$. В соответствии с интегральным представлением (380) гл. 2 при $\nu = 0$ берем искомую функцию $\Phi_1^*(z)$ в виде

$$\Phi_1^*(z) = \int_0^\infty [I_0(r\eta) J_0(r\xi) - iI_1(r\eta) J_1(r\xi)] A(r) r dr, \quad (180)$$

функцию $\Psi_3^*(z)$ — в виде (180), заменяя $A(r)$ величиной $A^*(r)$. Полагая

$$\left. \begin{aligned} a &= \int_0^\infty I_0(r\eta_1) A(r) J_0(r\xi) r dr, \\ b &= \int_0^\infty I_1(r\eta_1) A(r) J_1(r\xi) r dr, \end{aligned} \right\} \quad (181)$$

краевое условие (179) можем записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty [- (k+1) \eta_1^2 A(r) + A^*(r)] I_0(r\eta_1) J_0(r\xi) r dr + (k+1) \xi^2 a + \\ + 2k\eta_1 \xi b = \varphi(\xi), \\ \int_0^\infty [- (k+1) \eta_1^2 A(r) + A^*(r)] I_1(r\eta_1) J_1(r\xi) r dr - (k+1) \xi^2 b + \\ + 2k\eta_1 \xi a = \psi(\xi). \end{aligned} \right\} \quad (182)$$

Замечая, что

$$\left. \begin{aligned} \xi a &= - \int_0^\infty \frac{d}{dr} (I_0(r\eta_1) A(r)) J_1(r\xi) r dr, \\ \xi^2 a &= - \int_0^\infty \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{d}{dr} (I_0(r\eta_1) A(r)) \right] J_0(r\xi) r dr, \end{aligned} \right\} \quad (181')$$

$$\left. \begin{aligned} \xi b &= \int_0^\infty \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (I_1(r\eta_1) A(r) r) J_0(r\xi) r dr, \\ \xi^2 b &= - \int_0^\infty \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (I_1(r\eta_1) A(r) r) \right] J_1(r\xi) r dr, \end{aligned} \right\} \quad (181'')$$

приходим к системе двух линейных дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned}
 & [-(k+1)\eta_1^2 A(r) + A^*(r)] I_0(r\eta_1) - (k+1) \frac{1}{r} \times \\
 & \times \frac{d}{dr} \left[r \frac{d}{dr} (I_0(r\eta_1) A(r)) \right] + \\
 & + 2k\eta_1 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (I_1(r\eta_1) A(r)r) = \tilde{\varphi}(r), \\
 & - [-(k+1)\eta_1^2 A(r) + A^*(r)] I_1(r\eta_1) + \\
 & + (k+1) \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (I_1(r\eta_1) A(r)r) \right] - \\
 & - 2k\eta_1 \frac{d}{dr} (I_0(r\eta_1) A(r)) = \tilde{\psi}(r),
 \end{aligned} \right\} \quad (183)$$

где $\tilde{\varphi}(r)$ и $\tilde{\psi}(r)$ — трансформации Ханкеля функций $\varphi(\xi)$ и $\psi(\xi)$ по переменной ξ при $\nu = 0$ и $\nu = 1$, $\tilde{\varphi}(r) = \chi_0[\varphi(\xi)]$, $\tilde{\psi}(r) = \chi_1[\psi(\xi)]$. Из этой системы получаем

$$\begin{aligned}
 & \frac{dA(r)}{dr} \left[2\eta_1 \left(\frac{I_0(r\eta_1)}{I_1(r\eta_1)} - \frac{I_1(r\eta_1)}{I_0(r\eta_1)} \right) - \frac{k+1}{r} \right] = \\
 & = \frac{\tilde{\varphi}(r)}{I_0(r\eta_1)} + \frac{\tilde{\psi}(r)}{I_1(r\eta_1)}. \quad (184)
 \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая условия (380') гл. 2, находим $A(r)$ при помощи одной квадратуры. Определяя $A^*(r)$ из (183) при помощи дифференцирований, получаем функции $\Phi_1^*(z)$ и $\Psi_3^*(z)$ в явном виде. Через эти функции в соответствии с (109), (119), (120) при помощи квадратур определяются функции $\Psi_4^*(z)$ и Q . По формулам (117), (118) или (117), (118') находятся все элементы напряженного состояния.

3'. В области S ($0 < \xi < \infty$, $\eta_0 < \eta < \infty$) найти x -аналитические функции $\Phi_1(z)$ и $\Psi_3(z)$ с мнимыми частями, равными нулю при $x=0$, удовлетворяющие при $\eta = \eta_0$ краевому условию (179), если заменить $\varphi(\xi)$ и $\psi(\xi)$ величинами $\varphi_0(\xi)$ и $\psi_0(\xi)$.

Эта задача эквивалентна второй основной задаче осесимметричной теории упругости для внешности параболоида вращения с образующей полупараболой $\eta = \eta_0$, $0 < \xi < \infty$. В соответствии с интегральным представлением (381) гл. 2 при $\nu = 0$ берем искомую функцию $\Phi_1^*(z)$ в виде

$$\Phi_1^*(z) = \int_0^\infty [K_0(r\eta) J_0(r\xi) + iK_1(r\eta) J_1(r\xi)] B(r) r dr, \quad (185)$$

функцию $\Psi_3^*(z)$ — в виде правой части равенства (185), заменяя $B(r)$ величиной $B^*(r)$. Вводя обозначения

$$\alpha = \int_0^\infty K_0(r\eta_0) J_0(r\xi) B(r) r dr, \quad \beta = \int_0^\infty K_1(r\eta_0) J_1(r\xi) B(r) r dr \quad (186)$$

и замечая, что

$$\left. \begin{aligned} \xi \alpha &= - \int_0^{\infty} \frac{d}{dr} (K_0(r\eta_0) B(r)) J_1(r\xi) r dr, \\ \xi^2 \alpha &= - \int_0^{\infty} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{d}{dr} (K_0(r\eta_0) B(r)) \right] J_0(r\xi) r dr, \end{aligned} \right\} \quad (186')$$

$$\left. \begin{aligned} \xi \beta &= \int_0^{\infty} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (K_1(r\eta_0) B(r) r) J_0(r\xi) r dr, \\ \xi^2 \beta &= - \int_0^{\infty} \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (K_1(r\eta_0) B(r) r) \right] J_1(r\xi) r dr, \end{aligned} \right\} \quad (186'')$$

из краевого условия (179) при $\eta = \eta_0$ и правой части $\Phi_0(\xi) + i\psi_0(\xi)$ получаем систему двух дифференциальных уравнений второго порядка

$$\left. \begin{aligned} &[-(k+1)\eta_0^2 B(r) + B^*(r)] K_0(r\eta_0) - 2k\eta_0 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (K_1(r\eta_0) B(r) r) - \\ &-(k+1) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{d}{dr} (K_0(r\eta_0) B(r)) \right] = \tilde{\varphi}_0(r), \\ &[-(k+1)\eta_0^2 B(r) + B^*(r)] K_1(r\eta_0) - 2k\eta_0 \frac{d}{dr} (K_0(r\eta_0) B(r)) - \\ &-(k+1) \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (K_1(r\eta_0) B(r) r) \right] = \tilde{\psi}_0(r), \end{aligned} \right\} \quad (187)$$

где $\tilde{\varphi}_0(r) = \chi_0[\Phi_0(\xi)]$, $\tilde{\psi}_0(r) = \chi_1[\psi_0(\xi)]$. Из этой системы находим

$$\begin{aligned} \frac{dB(r)}{dr} \left[-2\eta_0 \left(\frac{K_0(r\eta_0)}{K_1(r\eta_0)} - \frac{K_1(r\eta_0)}{K_0(r\eta_0)} \right) - \frac{k+1}{r} \right] = \\ = \frac{\tilde{\varphi}_0(r)}{K_0(r\eta_0)} - \frac{\tilde{\psi}_0(r)}{K_1(r\eta_0)}. \end{aligned} \quad (188)$$

Отсюда, учитывая условия (381') гл. 2, находим $B(r)$ при помощи одной квадратуры. Определив $B^*(r)$ из (187) при помощи дифференцирований, получаем искомые функции $\Phi_1^*(z)$ и $\Psi_3^*(z)$ в явном виде.

3°. В области T^* ($0 < \xi < \infty$, $\eta_0 < \eta < \eta_1$) найти x -аналитические функции $\Phi_1(z)$ и $\Psi_3(z)$ с мнимыми частями, равными нулю при $x = 0$, удовлетворяющие при $\eta = \eta_1$ краевому условию (179) и при $\eta = \eta_0$ — краевому условию (179), если заменить $\varphi(\xi)$ и $\psi(\xi)$ величинами $\varphi_0(\xi)$ и $\psi_0(\xi)$.

Эта задача эквивалентна второй основной задаче осесимметричной теории упругости для параболического слоя с образующими полупараболами $\eta = \eta_1$, $0 < \xi < \infty$, и $\eta = \eta_0$, $0 < \xi < \infty$. Берем функцию $\Phi_1^*(z)$ в виде суммы правых частей равенств (180) и (185), функцию $\Psi_3^*(z)$ — в виде этой же суммы, заменяя $A(r)$ и $B(r)$ величинами $A^*(r)$ и $B^*(r)$. Делая такие же выкладки, как и в предыдущих случаях, приходим к системе четырех обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с неизвестными функциями $A(r)$, $B(r)$, $A^*(r)$, $B^*(r)$. Первые два уравнения этой системы получаются из равенств (183) добавлением в их левых частях соответственно левых частей равенств (187) при замене η_0 величиной η_1 , остальные — из равенств (187) добавлением в их левых частях соответственно левых частей равенств (184) при замене η_1 величиной η_0 . Таким образом, решение поставленной задачи сводится к решению указанной системы четырех линейных дифференциальных уравнений второго порядка с неизвестными функциями $A(r)$, $A^*(r)$ и $B(r)$, $B^*(r)$, удовлетворяющими соответственно условиям (380'), (381') гл. 2.

4. В области T ($0 < \xi < \infty$, $0 < \eta < \eta_1$) найти x -аналитические функции $\Phi_1(z)$ и $\Psi_4(z)$ с мнимыми частями, равными нулю при $x = 0$, удовлетворяющие при $\eta = \eta_1$ краевому условию

$$2ix\Phi_1^*(z) - \Psi_4^*(z) + (k+1) \int_0^{\xi} \frac{Q}{x^2} dy = \\ = \varphi(\xi) + i\psi(\xi), \quad 0 < \xi < \infty, \quad (189)$$

где Q определяется равенствами (120) гл. 2, $\varphi(\xi)$ и $\psi(\xi)$ — заданные функции от ξ ($0 < \xi < \infty$).

Эта задача в силу (118') эквивалентна первой основной задаче осесимметричной теории упругости для параболоида вращения с образующей полупараболой $\eta = \eta_1$, $0 < \xi < \infty$. Значение $\text{Re}\Psi_4^*(z)$ в (118') в точке $\xi = 0$, $\eta = \eta_1$ принято равным нулю, так как изменение этой величины в силу (109'), (117) соответствует жесткому смещению тела в направлении оси y . Берем $\Phi_1(z)$ в виде правой части равенства (180), функцию $\Psi_4(z)$ — в виде правой части равенства (180), заменяя $A(r)$ величиной $A^*(r)$. Определяя P_1 и Q_1 из (180) и подставляя их значения в (120), после интегрирования получаем

$$Q = \int_0^{\infty} [-\eta^2 I_0(r\eta) \xi J_1(r\xi) + \eta I_1(r\eta) \xi^2 J_2(r\xi)] A(r) dr,$$

или в силу равенства $J_0(x) + J_2(x) = 2x^{-1}J_1(x)$

$$Q = \int_0^{\infty} \{[-\eta^2 I_0(r\eta) + 2\eta r^{-1} I_1(r\eta)] \xi J_1(r\xi) - \eta I_1(r\eta) \xi^2 J_0(r\xi)\} A(r) dr. \quad (190)$$

Последнее слагаемое в левой части равенства (189) можно записать в виде

$$\Lambda = (k+1) \int_0^{\infty} \left\{ \left[-I_0(r\eta_1) + \frac{2}{r\eta_1} I_1(r\eta_1) \right] r^{-2} A(r) + \right. \\ \left. + \frac{1}{r\eta_1} \frac{d}{dr} \left(I_1(r\eta_1) \frac{1}{r} A(r) \right) \right\} J_0(r\xi) r dr. \quad (191)$$

Исходя из краевых условий (189) и учитывая (181), (181'), (181'') и (191), для определения $A(r)$ и $A^*(r)$ получаем систему двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\left. \begin{aligned} & 2\eta_1 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (I_1(r\eta_1) A(r) r) + \\ & + (k+1) \frac{1}{r\eta_1} \frac{d}{dr} \left(I_1(r\eta_1) \frac{1}{r} A(r) \right) - I_0(r\eta_1) A^*(r) + \\ & + (k+1) \left[-I_0(r\eta_1) + \frac{2}{r\eta_1} I_1(r\eta_1) \right] \frac{1}{r^2} A(r) = \tilde{\varphi}(r), \\ & -2\eta_1 \frac{d}{dr} (I_0(r\eta_1) A(r)) + I_1(r\eta_1) A^*(r) = \tilde{\psi}(r), \end{aligned} \right\} \quad (192)$$

где $\tilde{\varphi}(r) = \chi_0 [\varphi(\xi)]$, $\tilde{\psi}(r) = \chi_1 [\psi(\xi)]$. Из этой системы получаем

$$\frac{dA(r)}{dr} \left[2\eta_1 \left(\frac{I_1(r\eta_1)}{I_0(r\eta_1)} - \frac{I_0(r\eta_1)}{I_1(r\eta_1)} \right) + \frac{k+1}{r^2\eta_1} \frac{I_1(r\eta_1)}{I_0(r\eta_1)} \right] = \frac{\tilde{\varphi}(r)}{I_0(r\eta_1)} + \frac{\tilde{\psi}(r)}{I_1(r\eta_1)}. \quad (193)$$

Отсюда, учитывая условия (380') гл. 2, находим $A(r)$ при помощи одной квадратуры. Из (192) $A^*(r)$ определяется при помощи дифференцирований, функции $\Phi_1^*(r)$ и $\Psi_4^*(r)$ находятся в явном виде. По формулам (119), (109) определяется функция $\Psi_3(z)$. По формулам (117), (118) или (117), (118') находятся все элементы напряженного состояния.

4'. В области S ($0 < \xi < \infty$, $\eta_0 < \eta < \infty$) найти x -аналитические функции $\Phi_1(z)$ и $\Psi_4(z)$ с мнимыми частями, равными нулю при $x = 0$, удовлетворяющие при $\eta = \eta_0$ краевому условию (189), если заменить $\varphi(\xi)$ и $\psi(\xi)$ величинами $\varphi_0(\xi)$ и $\psi_0(\xi)$.

Эта задача эквивалентна первой основной задаче осесимметричной теории упругости для внешности параболоида вращения с образующей полупараболой $\eta = \eta_0$, $0 < \xi < \infty$. Берем $\Phi_1^*(z)$ в виде правой части равенства (185), $\Psi_4^*(z)$ — в виде правой части равенства (185), заменяя $B(r)$ величиной $B^*(r)$. По формуле (120) находим

$$Q = \int_0^{\infty} \{ [-\eta^2 K_0(r\eta) - 2\eta r^{-1} K_1(r\eta)] \xi J_1(r\xi) + \\ + \eta K_1(r\eta) \xi^2 J_0(r\xi) \} B(r) dr. \quad (194)$$

Последнее слагаемое левой части равенства (189) при $\eta = \eta_0$ получаем в виде

$$\Lambda = (-k + 1) \int_0^{\infty} \left\{ \left[K_0(r\eta_0) + \frac{2}{r\eta_0} K_1(r\eta_0) \right] r^{-1} J_0(r\xi) + \right. \\ \left. + \frac{1}{r\eta_0} K_1(r\eta_0) \xi J_1(r\xi) \right\} B(r) dr. \quad (195)$$

Исходя из краевого условия задачи и учитывая (186), (186'), (186''), приходим к системе двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\left. \begin{aligned} & -2\eta_0 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (K_1(r\eta_0) B(r) r) - \\ & - \frac{k+1}{r\eta_0} \frac{d}{dr} \left(K(r\eta_0) \frac{1}{r} B(r) \right) - K_0(r\eta_0) B^*(r) - \\ & - (k+1) \left[K_0(r\eta_0) + \frac{2}{r\eta_0} K_1(r\eta_0) \right] r^{-2} B(r) = \tilde{\varphi}_0(r), \\ & -2\eta_0 \frac{d}{dr} (K_0(r\eta_0) B(r)) - K_1(r\eta_0) B^*(r) = \tilde{\psi}_0(r), \end{aligned} \right\} \quad (196)$$

где $\tilde{\varphi}_0(r)$, $\tilde{\psi}_0(r)$ — те же функции, что и ранее. Из (196) находим

$$\frac{dB(r)}{dr} \left[-2\eta_0 \left(\frac{K_1(r\eta_0)}{K_0(r\eta_0)} - \frac{K_0(r\eta_0)}{K_1(r\eta_0)} \right) - \frac{k+1}{r^2\eta_0} \frac{K_1(r\eta_0)}{K_0(r\eta_0)} \right] = \\ = \frac{\tilde{\varphi}_0(r)}{K_0(r\eta_0)} - \frac{\tilde{\psi}_0(r)}{K_1(r\eta_0)}. \quad (197)$$

Отсюда, учитывая условия (381') гл. 2, и из (196) находим $B(r)$ и $B^*(r)$ при помощи одной квадратуры и дифференцирований, функции $\Phi_1(z)$ и $\Psi_4(z)$ определяются в явном виде.

4". В области T^* ($0 < \xi < \infty$, $\eta_0 < \eta < \eta_1$) найти x -аналитические функции $\Phi_1(z)$ и $\Psi_4(z)$ с мнимыми частями, равными нулю при $x = 0$, удовлетворяющие при $\eta = \eta_1$ краевому условию (189) и при $\eta = \eta_0$ — краевому условию (189), если заменить $\varphi(\xi)$ и $\psi(\xi)$ величинами $\varphi_0(\xi)$ и $\psi_0(\xi)$.

Эта задача в силу (118') эквивалентна первой основной задаче осесимметричной теории упругости для параболического слоя с образующими полупараболами $\eta = \eta_1$, $0 < \xi < \infty$, и $\eta = \eta_0$, $0 < \xi < \infty$. Берем функцию $\Phi_1(z)$ в виде суммы правых частей равенств (180), (185), функцию $\Psi_4(z)$ — в виде этой же суммы, заменяя $A(r)$ и $B(r)$ величинами $A^*(r)$ и $B^*(r)$. Приходим к системе четырех линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Первые два уравнения этой системы получаются из равенств (192) добавлением в их левых частях соответственно левых частей равенств (196) при замене η_0 величиной η_1 , остальные — из равенств (196) добавлением в их левых частях соответственно левых частей равенств (192) при замене η_1 величиной η_0 . Таким образом,

решение поставленной задачи сводится к решению указанной системы четырех линейных дифференциальных уравнений первого порядка с неизвестными функциями $A(r)$, $A^*(r)$ и $B(r)$, $B^*(r)$, удовлетворяющими соответственно условиям (380), (381') гл. 2.

§ 6. РЕШЕНИЕ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ОСЕССИММЕТРИЧНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ СИСТЕМЫ КРУГОВОГО И КОЛЬЦЕВОГО ШТАМПОВ МЕТОДОМ p -АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Контактная задача осесимметричной теории упругости о действии кругового или кольцевого штампа или системы кругового и кольцевого штампов на упругое полупространство изучалась многими исследователями [100—102, 171, 191—199, 16]. В случаях одного кругового штампа и одного кольцевого штампа с бесконечным внешним радиусом (при отсутствии трения и сцепления) задача решается в явном виде [100—102, 171, 192, 195].

При действии двух штампов или одного кольцевого штампа с конечным внешним радиусом решение задачи в явном виде не получается [194, 196—199]. Самой простой следует считать задачу о действии системы кругового и кольцевого с бесконечным внешним радиусом штампов. Решение этой задачи [197] при помощи классических интегральных преобразований сводится к решению одного весьма простого интегрального уравнения Фредгольма второго рода. В работе [16] при помощи p -аналитических функций показано, что решение соответствующей задачи теории осесимметричного потенциала сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода с непрерывным симметричным ядром

$$\lambda(x) = \omega(x) + \frac{1}{\pi^2} \int_0^a K(x, \xi) \lambda(\xi) d\xi, \quad (198)$$

где $\omega(x)$ — заданная функция от x ($0 < x < a$),

$$K(x, \xi) = \frac{2}{x^2 - \xi^2} \left(\xi \ln \frac{b - \xi}{b + \xi} - x \ln \frac{b - x}{b + x} \right), \quad 0 < x, \xi < a, \quad (199)$$

a — радиус кругового штампа, b — внутренний радиус кольцевого штампа. Этот результат о решении краевой задачи теории осесимметричного потенциала применен в работе [195] к задаче о системе кругового и кольцевого с бесконечным внешним радиусом штампов. При этом также рассмотрен вопрос о приближенном решении интегрального уравнения (198).

Рассмотрим с помощью метода p -аналитических функций [113] решения задачи о кольцевом штампе и задачи о системе кругового и кольцевого штампов, не предполагая, что внешний радиус кольцевого штампа равен бесконечности.

Предположим, что на упругое полупространство $y > 0$ при отсутствии трения и сцепления действует система двух осесимметричных штампов: кругового штампа с радиусом b_1 и кольцевого штампа с внутренним радиусом a_2 и внешним радиусом b_2 ($0 < b_1 < a_2 < b_2 < \infty$). Пусть также

$$y = \psi_1(x), \quad \psi_1(0) = 0, \quad 0 < x < b_1, \quad y = \psi_2(x), \quad \psi_2(a_2) = 0,$$

$$a_2 < x < b_2,$$

являются уравнениями образующих первого (кругового) и второго (кольцевого) штампов, $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ — заданные функции от x , непрерывные соответственно на отрезках $[0, b_1]$, $[a_2, b_2]$. Из физических условий задачи при $y = +0$ получаем равенства

$$\tau_{xy} = 0 \quad (0 < x < \infty), \quad \sigma_y = 0 \quad (b_1 < x < a_2, \quad b_2 < x < \infty), \quad (200)$$

$$w = h_j + \psi_j(x), \quad a_j < x < b_j, \quad j = 1, 2, \quad a_1 = 0,$$

где h_j ($j = 1, 2$) — заданные вещественные постоянные. Применяем основные формулы осесимметричной теории упругости (107), (108), считая, что

$$Q(0, y) = 0, \quad S(0, y) = 0, \quad y > 0. \quad (201)$$

На основании первого из условий (200) с учетом (107), (108) получаем

$$P(x, 0) - P(0, 0) = R(x, 0) - R(0, 0),$$

$$R(x, 0) = P(x, 0) + C_1, \quad S(x, 0) = Q(x, 0),$$

где C_1 — постоянная. Из формул (107), (108) следует, что изменению значений $P(0, 0)$ и $R(0, 0)$ соответствует жесткое смещение полупространства в направлении оси y . Поэтому можно считать $\Phi(z) = \Psi(z)$. Основные формулы (107), (108) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} 2\mu(w - iU) &= k\Phi(z) - 2y \frac{\partial \bar{\Phi}(z)}{\partial y} + \bar{\Phi}(z), \\ R^* + iZ^* &= \left[\Phi(z) + 2y \frac{\partial \bar{\Phi}(z)}{\partial y} - \bar{\Phi}(z) \right]_C - 2\mu \int_C \frac{u}{x} dy. \end{aligned} \right\} \quad (202)$$

Из условий (200) получаем равенства

$$\left. \begin{aligned} P^+(x, 0) &= \tilde{\Phi}_j(x) = H_j + \tilde{\Psi}_j(x), & a_j < x < b_j, & j = 1, 2, \\ Q(0, y) &= 0, & 0 < y < \infty, \\ Q^+(x, 0) &= c_1, & b_1 < x < a_2, & Q^+(x, 0) = c_1 + c_2, & b_2 < x < \infty. \end{aligned} \right\} \quad (203)$$

Здесь в соответствии с (202)

$$\tilde{\Psi}_j(x) = 2\mu \frac{1}{k+1} \psi_j(x), \quad a_j < x < b_j, \quad j = 1, 2,$$

$$H_j = 2\mu \frac{1}{k+1} h_j, \quad c_j = \frac{1}{4\pi} P_j, \quad j = 1, 2, \quad (204)$$

где P_1 и P_2 — прижимающие силы первого (кругового) и второго (кольцевого) штампов. Считая, что функция $\Phi(z) = \tilde{f}(z)$ x -аналитически продолжена через интервал вещественной оси (b_1, a_2) , и вводя обозначение

$$\Phi(z) = P(x, y) + iQ(x, y) = \tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y),$$

для ее определения получаем краевую задачу о комплексном x -аналитическом потенциале (440), (441), (442) гл. 2.

Таким образом, искомая функция $\Phi(z) = \tilde{f}(z)$ определяется каким-либо из равенств (458), (458'), (485) гл. 2, где $U_2(\lambda)$ ($a_2 < \lambda < b_2$) — решение интегрального уравнения (480) гл. 2, числовой параметр γ_2 и функция $U_1(\lambda)$ ($0 < \lambda < b_1$) определяются соотношениями (479), (461) гл. 2, а прижимающие силы P_1 и P_2 первого и второго штампов — равенствами (457), (457') гл. 2 и второй парой соотношений (204).

Отметим некоторые частные случаи полученного решения задачи о системе кругового и кольцевого штампов.

1. Пусть $b_1 = 0$, т. е. на верхнее полупространство действует один кольцевой штамп. В этом случае в интегральном уравнении (480) гл. 2 $S(\lambda) = 0$, $A = 0$, в уравнениях (480), (480') гл. 2 $F_1(\xi) = 0$ и в равенствах (479), (485) гл. 2 соответственно $A = 0$, $U_1(t) = 0$.

2. Если на полупространство действует один круговой штамп, то вместо соотношений (459) — (462) гл. 2 при $0 < x, \lambda < b_1$ получаем

$$\tilde{\Phi}_1(x) = \int_0^x \xi U_1(\xi) \frac{d\xi}{\sqrt{x^2 - \xi^2}}, \quad \lambda U_1(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} \frac{1}{\pi} \int_0^\lambda \tilde{\Phi}_1(x) \frac{2x dx}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}}. \quad (205)$$

Искомая x -аналитическая функция $\Phi(z) = \tilde{f}(z)$ записывается в виде уравнения (480) или (480') гл. 2 при условии, что $F_2(\xi) = 0$, $\gamma_2 = 0$, или в виде

$$\begin{aligned} \tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y) = & \int_0^{b_1} \left\{ \operatorname{Re} \frac{1}{\sqrt{x^2 - (t - iy)^2}} + \right. \\ & \left. + i \operatorname{Im} \left[\frac{t - iy}{\sqrt{x^2 - (t - iy)^2}} + i \right] \right\} t U_1(t) dt, \quad y \geq 0. \end{aligned} \quad (206)$$

Прижимающая сила P_1 в соответствии с формулой (457) гл. 2, а также (204), (205) определяется равенством

$$\frac{1}{4\pi} P_1 = c_1 = \int_0^{b_1} \Phi_1(\lambda) d\lambda = \int_0^{b_1} \left[\frac{d}{d\lambda} \frac{1}{\pi} \int_0^\lambda \tilde{\Phi}_1(x) \frac{2x dx}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}} \right] d\lambda, \quad (207)$$

или

$$P_1 = \frac{16\mu}{k+1} b_1 h_1 + \frac{8\mu}{k+1} \int_0^{b_1} \tilde{\psi}_1(x) \frac{2x dx}{\sqrt{b_1^2 - x^2}}.$$

Равенство (207) выражает вполне определенную зависимость между прижимающей силой P_1 и просадкой штампа h_1 .

3. В случае одного кольцевого штампа с бесконечным внешним радиусом ($b_1 = 0$, $c_1 = 0$, $b_2 = \infty$) краевая задача (203) совпадает со случаем «в» краевой задачи об x -аналитическом потенциале (гл. 2, § 9) и ее решение $\Phi(z) = \tilde{f}(z)$ получается в явном виде — равенство (503) гл. 2 — при условии, что $v(x, 0)$ определяется через $\tilde{\Phi}_2(x)$ равенством (500) гл. 2.

4. В случае системы кругового и кольцевого с бесконечным внешним радиусом штампов ($b_2 = \infty$) задача совпадает со случаем «г» задачи о комплексном x -аналитическом потенциале (гл. 2, § 9) и ее решение $\Phi(z) = \tilde{f}(z)$ получается в виде равенства (445) гл. 2 при условии, что $\tilde{f}(z)$ определяется равенством (504) гл. 2; $\lambda(x)$ — решение интегрального уравнения (506) гл. 2, $\mu^*(x)$, $w(x)$, $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$ определяются равенствами (505), (508) — (510) гл. 2.

1. Положий Г. Н. Интегральные представления непрерывно дифференцируемых функций комплексного переменного. Кандидатская диссертация. Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, 1946.
2. Положий Г. Н.— ДАН СССР, 1947, 58, 7, 1275—1278.
3. Положий Г. Н.— ДАН СССР, 1948, 60, 5, 769—772.
4. Положий Г. Н. О некоторых методах теории функций комплексного переменного в механике сплошных сред. Докторская диссертация. Математический институт им. В. А. Стеклова АН СССР, 1953.
5. Положий Г. Н.— Мат. сб., 1953, 32 (74), 3, 485—492.
6. Положий Г. Н.— ДАН СССР, 1954, 75, 5, 927—930.
7. Положий Г. Н.— В кн.: Труды III Всесоюзного математического съезда, 1. Изд-во АН СССР, М., 1956, 95—96.
8. Положий Г. Н.— *Revue de Math. pures et appl.* Edit. de l'Acad. de la Rep. pop. Roumaine, 1957, 2, 331—361.
9. Положий Г. М.— Наук. збірник Київ. ун-ту за 1957 р., 1958.
10. Положий Г. М.— Вісник Київ. ун-ту. Сер. астр., мат., мех., 1959, 2, 1, 19—29.
11. Положий Г. Н.— УМЖ, 1963, 15, 1, 25—41.
12. Положий Г. М.— ДАН УРСР, 1964, 7.
13. Положий Г. Н.— В кн.: Труды Международного симпозиума по приложениям теории функций комплексного переменного в механике сплошной среды (Тбилиси, сентябрь 1963). «Наука», М., 1965.
14. Положий Г. Н.— УМЖ, 1964, 16, 2, 254—259.
15. Положий Г. Н.— УМЖ, 1964, 16, 5, 631—656.
16. Положий Г. Н.— УМЖ, 1965, 17, 2, 61—87.
17. Положий Г. М.— Вісник Київ. ун-ту. Сер. мат. та мех., 1964, 6, 3—13.
18. Положий Г. М.— Наук. збірник Київ. ун-ту за 1956 р., 1957.
19. Положий Г. Н.— УМЖ, 1954, 6, 3, 333—348.
20. Положий Г. Н.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1955, 19, 245—270.
21. Picard.— *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1891, 112.
22. Beltrami.— *Opere mat. Milano*, 1911, 3, 115—128, 349—377.
23. Bers L. and Gelbart A.— *Quart. of Appl. Math.*, 1943, 1, 168—188.
24. Bers L. and Gelbart A.— *Trans. of the Amer. Math. Soc.*, 1944, 56, 67—93.
25. Bers L.— *Amer. J. of Math.*, 1956, 78, 3, 486—496.
26. Weinstein A.— *Trans. of the Amer. Math. Soc.*, 1948, 63, 2, 342—354.
27. Weinstein A.— *Bull. of the Amer. Math. Soc.*, 1953, 59, 20—38.
28. Bers L.— *Amer. J. of Math.*, 1950, 72, 705—712.

29. Петровский И. Г.— Усп. мат. наук, 1946, 1, 3-4 (13-14), 44—70.
30. Лукомская М. А.— Мат. сб., 1951, 29 (71), 551—558.
31. Лукомская М. А.— Прикл. мат. и мех., 1953, 17, 6, 745—747.
32. Bers L. and Gelbart A.— Ann. of Math., 1947, 48, 342—357.
33. Agmon S. and Bers L.— Proc. of the Amer. Math. Soc., 1952, 3, 757—764.
34. Bergman S.— Duke Math. J., 1947, 14, 349—366.
35. Bergman S.— Proc. of the Nat. Acad. of Sci. of the U. S. A., 1943, 29, 276—281.
36. Bers L.— Bull. of the Amer. Math. Soc., 1956, 62, 4, 291—331.
37. Bers L. Theory of pseudo-analytic functions. Lecture notes (mimeographed). New York University, 1953.
38. Carleman T.— C. R. Acad. Sci. Paris., 1933, 197, 471—474.
39. Carleman T.— Arkiv för Mat. Astr. och Fysic., 1933, 26, 17, 1—9.
40. Векуа И. Н.— Мат. сб., 1952, 31 (73), 2, 217—314.
41. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. Физматгиз, М., 1959.
42. Шабат Б. В.— ДАН СССР, 1949, 69, 3, 305—308.
43. Лопатинский Я. Б.— УМЖ, 1950, 2, 2, 56—73.
44. Bers L.— Proc. of the Nat. Acad. of Sci. of the U. S. A., 1950, 36, 130—136; 1951, 37, 42—47.
45. Положий Г. Н.— Мат. сб., 1949, 24 (66), 3, 375—384.
46. Положий Г. Н.— В кн.: Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного. Физматгиз, М., 1960, 483—515.
47. Положий Г. Н.— УМЖ, 1968, 20, 3, 325—339.
48. Pompeiu D.— Rend. Circolo mat. Palermo, 1912, 33, 108—113; 1913, 35, 277—281.
49. Колосов Г. В. Об одном приложении теории функций комплексного переменного к плоской задаче математической теории упругости. Юрьев, 1909.
50. Положий Г. Н.— ДАН СССР, 1949, 63, 6, 615—618.
51. Grötzsch H.— Berichte der Sächsische Akad. der Wiss., Leipzig, 1928, 28; 1930, 30.
52. Alfors L.— Acta Math., 1935, 65, 157—194.
53. Lavrentieff M. A.— Мат. сб., 1935, 42, 407—424.
54. Alfors L.— J. d'Analyse Math., 1954, 4, 1—58.
55. Stoilow S.— Lecons sur les principes topologiques de la theorie des fonctions analytiques. Gauthier — Villars, Paris, 1938.
56. Teichmüller O.— Deutsche Math., 1938, 3, 621—678.
57. Pfluger A.— Ann. de L'Inst. Fourier, 1950, 2, 69—80.
58. Gergen J. and Dressel F.— Trans. of the Amer. Math. Soc., 1954, 77, 151—178.
59. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного. ОНТИ, М., 1945.
60. Положий Г. Н. Уравнения математической физики. «Высшая школа», М., 1964.
61. Hilbert D. Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Leipzig, 1912.
62. Sommerfeld.— Math. Enc., 1900, 2, 7.
63. Picard.— Bull. de la Soc. math., 1900, 186—191.
64. Hedrick. Über den analytischen Charakter der Lösungen von Differentialgleichungen. Dissertation. Druck. der Dieterichschen Univer. Bruchdruck. Göttingen, 1901, 1—77.
65. Holmgren.— Math. Ann., 1903, 58, 404—412.
66. Picard.— C. R. Acad. Sci. Paris, 1903, 136, 1293—1296.
67. Lichtenstein.— J. für die reine und ang. Math., 1912, 142, 1—40.
68. Курант Р. и Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 1. ГИИТЛ, М., 1951.
69. Lichtenstein.— Enc. d. Math. Wiss., 1918, 2, 3, 176—376.

70. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Т. 1. ИЛ, М., 1949.
71. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. ГИФМЛ, М., 1963.
72. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. ГИТТЛ, М., 1962.
73. Гурса Э. Курс математического анализа. Т. 3. Ч. 1. ГТТИ, М. — Л., 1933.
74. Бернштейн С. Н. — Сообщ. Харьков. мат. об-ва. Вторая серия, 1908—1909, 11, 1—64.
75. Норф Е. — Math. Zeitschr., 1929, 30, 404—414.
76. Норф Е. — Math. Zeitschr., 1931, 34, 194—233.
77. Szilard K. — Math. Zeitschr., 1927, 26, 4, 653—671.
78. Данилюк И. И. — ДАН СССР, 1955, 105, 1, 11—13.
79. Шабат Б. В. — В кн.: Математика в СССР за сорок лет (1917—1957). ГИФМЛ, М., 1959, 481—494.
80. Вишик М. И. и др. — В кн.: Математика в СССР за сорок лет (1917—1957). ГИФМЛ, М., 1959, 563—637.
81. Лаврентьев М. А. Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа. Изд-во АН СССР, М., 1962.
82. Theodoresco N. Theses. Paris, 1931.
83. Theodoresco N. — Ann. Roumains Math. Bucarest, 1936, 3.
84. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Изд-во АН СССР, М., 1946.
85. Гахов Ф. Д. — Мат. сб., 1937, 2 (44), 4, 673—683.
86. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. ГИФМЛ, М., 1963.
87. Берс Л. Математические вопросы дозвуковой и околзвуковой газовой динамики. ИЛ, М., 1961.
88. Домбровский Г. А. — ДАН СССР, 1955, 103, 5, 777—779.
89. Белоносов С. М. — Прикл. мат. и мех., 1957, 21, 1, 109—114.
90. Положий Г. М. — ДАН УРСР, 1964, 8.
91. Положий Г. Н. — Сиб. мат. журн., 1964, 5, 6.
92. Положий Г. М. — ДАН УРСР, 1964, 10.
93. Келдыш М. В. и Седов Л. И. — ДАН СССР, 1937, 16, 1, 7—10.
94. Signorini A. — Ann. mat. pura ed appl. Ser., 1916, 25, 3.
95. Mehler F. G. — Math. Ann., 1879, 18, 469—506.
96. Уиттекер Е. Т. и Ватсон Г. Н. Курс современного анализа. Ч. 2. ГИТТЛ, Л. — М., 1934, 223.
97. Капшивий О. О. — Вісник Київ. ун-ту. Сер. мат. та мех., 1961, 4, 1, 96—106.
98. Пахарева Н. О., Вірченко Н. О. — ДАН УРСР, 1962, 8, 998—1002.
99. Положий Г. Н. и Улитко А. Ф. — Прикл. мех., 1965, 1, 1.
100. Boussinesque I. Applications des potentiels al eude de l'equilibre et d. mouvement des solides elastiques. Paris, 1885.
101. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. ГИТТЛ, М., 1953.
102. Ростовцев Н. А. — Прикл. мат. и мех., 1953, 17, 5.
103. Положий Г. Н. — Прикл. мех., 1966, 2, 11, 123—126.
104. Положий Г. Н. — В кн.: Вычислительная и прикладная математика, 4. Изд-во Киев. ун-та, К., 1967.
105. Соловьев Ю. И. — Инж. журн., 1965, 5, 3, 469—476.
106. Положий Г. М. — ДАН УРСР. Сер. А. Фіз.-техн. та мат. науки, 1967, 4.
107. Положий Г. Н. — УМЖ, 1967, 19, 5, 87—95.
108. Положий Г. Н. — ДАН СССР, 1967, 177, 1, 40—43.
109. Polozii G. N. — Soviet. Math. Dokl., 1967, 8, 6.
110. Положий Г. Н. — Прикл. мех., 1969, 5, 4, 1—17.
111. Положий Г. М. — ДАН УРСР. Сер. А. Фіз.-техн. та мат. науки, 1967, 6, 503—506.

112. Положий Г. Н.— В кн.: Вычислительная и прикладная математика, 5. Изд-во Киев. ун-та, 1968, 24—37.
113. Положий Г. Н.— Прикл. мех., 1967, 3, 12, 16—27.
114. Воронич В. И., Юдович В. И. — Прикл. мат. и мех., 1957, 21, 4.
115. Пахарева Н. О., Вірченко Н. О.— Вісник Київ. ун-ту. Сер. мат. та мех., 1966, 8, 67—72.
116. Положий Г. Н.— В кн.: Вопросы математической физики и теории функций, 5. «Наукова думка», К., 1968, 162—168.
117. Лаврентьев М. А. Конформные отображения. Гостехиздат, М., 1946.
118. Положий Г. Н.— УМЖ, 1953, 5, 4, 380—400.
119. Положий Г. Н.— Усп. мат. наук, 1952, 7, 6, 203—205.
120. Положий Г. Н.— УМЖ, 1955, 7, 3, 339—342.
121. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. ГИТТЛ, М., 1952.
122. Serrin James.— J. of Rat. Mech. and Analysis, 1952, 1, 1—48.
123. Serrin James.— Amer. J. of Math., 1952, 74, 492—506.
124. Пахарева Н. О., Княшко А. М.— Вісник Київ. ун-ту. Сер. астр., мат. та мех., 1958, 1, 1, 119—124.
125. Щелкачев В. Н., Лапук В. В. Подземная гидравлика. Гостопиздат, М.— Л., 1940.
126. Пахарева Н. О.— Мат. зб. Київ. ун-ту, 1954, 5, 115—120.
127. Пахарева Н. О.— ДАН УРСР, 1956, 1, 25—30.
128. Пахарева Н. О.— Прикладна механіка, 1961, 7, 1.
129. Ляшко І. І.— Прикладна механіка, 1956, 2, 4, 438—445.
130. Ляшко І. І.— Вісник Київ. ун-ту. Сер. астр., мат. та мех., 1958, 1, 1, 75—82.
131. Ляшко І. І.— Мат. зб. Київ. ун-ту, 1957, 9, 99—110.
132. Ляшко І. І.— ДАН УРСР, 1959, 3, 241—244.
133. Ляшко І. І.— Вісник Київ. ун-ту. Сер. астр., мат. та мех., 1959, 2, 1.
134. Пахарева Н. А., Ляшко І. І.— УМЖ, 1960, 12, 4, 402—411.
135. Глушенко А. А., Лалак А. И.— В кн.: Четвертая межвузовская конференция по физ.-мат. моделированию в различных областях техники, 1. Изд-во Моск. энергет. ин-та, 1962, 45—58.
136. Тимошенко С. П. Теория упругости. ОНТИ, Л.— М., 1934.
137. Michell I. N.— Proc. of the Lond. Math. Soc., 1900, 31.
138. Нейбер Г. Концентрация напряжений. ОГИЗ, М.— Л., 1947.
139. Савин Г. Н. Концентрация напряжений около отверстий. ГИТТЛ, М.— Л., 1951.
140. Соляник-Красса К. В. Кручение валов переменного сечения. ГИТТЛ, Л.— М., 1949.
141. Положий Г. М., Скоробагатько А. А.— Науковий щорічник Київ. ун-ту за 1956 р., 1957.
142. Положий Г. М., Скоробагатько А. А.— Наукові записки Київ. ун-ту, 1957, 16, 16.
143. Скоробагатько А. А.— ДАН СССР, 1958, 119, 5, 896—898.
144. Скоробагатько А. А.— ДАН УРСР, 1962, 3.
145. Скоробагатько А. А.— Прикладна механіка, 1962, 3, 8.
146. Скоробагатько А. А.— Вісник Київ. ун-ту. Сер. мат. та мех., 1962, 5, 1, 118—123.
147. Скоробагатько А. А.— Вісник Київ. ун-ту. Сер. мат. та мех., 1962, 5, 2, 66—69.
148. Положий Г. М.— Прикладна механіка, 1955, 1, 4, 392—399.
149. Положий Г. М.— Прикладна механіка, 1956, 2, 3, 257—269.
150. Положий Г. Н.— ДАН СССР, 1957, 114, 1, 45—48.
151. Власов В. З. Общая теория оболочек. Гостехиздат. М., 1940.
152. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. ГИТТЛ, М., 1953.

153. Кильчевский Н. А. Основы аналитической механики оболочек. Изд-во АН УССР, К., 1963.
154. Коваленко А. Д. Круглые пластины переменной толщины. ГИФМЛ, М., 1959.
155. Абрамович С. В.—Труды Новочеркасского политехнического ин-та, 1958, 57.
156. Положий Г. М., Кияшко А. М.—Прикладна механіка, 1961, 7, 4, 362—369.
157. Кияшко А. М.—Вісник Київ. ун-ту. Сер. мат. та мех., 1961, 4, 1, 118—124.
158. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во АН СССР, М., 1954.
159. Положий Г. М.—Вісник Київ. ун-ту. Сер. мат. та мех., 1968, 10, 7—18.
160. Ляв А. Математическая теория упругости. ОНТИ, М.—Л., 1935.
161. Папкович П. Ф. Теория упругости. Оборонгиз, М.—Л., 1939.
162. Соляник-Краса К. В.—ДАН СССР, 1952, 86, 3.
163. Квитко А. А.—Информационные материалы института строительной механики АН УССР, 1952, 7.
164. Гродский Г. Д.—Изв. АН СССР. ОМЕН, 1934, 10.
165. Weber C.—Z. angew. Math. und Mech., 1925, 5, 6.
166. Timpe A.—Z. angew. Math. und Mech., 1924, 4, 5.
167. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. ГИТТЛ, М., 1955.
168. Ионеску Дан Г.—Прикл. мат. и мех., 1967, 31, 3.
169. Александров А. Я.—ДАН СССР, 1959, 129, 4.
170. Александров А. Я., Соловьев Ю. И.—Прикл. мат. и мех., 1962, 26, 1, 138—145.
171. Моссаковский В. И.—Прикл. мат. и мех., 1954, 18, 2.
172. Беленький М. Я.—Прикл. мат. и мех., 1960, 24, 3.
173. Снеддон И. Преобразование Фурье. ИЛ, М., 1955.
174. Тичмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. Гостехиздат, М., 1948.
175. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Физматгиз, М., 1958.
176. Положий Г. М., Капшивий О. О.—Прикладна механіка, 1961, 7, 6, 616—626.
177. Капшивий О. О.—Вісник Київ. ун-ту. Сер. мат. та мех., 1962, 5, 1, 76—89.
178. Шерман Д. И.—В кн.: Труды Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике (Москва, январь — февраль 1960). Изд-во АН СССР, М., 1962, 405—467.
179. Шерман Д. И.—Труды Сейсмологического ин-та АН СССР, 1935, 71, 1—24.
180. Положий Г. М., Чемерис В. С.—ДАН УРСР, 1958, 12, 1284—1287.
181. Положий Г. Н., Чемерис В. С.—В кн.: Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного. ГИФМЛ, М., 1961, 399—412.
182. Чемерис В. С.—ДАН УРСР, 1960, 7, 903—906.
183. Чемерис В. С.—Вісник Київ. ун-ту. Сер. мат. та мех., 1960, 3, 2, 105—113.
184. Чемерис В. С.—ДАН УРСР, 1962, 5, 595—599.
185. Математический практикум. Под ред. Г. Н. Положего. Физматгиз, М., 1960.
186. Соловьев Ю. И.—ДАН СССР, 1966, 169, 2.
187. Соловьев Ю. И.—Труды Новосиб. ин-та инж. ж.-д. транспорта, 1967, 62.
188. Чемерис В. С.—ДАН УРСР. Сер. А, 1967, 8.

189. Берка Л.— Прикл. мат. и мех., 1968, 30, 1.
190. Данилюк И. И.— Сиб. мат. журн., 1963, 4, 1.
191. Улитко А. Т.— ДАН УРСР. Сер. А, 1968, 8.
192. Попов Г. Я.— Прикл. мат. и мех., 1962, 26, 1.
193. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Изд-во АН СССР, М., 1967.
194. Губенко В. С., Моссаковский В. И.— Прикл. мат. и мех., 1960, 24, 2.
195. Маслюк Г. Ф.— Прикл. мех., 1967, 3, 3.
196. Cooke I. C.— The Quart. J. of Mech. and Appl. Math., 1963, 16, 2.
197. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф.— Инж.-физ. журн., 1960, 6, 10.
198. Попов Г. Я., Ростовцев Н. А.— В кн.: Труды Всесоюзного второго съезда по теоретической и прикладной механике. Механика твердого тела. «Наука», М., 1966, 235—252.
199. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф.— В кн.: Вопросы математической физики и теории фильтрации, 4. «Наука», М., 1968.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Введение	5

ГЛАВА 1. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ p -АНАЛИТИЧЕСКИХ И (p, q) -АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Общее понятие функции комплексного переменного	14
§ 2. Три класса обобщенных аналитических функций. Основные обобщенные аналитические функции	33
§ 3. Дифференцирование и интегрирование по сопряженной переменной. p -дифференцирование и (p, q) -дифференцирование	45
§ 4. Обобщение формулы Коши и интеграла типа Коши на случай p -аналитических и (p, q) -аналитических функций	74
§ 5. Свойство единственности и (p, q) -аналитическое продолжение (p, q) -аналитических функций	92
§ 6. Дифференциальные свойства p -аналитических и (p, q) -аналитических функций	97
§ 7. Топологические свойства p -аналитических и (p, q) -аналитических функций	108
§ 8. Общие свойства рядов и последовательностей p -аналитических и (p, q) -аналитических функций	121
§ 9. Классификация и общая теория особых точек p -аналитических и (p, q) -аналитических функций	124
§ 10. Теория вычетов p -аналитических и (p, q) -аналитических функций	134
§ 11. Об эквивалентных классах p -аналитических и (p, q) -аналитических функций	144
§ 12. О представлении p -аналитических функций в виде линейных комбинаций аналитических функций и их производных до n -го порядка	150

ГЛАВА 2. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНЫХ КЛАССОВ p -АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, ФОРМУЛЫ ИХ ОБРАЩЕНИЯ И РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

§ 1. Простейшие сведения о краевых задачах аналитических функций	163
§ 2. О некоторых интегральных представлениях p -аналитических функций с характеристикой $p = x^k$	177
§ 3. Основное интегральное представление p -аналитических функций с характеристикой $p = x^k$ и формулы его обращения	185
§ 4. Решение краевых задач p -аналитических функций с характеристикой $p = x^k$	214
§ 5. Об интегральном представлении операторной производной по сопряженной переменной, соответствующей характеристике $p = x^k$	266

§ 6. О формулах обращения основного интегрального представления p -аналитических функций с характеристикой $p = x^k$ вдоль произвольных контуров	272
§ 7. О специальных интегральных представлениях x^k -аналитических функций от $z = x + iy$ внутри вертикальных полос и областей, ограниченных параболой	287
§ 8. Основное интегральное представление p -аналитических функций от $z = x + iy$ с логарифмически гармонической характеристикой p	294
§ 9. Задача о комплексном x -аналитическом потенциале системы кругового и кольцевого дисков	308
§ 10. О решении смешанной краевой задачи теории осесимметричного потенциала для пространственного слоя	321

Г Л А В А 3. О НЕКОТОРЫХ ПРИМЕНЕНИЯХ p -АНАЛИТИЧЕСКИХ И (p, q) -АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Вариационно-топологические теоремы сравнения плоской и осесимметричной фильтрации в однородной и неоднородной средах. Метод мажорантных областей	329
§ 2. Вариационно-топологические теоремы сравнения и метод мажорантных областей в теории кручения тел вращения	348
§ 3. О применении p -аналитических функций к задачам о безмоментном напряженном состоянии оболочек вращения	375
§ 4. Метод p -аналитических функций в осесимметричной теории упругости	377
§ 5. Решение основных задач осесимметричной теории упругости для цилиндра и параболоида вращения	402
§ 6. Решение контактных задач осесимметричной теории упругости для системы кругового и кольцевого штампов методом p -аналитических функций	412
Литература	416

Георгий Николаевич Положий
Теория и применение p -аналитических и
 (p, q) -аналитических функций

Печатается по постановлению ученого совета
Института математики АН УССР

Редактор *Е. Л. Орлик*
Художественный редактор *К. Г. Лычаковский*
Оформление художника *В. Г. Самсонова*
Технический редактор *Б. А. Пиковская*
Корректор *Л. М. Тищенко*

Сдано в набор 16.2. 1972 г. Подписано к печати
24. 8. 1972 г. БФ 01708. Зак. № 2—318. Изд. № 22. Ти-
раж 2000. Бумага № 1, 60×90¹/₁₆. Усл. печ. листов 26,5.
Учетно- изд. листов 27,18. Цена 2 руб. 92 коп.

Издательство «Наукова думка». Киев, Репина, 3.

Главное предприятие республиканского произ-
водственного объединения «Полиграфкнига», Гос-
комиздата УССР, г. Киев, Довженко, 3.